Feuille d'exercices n°6

Fonctions récursives partielles (3)

Indécidabilité du problème de l'arrêt – l'ensemble $K = \{x \ / \ \varphi^1(x,x) \downarrow\}$ n'est pas récursif.

Théorème du point fixe – Pour tout entier $p > 0$ pour toute fonction récursive totale à une variable α, il existe un entier e tel que $\varphi^p_e = \varphi^p_{\alpha(e)}$.

Théorème de Rice – Si A est un sous-ensemble propre de $\mathbb{N}$ (distinct de $\emptyset$ et de $\mathbb{N}$) qui est un ensemble d'indices de fonctions récursives (i.e. si $i \in A$ et $\varphi^1_i = \varphi^1_j$ alors $j \in A$) alors A n'est pas récursif.

CAS PARTICULIERS du THÉORÈME de RICE.

Exercice 1. Montrer que les problèmes suivant sont indécidables : **a.** en réduisant le problème de l'arrêt à chacun d'entre eux, **b.** en utilisant le Théorème de Rice.

1. Déterminer suivant x, si φ^1_x est constante partout définie ou non.
2. Déterminer suivant x, y, si $y \in \mathrm{Im}\,\varphi^1_x$.
3. Déterminer, suivant x, y, z, si $\varphi^1_x(y) = z$.
4. Déterminer suivant x, si $\mathrm{Im}\,\varphi^1_x$ est infini.
5. Déterminer suivant x, si φ^1_x n'est nulle part définie.
6. Déterminer suivant x, si φ^1_x est définie en une infinité de valeurs.
7. Un entier a étant fixé, déterminer suivant x si $a \in \mathrm{Im}\,\varphi^1_x$.

Exercice 2. Montrer que suivant les valeurs de l'entier i, il peut être ou non décidable de déterminer suivant y si $y \in \mathrm{Im}\,\varphi^1_i$.

THÉORÈMES du POINT FIXE.

Exercice 3 (dém. du théorème de Rice). Soit A un sous-ensemble propre récursif de $\mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe une fonction f récursive vérifiant $x \in A$ ssi $f(x) \notin A$.
2. En utilisant le théorème du point fixe, en déduire qu'il existe i et j tels que $\varphi_i = \varphi_j$, $i \in A$ et $j \notin A$.
3. En déduire le théorème de Rice.

Exercice 4. Donner une exemple de fonctionnelle Ψ : $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que, si f est totale alors $\Psi(f)$ est totale, Ψ se "projette" sur les indices en une fonction récursive totale, et Ψ n'a pour point fixe que la fonction nulle part définie.

Exercice 5. Redémontrer le théorème du point fixe, en montrant de plus le calcul effectif d'un indice du point fixe obtenu. C'est à dire montrez que :

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction récursive h_p à une variable, telle que, si j est l'indice d'une fonction récursive *totale* α alors, $\varphi^p_{h_p(j)} = \varphi^p_{\alpha(h_p(j))}$.

Exercice 6. En utilisant le résultat de l'exercice 5, Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive it telle que, si i est l'indice d'une fonction f à une variable, $it(i)$ est l'indice de la fonction It_f vérifiant :

$$It_f(0,x) = x;\ It_f(n+1,x) = f(It_f(n,x))$$

Exercice 7. Appelons schéma de récurrence double le schéma suivant

Si g_1, g_2 et h, sont récursives, alors, la fonction f définie ci-dessous est récursive :

$$f(a_1,\dots,a_n,0,y) = g_1(a_1,\dots,a_n,y)\,;$$
$$f(a_1,\dots,a_n,x+1,0) = g_2(a_1,\dots,a_n,x)\,;$$
$$f(a_1,\dots,a_n,x+1,y+1) =$$
$$h(a_1,\dots,a_n,x,y,f(a_1,\dots,a_n,x,f(a_1,\dots,a_n,x+1,y))).$$

Montrer que l'ensemble des fonctions partielles récursives est clos sous application du schéma de récurrence double. En déduire que l'ensemble des fonctions récursives totales est clos sous application de ce schéma (ce schéma permet de définir la fonction d'Ackermann).

Exercice 8. Soit F l'ensemble des triplets d'entiers (i,j,x) tels que $\varphi_i(x) = \varphi_j(x)$. Soit G l'ensemble des couples d'entiers (i,j) tels que φ_i et φ_j coïncident en au moins un point. Soit H l'ensemble des couples d'entiers (i,j) tels que φ_i et φ_j ne coïncident en aucun point.

1. Montrer que F, G et H ne sont pas récursifs.
2. Montrer que F et G sont récursivement énumérables mais que H ne l'est pas.

Exercice 9.

1. Etudier suivant les valeurs de l'entier b la décidabilité du problème : déterminer suivant i si pour tout x tel que $\varphi^1_i(x)$ est définie, $\varphi^1_i(x) \geqslant b$.
2. **a.** Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive α telle que

   $$\varphi^1_{\alpha(i)}(0) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi^1_{\alpha(i)}(x+1) = \varphi_i(x)\ .$$

   b. Montrer que le mimimum des valeurs prises par une fonction récursive n'est pas calculable, plus précisément montrer que toute fonction éventuellement partielle, qui est définie en i dès que φ^1_i est définie en au moins un point, et associe alors à i le minimum des valeurs prises par φ^1_i n'est pas récursive.

Exercice 10. Soit C l'ensemble des indices de fonctions récursives totales à une variable. En utilisant la caractérisation des ensembles récursivement énumérables de $\mathbb{N}$ comme images de fonctions récursives, montrer que C n'est pas récursivement énumérable.

Dans les exercices 11 et 12, la fonction d'énumération des fonctions partielles récursives de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est notée $\varphi = \varphi^1$, on note $\varphi_i = \varphi^1_i = \lambda x \varphi(i,x)$ et $W_i = W^1_i$ le domaine de définition de la fonction φ_i.

Exercice 11. Soit I l'ensemble des indices de fonctions partielles récursives strictement croissantes :

$$i \in I \text{ ssi } \forall x, y \in W_i (x < y \Rightarrow \varphi_i(x) < \varphi_i(y))$$

1. Montrer que I n'est pas récursif.

2. Montrer que I n'est pas récursivement énumérable.

Exercice 12. On sait que la classe des ensembles récursifs est close par opérations booléennes. Si l'on choisit d'associer à un ensemble récursif l'indice de sa fonction caractéristique, cette clôture est évidemment effective. Le but de cet exercice est de montrer que, si l'on choisit d'associer à un ensemble récursif son indice en temps qu'ensemble récursivement énumérable, cette clôture est effective pour l'union et l'intersection, mais pas pour la complémentation.
Indication : le théorème s-m-n est utile pour les 3 premières questions.

1. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive à deux arguments u telle que :

$$W_i \cap W_j = W_{u(i,j)}$$

2. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive à deux arguments v telle que :

$$W_i \cup W_j = W_{v(i,j)}$$

Indication : se servir du prédicat T^1.

Le but des questions suivantes est de montrer que le résultat est faux pour la complémentation en utilisant le théorème du point fixe. L'idée est la suivante : soit ψ une fonction partielle qui associe à un ensemble récursif d'indice i un indice de son complémentaire. Si l'ensemble d'indice le point fixe de ψ était récursif, on aurait une contradiction, mais bien sûr cela peut ne pas être le cas. On utilise donc une fonction γ qui associe à l'indice de tout ensemble récursivement énumérable non vide l'indice d'un ensemble récursif (ici un singleton) contenu dans celui-ci.

3. Montrer qu'il existe une fonction récursive partielle g telle que $W_i \neq \emptyset \Rightarrow g(i) \in W_i$, puis montrer qu'il existe une fonction primitive récursive α telle que :
– si $W_i \neq \emptyset$ alors $\varphi_{\alpha(i)}$ est une fonction constante partout définie vérifiant $\varphi_{\alpha(i)}(x) \in W_i$
– si $W_i = \emptyset$ alors $\varphi_{\alpha(i)}$ n'est nulle part définie.
Indication : se servir du prédicat T^1.

4. Indiquer un procédé effectif pour associer à une fonction totale f, une fonction dont le domaine de définition est l'image de f, puis montrer qu'il existe une fonction primitive récursive β telle que :

$$\begin{aligned}&(\varphi_i \text{ est totale } \Rightarrow W_{\beta(i)} = \operatorname{Im} \varphi_i)\\ &\text{ et}\\ &(W_i = \emptyset \Rightarrow W_{\beta(i)} = \emptyset)\,.\end{aligned}$$

5. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive γ telle que

$$W_{\gamma(i)} \subset W_i \text{ et } (W_i \neq \emptyset \Rightarrow \mathsf{card}\, W_{\gamma(i)} = 1)$$

6. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A. Soit ψ une fonction éventuellement partielle vérifiant :

$$W_i \text{ est récursif } \Rightarrow W_{\psi(i)} = \overline{W_i}$$

Montrer qu'une telle fonction partielle (éventuellement) ne peut être récursive (utiliser la fonction γ et le théorème du point fixe).

Exercice 13 (Fonctions de choix). La 3-ième question de cette partie est indépendante des deux autres. On peut se servir de la première pour la seconde.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive partielle f telle que :

$$W_i \neq \emptyset \Rightarrow f(i)\downarrow \text{ et } f(i) \in W_i\,. \qquad (*)$$

2. La fonction f définie ci-dessus peut être vue comme une fonction récursive partielle de choix sur les récursivement énumérables, mais dépend a priori de l'indice de l'ensemble récursivement énumérable et non seulement de l'ensemble. Nous allons montrer qu'il ne peut en être autrement, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonction récursive partielle f vérifiant :

$$\begin{aligned}&[W_i = W_j \text{ et } W_i \neq \emptyset] \Rightarrow\\ &\quad [f(i)\downarrow \text{ et } f(j)\downarrow \text{ et } f(i) = f(j) \text{ et } f(i) \in W_i]\,.\end{aligned} \qquad (**)$$

a. Définir deux fonctions partielles récursives g et h à deux arguments, telle que pour tout entier i :

$$\begin{aligned}&g(i,0)\downarrow \text{ et } h(i,1)\downarrow\\ &g(i,1)\downarrow \text{ ssi } W_i \neq \emptyset\\ &h(i,0)\downarrow \text{ ssi } W_i \neq \emptyset\\ &g(i,j)\uparrow \text{ et } h(i,j)\uparrow \text{ pour } j \geqslant 2\end{aligned}$$

b. Montrer qu'il existe deux fonctions récursives α et β telles que :

$$\begin{aligned}W_i = \emptyset &\Rightarrow W_{\alpha(i)} = \{0\}\\ W_i \neq \emptyset &\Rightarrow W_{\alpha(i)} = \{0,1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_i = \emptyset &\Rightarrow W_{\beta(i)} = \{1\}\\ W_i \neq \emptyset &\Rightarrow W_{\beta(i)} = \{0,1\}\end{aligned}$$

c. Montrer que $W_{\alpha(i)} = W_{\beta(i)}$ est indécidable.

d. En déduire qu'il n'existe pas de fonction récursive partielle f vérifiant $(**)$.

3. On veut maintenant montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive totale de choix, i. e. de fonction récursive totale f vérifiant $(*)$.

a. Construire une fonction d récursive partielle à deux arguments définie si et seulement si ses deux arguments sont égaux.

b. Soit f une fonction récursive totale. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale γ telle que $W_{\gamma(i)} = \{f(i) + 1\}$.

c. En appliquant le théorème du point fixe à γ, montrer que f récursive totale ne peut vérifier $(*)$.