Feuille d'exercices n°5

Fonctions récursives partielles (2)

ENSEMBLES DE FONCTIONS RÉCURSIVEMENT ÉNUMÉRÉS.

Nous dirons qu'un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions partielles récursives à une variable est *récursivement énuméré* s'il existe une fonction partielle récursive à 2 variables ψ telle que $\mathcal{F} = \{\lambda y \psi(x, y) \ / \ x \in \mathbb{N}\}$. Nous dirons aussi que $\mathcal{F}$ est récursivement énuméré par ψ. Il est par exemple très facile de montrer que l'ensemble des fonctions polynômes à une variable est récursivement énuméré. En cours, on montre que l'ensemble des fonctions partielles récursives est récursivement énuméré (voir aussi Cori Lascar pp 59-60 ex. 21 et 22 : l'ensemble des fonctions primitives récursives est récursivement énuméré, ainsi que l'ensemble des fonctions primitives récursives strictement croissantes ...).

Exercice 1. En utilisant la méthode diagonale, montrer qu'aucun des ensembles de fonction de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ suivants ne sont récursivement énumérés : l'ensemble des fonctions récursives totales, l'ensemble des fonctions récursives totales croissantes au sens large comme au sens strict, l'ensemble des fonctions récursives totales injectives / surjectives / bijectives.

ÉNUMÉRATION DES FONCTIONS RÉCURSIVES.

Exercice 2.

1. Montrer (directement, sans utiliser que K n'est pas récursif) qu'il existe un x tel que $\varphi_x(x)$ n'est pas définie.
2. Montrer qu'il existe une fonction récursive partielle qui ne peut pas être prolongé en une fonction récursive totale (indication : prendre $\lambda x \varphi_x(x)$).

PROBLÈME de l'ARRÊT.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive totale qui borne la longueur du calcul, plus précisément, il n'existe pas de fonction récursive totale à 2 variables τ telle que pour tout m et pour tout x, la machine à registres de code m termine pour l'entrée x si et seulement si elle termine en moins de $\tau(m, x)$ étapes.

Exercice 4. On rappelle le schéma de définition par minimisation. Soit f partielle récursive à $p+1$ arguments, alors la fonction partielle notée

$$g(x_1, \ldots, x_p) = \mu y. f(x_1, \ldots, x_p, y) = 0$$

est définie en $x_1, \ldots, x_p$ et vaut z si et seulement si

a. $f(x_1, \ldots, x_p, z) = 0$;
b. $\forall y < z\, f(x_1, \ldots, x_p, y)$ est définie ;
c. $\forall y < z\, f(x_1, \ldots, x_p, y) \neq 0$;

La condition **b** est naturelle, si l'on pense à l'algorithme induit par cette définition. Montrer qu'elle est indispensable si l'on veut que g soit récursive partielle. Indication : si l'on omet la condition **b**, on peut alors définir une fonction totale qui détermine le problème de l'arrêt.

Exercice 5. Rappeler pourquoi toute fonction partielle récursive est la composée, dans l'ordre, d'une fonction primitive récursive, et d'une fonction obtenue par minimisation à partir d'une fonction primitive récursive (forme normale de Kleene).

Montrer que cette forme est, en quelque sorte « minimale », c'est à dire qu'il existe une fonction récursive partielle ψ (à une variable), qui n'est pas obtenue directement par minimisation à partir d'une fonction récursive totale (indication : poser $\psi(x) = x$ si $\varphi_x(x)$ est définie, non définie sinon).

THÉORÈME S-M-N.

Exercice 6. Soit un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions (partielles) récursives à une variable. Nous dirons qu'une fonction totale à une variable f énumère des indices pour $\mathcal{F}$ si :

$$\mathcal{F} = \{\varphi_x / x \in \operatorname{Im} f\} .$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est récursivement énuméré ssi il existe une fonction primitive récursive qui énumère des indices pour $\mathcal{F}$.

Exercice 7. On donne dans cet exercice une démonstration "effective" de l'indécidabilité du problème de l'arrêt.

Nous dirons qu'une fonction g à deux variables détermine l'arrêt des machines à une entrée si elle vérifie, pour tous x et y :

$$\begin{array}{lcll} g(x,y) & = & 1 & \text{si } \varphi(x,y) \text{ est définie;} \\ g(x,y) & = & 0 & \text{si } \varphi(x,y) \text{ n'est pas définie;} \end{array}$$

1. Démontrer l'indécidabilité du problème de l'arrêt de la façon suivante : associer à une fonction récursive totale $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, le code d'une machine dont g ne détermine pas l'arrêt
2. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive à une variable h telle que, si i est l'indice d'une fonction à 2 variables g, $h(i)$ est l'indice d'une machine à une entrée dont g ne détermine pas l'arrêt.

Exercice 8.

1. On suppose que f est récursive totale, et énumère des indices pour un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions récursives totales à une variable. Construire explicitement à partir de f une fonction récursive totale qui n'est pas dans $\mathcal{F}$.
2. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive e telle que, si i est l'indice d'une fonction à une variable f qui énumère des indices pour un ensemble de fonctions récursives *totales* $\mathcal{F}$, alors $e(i)$ est l'indice d'une fonction récursive totale à une variable qui n'est pas dans $\mathcal{F}$.
3. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive h à deux variables, telle que :
$$\varphi^1_{h(a,i)}(0) = a \ ; \ \varphi^1_{h(a,i)}(n+1) = \varphi^1_i(n)$$
4. Montrer que, pour tout ensemble I récursivement énumérable d'indices de fonctions récursives totales à une variable, il existe un ensemble récursivement énumérable disjoint de I d'indices de fonctions récursives totales à une variable, toutes distinctes entre elles et distinctes des fonctions d'indice dans I.