Feuille d'exercices n°4

Fonctions récursives partielles (1)

Aucun des exercices de cette feuille n'utilisent l'énumération des fonctions récursives, ni le codage du calcul. On reprend parfois les résultats et notations des feuilles précédentes.

Notation : on écrit $f(x)\downarrow$ pour f est définie en x, $f(x)\uparrow$ pour f n'est pas définie en x.

Définition : L'ensemble des *fonctions récursives partielles* est le plus petit ensemble de fonctions partielles à plusieurs arguments entiers :

i. qui contient les fonction *nulle* $\lambda x.0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la fonction *successeur* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, les *projections* $p_k^i : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$

ii. qui est clos par le *schéma de composition* :
si $h : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$, et $g_1, \dots, g_p : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ sont des fonctions récursives partielles, alors $f : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ définie ci-dessous est une fonction récursive partielle.

$$\begin{array}{l} \text{si } \; g_1(x_1,\dots,x_n)\downarrow \dots g_p(x_1,\dots,x_n)\downarrow \; \text{ et } h(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_p(x_1,\dots,x_n))\downarrow \\ \quad \text{alors } \; f(x_1,\dots,x_n)\downarrow \; \text{ et } f(x_1,\dots,x_n) = h(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_p(x_1,\dots,x_n)) \end{array}$$

iii. qui est clos par le *schéma de récurrence primitive* :
si $g : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N}^{p+2} \longrightarrow \mathbb{N}$ sont des fonctions récursives partielles, alors $f : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie ci-dessous est une fonction récursive partielle.

$$\begin{array}{l} \text{si } g(a_1,\dots,a_p)\downarrow \; \text{ alors } f(a_1,\dots,a_p,0)\downarrow \; \text{ et } f(a_1,\dots,a_p,0) = g(a_1,\dots,a_p) \\ \text{si } f(a_1,\dots,a_p,x)\downarrow \; \text{ et } h(a_1,\dots,a_p,x,f(a_1,\dots,a_p,x))\downarrow \\ \quad \text{alors } f(a_1,\dots,a_p,x+1)\downarrow \; \text{ et } f(a_1,\dots,a_p,x+1) = h(a_1,\dots,a_p,x,f(a_1,\dots,a_p,x)) \\ \quad \text{sinon } f(a_1,\dots,a_p,x+1)\uparrow \end{array}$$

iv. qui est clos par le *schéma de minimisation* : si $g : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction récursive partielle, alors la fonction partielle $f : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ définie ci-dessous notée $f(x_1,\dots,x_p) = \mu z.g(x_1,\dots,x_p,z) = 0$ est récursive partielle.

$$\begin{array}{l} \text{si } \exists y_0 \; [g(x_1,\dots,x_p,y_0) = 0 \wedge \forall z < y_0 (g(x_1,\dots,x_p,z)\downarrow \wedge g(x_1,\dots,x_p,z) \neq 0)] \\ \quad \text{alors } f(x_1,\dots,x_p)\downarrow \; \text{ et } f(x_1,\dots,x_p) = y_0 \\ \quad \text{sinon } f(x_1,\dots,x_p)\uparrow \end{array}$$

Un prédicat ou un ensemble est récursif si sa fonction caractéristique est récursive (totale).

Exercice 1. Montrer que l'ensemble des fonctions récursives (partielles) et l'ensemble des fonctions récursives totales sont dénombrables.

Exercice 2. vérifier que les schémas de clôture sur les fonctions primitives récursives vus en cours (et dans la feuille d'exercices **2** restent valables pour les fonctions récursives *totales* : somme et produit bornés, minimisation bornée, récurrence sur la suite des valeurs ... De même pour les schémas de clôture sur les prédicats ou ensembles récursifs.

Exercice 3 (exemples). Montrer que la fonction nulle part définie est récursive partielle.
Soient k nombres distincts $a_1, \dots, a_k$. Montrer que la fonction nulle en $a_1, \dots, a_k$ non définie ailleurs est récursive partielle, puis que la fonction qui vaut b_i en a_i et qui n'est pas définie ailleurs est récursive partielle, où $(b_1, \dots, b_k)$ sont des entiers.
Montrer que la fonction *pre* non définie en 0 et vérifiant $pre(x+1) = x$ est récursive partielle. Montrer que la fonction *sub*, telle que si $x \geqslant y$, alors $sub(x,y) = x - y$ sinon *sub* est indéfinie est récursive partielle.

Exercice 4. Montrer que la réciproque d'une fonction récursive bijective est récursive.
Ce résultat est faux pour les fonctions primitives récursives : voir l'exercice 13 de cette feuille (ou Cori-Lascar ex 16 p 58).

Exercice 5. Soit f une fonction (totale) de $\mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$. Montrer que f est récursive si et seulement si son graphe est récursif (Cori-Lascar ex 10 p 57).
Ce résultat est faux si l'on remplace récursif par primitif récursif, par exemple le graphe de la fonction d'Ackermann est primitif récursif : voir l'exercice 12 de cette feuille ou Cori-Lascar ex 11 p 57.

Exercice 6. Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ récursif infini est l'image d'une fonction récursive totale, puis généraliser à tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ récursif non vide
La réciproque est fausse : ce sera fait dans la suite du cours.

Exercice 7 (récursivement énumérables).
En cours, nous verrons qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ est *récursivement énumérable* si et seulement s'il vérifie l'une seule des 4 propriétés suivantes, toutes équivalentes entre elles.

i. E est l'image d'une fonction récursive totale ou $E = \emptyset$.

ii. E est le domaine de définition d'une fonction récursive partielle (définition qui sera adoptée en cours car elle se généralise évidemment aux sous-ensembles de $\mathbb{N}^p$.

iii. E est l'image d'une fonction récursive partielle.

iv. E est la projection d'un sous-ensemble récursif de $\mathbb{N}^2$.

On ne demande pas de démontrer que **ii** entraîne **i** et que **iii** entraîne **i** : il faut faire intervenir une notion de temps de calcul pour la fonction en question (cf. cours). Par contre les autres implications se font sans faire intervenir cette notion :

1. Démontrer directement que **i** entraîne **ii**, **iii** et **iv**.
2. Démontrer directement (sans passer par la projection d'un récursivement énumérable est récursivement énumérable), que **iv** entraîne **i** (penser au codage des couples d'entiers dans $\mathbb{N}$).

Dans la suite on adopte (provisoirement) comme définition de sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbb{N}$ « être vide ou image d'une fonction récursive totale ».

On n'utilisera pas les équivalences de l'exercice précédent qui ne sont pas encore démontrées.

Exercice 8. (voir Cori-Lascar ex 13 et 12 p 58)

1. Montrer qu'un ensemble *récursivement énumérable infini* est l'image d'une fonction *récursive injective*, i.e. montrer que pour toute fonction récursive totale f dont l'image est infinie, il existe une fonction récursive totale injective g telle que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.
2. Montrer que l'image d'une fonction récursive totale croissante est un ensemble récursif.
   Nous verrons qu'il existe des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ récursivement énumérables non récursifs, donc dans **1**, on ne peut pas choisir en général f croissante.
3. Réciproquement montrer que tout ensemble *récursif infini* est l'image d'une fonction *récursive strictement croissante.*

Exercice 9. Montrer que tout ensemble récursivement énumérable infini contient un ensemble récursif infini, on peut se servir de résultats de l'exercice 8 (voir Cori-Lascar ex 14 p 58).

Exercice 10. Soit $A \subset \mathbb{N}$, montrer que si A et son complémentaire A^c sont tous deux images d'une fonction récursive totale (récursivement énumérables) alors A est récursif.

Comme l'on montrera qu'il existe des ensembles récursivement énumérables non récursifs, ceci implique que la classe des ensembles récursivement énumérables n'est pas stable par passage au complémentaire.

Exercice 11. Soient $A,\ B \subset \mathbb{N}$, tels que A et B sont images d'une fonction récursive totale.

1. Montrer que $A \cup B$ est image d'une fonction récursive totale.
2. Montrer que si $A \cap B$ est non vide, alors $A \cap B$ est image d'une fonction récursive totale.

Exercice 12. Le but de cet exercice est de démontrer que le graphe de la fonction d'Ackermann A définie à la feuille **3** est primitif récursif. On peut en déduire que la fonction d'Ackermann est récursive.

On pose $A'(n,x) = A(n+2,x)$. On vérifiera (voir exercice **2** feuille 4) que, $A'(n,x) > x$ et que les fonctions $\lambda x.A(n,x)$ sont strictement croissantes, donc injectives. On remarquera aussi que $A'(n,x) \geqslant 1$. Posons :

$$\begin{aligned}
&h(n,y) = \mu x < y.A'(n,x) = y\\
&h'(z) = h(\pi_2^1(z), \pi_2^2(z))\\
&H(z) = [1+h'(z); \dots ; 1+h'(i); \dots ; 1+h'(0)]
\end{aligned}$$

1. Montrer que pour tous entiers $n,\ x,\ y$:
   $$A'(n,x) = y \Leftrightarrow [(h(n,y) = x \wedge x \neq 0) \vee (y = 1 \wedge x = 0)] \ .$$
2. Calculer pour y quelconque $h(0,y)$, puis pour n quelconque, $h(n,0)$ et $h(n,1)$.
3. Soient $n,\ y,\ x,\ ,t$ des entiers vérifiant :
   $$P[n,y,x,t] \equiv_d h(n,y) = t \wedge h(n+1,t) = x \wedge t \neq 0 \wedge x \neq 0$$
   montrer qu'alors $h(n+1,y) = 1+x$.
4. En déduire que pour tous entiers $n,\ x,\ y \geqslant 2$:
   $$\begin{aligned}
   &\text{si } \exists x < y\ \exists t < y\ P[n,y,x,t]\\
   &\quad \text{alors } h(n+1,y) = 1 + \mu x < y.\exists t < y\ P[n,y,x,t]\\
   &\quad \text{sinon } h(n+1,y) = 0
   \end{aligned}$$
5. Calculer $h'(0)$ et exprimer $h'(z+1)$ de façon primitive récursive en fonction de $H(z)$.
6. En déduire que les fonctions H, h' et h sont primitives récursives.
7. En déduire que que le graphe de la fonction A', puis celui de la fonction d'Ackermann est primitif récursif.
8. En déduire que la fonction d'Ackermann est récursive.
   On verra plus tard une méthode bien plus générale qui permet entre autre de montrer que les fonctions définies par des schémas de récurrence double telle la fonction d'Ackermann sont récursives.

Exercice 13. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une fonction primitive récursive bijective dont la réciproque n'est pas primitive récursive.

On reprend les fonctions h et h' définies à l'exercice 12 dont on a démontré qu'elles étaient primitives récursives.

1. Montrer que la fonctions h est surjective et vérifie :
   $$\forall n\ \forall x \neq 0\ \exists! y \neq 0\ h(n,y) = x\ .$$
2. En déduire que la fonction primitive récursive h_1 définie par $h_1(z) = \alpha_2(\pi_1^2(z), h(\pi_1^2(z), \pi_2^2(z)))$ vérifie :
   $$\forall u (\pi_2^2(u) \neq 0 \rightarrow \exists! z\ h_1(z) = u)\ .$$
3. Montrer que ci-dessous est bien définie une fonction (totale) g, qui est primitive récursive et bijective
   $$\begin{aligned}
   &g(0) = 0\\
   &\text{si } \pi_2^2(h_1(z+1)) \neq 0\\
   &\qquad \text{alors } g(z+1) = 2.h_1(z+1) \dot{-} 1\\
   &\qquad \text{sinon } g(z+1) = 2\sum_{i=0}^{z} \overline{sg}(\,\pi_2^2(h_1(i+1))\,)
   \end{aligned}$$
4. Montrer que la réciproque de g est récursive mais pas primitive récursive (montrer que si g^{-1} était primitive récursive la fonction d'Ackermann le serait également).