Feuille d'exercices

Hiérarchie arithmétique

Hiérarchie arithmétique.[1]
On se place dans le langage de l'arithmétique $\mathcal{L} = (0, s, +, \times, \leqslant)$.
On définit par induction les classes des formules Π_n et Σ_n dans ce langage :

i. $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ est la classe des formules construites sur des formules atomiques équationnelles dont toutes les quantifications sont bornées (par des termes).

ii. Si F est une formule Σ_0, alors $\exists x\ F$ est une formule Σ_1, et $\forall x\ F$ est une formule Π_1.

iii. Pour $n \geqslant 1$, si F est une formule Σ_n, alors $\exists x F$ est une formule Σ_n et $\forall x F$ est une formule Π_{n+1}.

iv. Si F est une formule Π_n, alors $\forall x F$ est une formule Π_n et $\exists x F$ est une formule Σ_{n+1}.

Un sous-ensemble Σ_n (*resp.* Π_n) de $\mathbb{N}^p$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^p$ définissable par une formule Σ_n (*resp.* Π_n). La classe des ensembles Δ_n est l'intersection des classes Σ_n et Π_n. On remarque qu'un ensemble est Σ_n ssi son complémentaire est Π_n.
On rappelle que la classe des ensembles récursivement énumérables est la classe des ensembles définissables par une formule Σ — une formule est Σ si tous ses quantificateurs universels sont bornés, si elle n'utilise que les connecteurs propositionnels « $\wedge$, $\vee$ » et la négation seulement devant une formule atomique équationnelle.

Exercice 1. Pour un entier $n \geqslant 1$ donné :

1. Montrer que la classe des ensembles Σ_n est close par réunion, intersection, quantifications bornées, et quantification existentielle, et que la classe des ensembles Π_n est close par réunion, intersection, quantifications bornées, et quantification universelle.

2. Déduire de **1** que la classe des ensembles Σ_1 est exactement la classe des ensemble Σ ou encore la classe des ensembles récursivement énumérables, et que la classe des ensembles Δ_1 est la classe des ensembles récursifs.

3. Déduire de **1** que tous les ensembles définissables par une formule de l'arithmétique dans le langage $\mathcal{L}$ ou dans un langage dont les symboles s'interprètent par des fonctions ou des prédicats récursifs est dans la hiérarchie arithmétique.

Exercice 2. Soient $p, n \geqslant 1$. Montrer que d'un ensemble universel pour la classe des sous-ensembles Σ_n de $\mathbb{N}^p$. Plus précisément, on cherche R un sous-ensemble Σ_n de $\mathbb{N}^{p+1}$ tel que pour tout E sous-ensemble Σ_n de $\mathbb{N}^p$ il existe un entier i tel que :

$$(x_1, \dots, x_p) \in E \text{ ssi } (i, x_1, \dots, x_p) \in R\ .$$

Montrer le même résultat pour les ensembles Π_n.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\Sigma_n \cup \Pi_n \subset \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}\ .$$

2. Montrer par diagonalisation que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\Sigma_n - \Pi_n \neq \emptyset$ et $\Pi_n - \Sigma_n \neq \emptyset$.
Déterminer le graphe de l'inclusion stricte sur les classes Σ_n, Π_n et Δ_n.

Réduction, ensembles Σ_n ou Π_n complets.
On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^p$ est *réductible*, ou *se réduit* à un sous-ensemble B de $\mathbb{N}$, et l'on note $A \prec B$, s'il existe une fonction récursive totale f telle que pour tout entier x, $x \in A$ ssi $f(x) \in B$ [2].
Un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ est dit Σ_n-complet (*resp.* Π_n-complet) ssi :

i. $E \in \Sigma_n$ (*resp.* $E \in \Pi_n$) ;

ii. $\forall X \in \Sigma_n\ X \prec E$ (*resp.* $\forall X \in \Pi_n\ X \prec E$).

Exercice 4. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que E est un sous-ensemble Σ_n, resp. Π_n, de $\mathbb{N}^p$ ssi le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ $\{\alpha_p(x_1, \dots, x_p)/(x_1, \dots, x_p) \in E\}$ est Σ_n, resp. Π_n. En déduire que dans la définition ci-dessus de Σ_n complet, resp. Π_n-complet, on peut quantifier seulement sur X sous-ensemble Σ_n, resp. Π_n, de $\mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que si E est un sous-ensemble Σ_n de $\mathbb{N}$ et si $F \prec E$, alors F est Σ_n. En déduire le résultat analogue pour les ensembles Π_n.

Exercice 6. Montrer pour tout entier $n \geqslant 1$ l'existence d'un ensemble Σ_n complet et d'un ensemble Π_n complet.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'un ensemble E Σ_n-complet n'est pas Π_m pour $m \leqslant n$, ni Σ_m pour $m < n$ (en particulier E n'est pas récursif, et si $n \geqslant 2$ E n'est pas récursivement énumérable). Montrer le résultat analogue pour un ensemble Π_n-complet (qui en particulier n'est pas récursivement énumérable).

Exercice 8. Montrer que $K = \{x \in \mathbb{N}\ /\ \varphi(x, x) \downarrow\}$ est Σ_1-complet, et que son complémentaire $K^{\mathbf{c}}$ est Π_1-complet (utiliser $\lambda i \lambda x \lambda y . \varphi^1(i, x)$).

Exercice 9. Montrer que C, l'ensemble des indices de fonctions récursives totales, est Π_2-complet.

Exercice 10. Soit W_x le domaine de la fonction récursive partielle à un argument d'indice x. On étudie les ensembles :

$$I = \{x \in \mathbb{N}\ /\ W_x \text{ est infini}\} \quad F = \{x \in \mathbb{N}\ /\ W_x \text{ est fini}\}$$

Montrer que que I est Π_2-complet, et F Σ_2-complet.

Exercice 11. On définit pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_j = \{i \in \mathbb{N}\ /\ W_i \supset W_j\}$. Montrer que pour tout j, A_j est Π_2, puis classer A_j dans la hiérarchie suivant que W_j est vide, fini ou infini (dans les deux derniers cas on montrera que A_j est complet pour une certaine classe de la hiérarchie arithmétique).

---

[1] Très souvent, ce qui est noté Π_n ou Σ_n dans cette feuille est noté Π^0_n ou Σ^0_n.

[2] $A \prec B$: on réduit A à B au sens où l'on réduit la décidabilité de A à celle de B — si B est récursif alors A est récursif, voir aussi l'exercice 5. Il existe d'autre notions de réductibilité. celle ci est la m-réductibilité (*many-one reductibility*), voir les références.