Feuille d'exercices n°8

Théorème de Gödel.

Notations : si n désigne un entier, $\underline{n}$ désigne le terme associé s^n0. Pour une formule F, $\ulcorner F \urcorner$ désigne le code de Gödel de la formule F. On utilise un ensemble récursif d'axiomes R^-, dont on rappelle qu'il vérifie que, toutes les formules Σ_1 vraies dans $\mathbb{N}$ sont prouvables dans R^-, et un ensemble récursif d'axiomes R qui contient R^- et le schéma d'axiomes :

$$\forall x(x \leqslant \underline{n} \vee \underline{n} \leqslant x) \quad \text{pour chaque entier } n\ .$$

Une théorie T est dite Σ-*cohérente* si toutes les formules Σ démontrables dans T sont vraies dans $\mathbb{N}$.

Exercice 1 (représentabilité). On rappelle qu'un ensemble $A \subset N^p$ est *faiblement représentable* dans une théorie T signifie qu'il existe une formule F ayant au plus p variables libres $x_1, \ldots, x_p$ telle que :

$$(n_1, \ldots, n_p) \in A \text{ ssi } \vdash_T F[\underline{n_1}/x_1, \ldots, \underline{n_p}/x_p]$$

et qu'un ensemble $A \subset N^p$ est *représentable* dans une théorie T signifie qu'il existe une formule F ayant au plus p variables libres $x_1, \ldots, x_p$ telle que :

si $(n_1, \ldots, n_p) \in A$ alors $\vdash_T F[\underline{n_1}/x_1, \ldots, \underline{n_p}/x_p]$
si $(n_1, \ldots, n_p) \notin A$ alors $\vdash_T \neg F[\underline{n_1}/x_1, \ldots, \underline{n_p}/x_p]$

1. Soit T une théorie récursive Σ_1-cohérente qui étend R^-. Montrer que $A \subset N^p$ est récursivement énumérable si et seulement s'il est faiblement représentable dans T, et que de plus la formule qui représente A peut être choisie Σ_1.
2. Soit T une théorie récursive cohérente qui étend R. Montrer que $A \subset N^p$ est récursif si et seulement s'il est représentable dans T, et que de plus la formule qui représente A peut être choisie Σ_1 (Si A est définie par la formule Σ_1, $\exists x F$, et A^c par la formule Σ_1, $\exists x G$, on utilisera la formule $\exists x(F \wedge \forall y < x\ \neg G[y/x])$.

Exercice 2 (Théorème de Gödel). Soit T une théorie récursivement axiomatisable qui étend R^-.

1. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive r telle que :
$$r(\ulcorner F \urcorner, n) = \ulcorner F[\underline{n}/x_1] \urcorner$$
2. Soit $A[x_0]$ une formule à une seule variable libre x_0. Montrer que si S est une formule Σ_1 à deux variables libres qui définit la relation $n_0 = r(n_1, n_1)$ (justifiez son existence), la formule $D_A[x_1]$ définie par :
$$D_A := \forall x_0(S[x_0, x_1] \rightarrow A[x_0])$$
vérifie :
$$\vdash_T D_A[\underline{n}/x_1] \rightarrow A[\underline{r(n,n)}/x_0]$$
3. Montrer qu'il existe Pr_T une formule Σ_1 à une variable libre x_0 telle que pour toute formule close F :
$$\mathbb{N} \models Pr_T[\ulcorner F \urcorner/x_0] \text{ ssi } \vdash_T F$$
4. **Théorème de Gödel.** On suppose T que étend R^-. On pose $\Delta = D_A$ (question **2**) pour $A = \neg Pr_T$. La formule $\Delta[\ulcorner F \urcorner/x_1]$ peut se paraphraser par « la formule F appliquée à son propre code n'est pas démontrable ». Montrer que la formule $G := \Delta[\ulcorner \Delta \urcorner/x_1]$ est Π_1 et que :
   - **a.** Si T est cohérente, G est vraie dans $\mathbb{N}$ mais n'est pas démontrable dans T ;
   - **b.** Si T est Σ-cohérente, $\neg G$ n'est pas démontrable dans T.

Exercice 3 (Représentation des fonctions récursives.). Soit f une fonction récursive totale. On suppose que G_f, le graphe de la fonction *totale* $f : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ est représenté dans R par la formule $\exists z\, A[x_1, \ldots, x_p, y, z]$ où A est Σ_0, on écrira dans la suite $A[\vec{x}, y, z]$. Posons $A'[\vec{x}, y, z] \equiv_d \exists t \leqslant z(A[\vec{x}, y, t] \wedge y \leqslant z)$.

1. Montrer que A' est une formule Σ_0 qui vérifie $\forall \vec{x}, y, z\ (A'[\vec{x}, y, z] \rightarrow y \leqslant z)$. Puis montrer que $\exists z\ A'[\vec{x}, y, z]$ représente G_f dans R c'est à dire :
   - **a.** si $m \neq f(\vec{n})$ alors $\vdash_R \neg\exists z\ A'[\underline{\vec{n}}, \underline{m}, z]$;
   - **b.** si $m = f(\vec{n})$ alors $\vdash_R \exists z\ A'[\underline{\vec{n}}, \underline{m}, z]$ (utiliser $\vdash_R \forall y(y \leqslant \underline{m} \vee \underline{m} \leqslant y)$).
2. Montrer que la formule $H[\vec{x}, y] := \exists z H_0[\vec{x}, y, z]$ avec :
$$H_0[\vec{x}, y, z] := \\ A'[\vec{x}, y, z] \wedge \forall z' \leqslant z \forall y' \leqslant z'(A'[\vec{x}, y', z'] \rightarrow y' = y)$$
est Σ_1 et représente la fonction f dans R au sens suivant :
$$\vdash_R \forall y \left(H[\underline{\vec{n}}, y] \leftrightarrow y = \underline{f(\vec{n})}\right) \qquad (*)$$
Indication. On pourra montrer successivement pour tout p-uplet d'entiers $\vec{n}$:
   - **a.** $\vdash_R H[\underline{\vec{n}}, \underline{f(n)}]$;
   - **b.** Il existe un entier d tel que $\vdash_R H_0[\underline{\vec{n}}, \underline{f(n)}, \underline{d}]$;
   - **c.** $\vdash_R \forall y(H[\underline{\vec{n}}, y] \rightarrow y = \underline{f(\vec{n})})$ (on utilisera le **b**, $\vdash_R \forall z(z \leqslant \underline{d} \vee \underline{d} \leqslant z)$ et la question **1**).

Remarque : on montre plus facilement l'existence d'une formule H vérifiant $(*)$ si on ne demande pas que H soit Σ_1.

Exercice 4 (Théorème de Gödel-Rosser). Soit T une théorie récursivement axiomatisable qui étend R. La fonction r est la fonction définie à l'exercice 2.

1. Montrer que pour toute formule A à une seule variable libre x_1, il existe une formule à une variable libre D_A,qui peut être choisie Π_1 si A est Π_1, telle que :
$$\vdash_T D_A[\underline{n}/x_1] \leftrightarrow A[\underline{r(n,n)}/x_0]$$
(s'inspirer de la première question de l'exercice 2 et utiliser le résultat de l'exercice 3).

2. Théorème de Gödel-Rosser. On suppose que T est cohérente. Montrer l'existence d'une formule G telle que $\nvdash_T G$ et $\nvdash_T \neg G$, et $\neg G$ est Σ. Indication : soit $Dem_T[x_2, x_0]$ une formule de l'arithmétique Σ_1 à deux variables qui représente dans T le prédicat récursif "n_2 est le code d'une preuve de la formule de code n_0", et $Dem_T^{\perp}$ une formule de l'arithmétique Σ_1 à deux variables qui représente la négation du précédent (justifier leurs existences). On utilisera pour la prouvabilité un prédicat qui appliqué au code d'une formule F donne :

$$\exists x_2(Dem_T[x_2, \ulcorner F \urcorner] \wedge \forall x_3 \leqslant x_2 Dem_T^{\perp}[x_3, \ulcorner \neg F \urcorner])$$

(« x_2 code une preuve de F et aucun x_3 plus petit que x_2 ne code une preuve de $\neg F$ »).

Exercice 5 (ω-cohérence). On rappelle qu'une théorie T est dite cohérente s'il n'existe pas de formule close A telle que $\vdash_T A$ et $\vdash_T \neg A$. Une théorie T dans le langage de l'arithmétique est dite *ω-cohérente* s'il n'existe pas de formule à une variable libre F telle que $\vdash_T \exists x F$ et pour tout entier n, $\vdash_T \neg F[\underline{n}/x]$. On suppose que T étend R.

1. Montrer que si T est ω-cohérente, alors T est cohérente.
2. Montrer que si T est cohérente et étend R^-, toutes les formules Π_1 prouvables dans T sont vraies dans $\mathbb{N}$.
3. Montrer que si T est ω-cohérente et étend R^-, toutes les formules Π_2 (en particulier les formules Σ_1) prouvables dans T sont vraies dans $\mathbb{N}$, et donc que T est Σ_1-cohérente.

L'énoncé original du théorème de Gödel était sous hypothèse d'ω-cohérence de la théorie (voir ex 2 question **4**).

Exercice 6 (ω-incomplétude). On reprend les notations de l'exercice 5. En particulier T est une théorie qui a pour conséquence R^- et qui est ω-cohérente.

1. Montrer que l'énoncé G défini à l'exercice 2, est équivalent dans R^- à un énoncé Π_1.
2. Montrer que G est vrai et non démontrable dans T (voir exercice 5).
3. Montrer qu'il existe une théorie cohérente, qui n'est pas ω-cohérente.
4. Une théorie dans le langage de l'arithmétique est ω-incomplète s'il existe une formule F à une variable libre x telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \vdash_T F[\underline{n}/x] \quad \text{mais} \quad \nvdash_T \forall x F$$
Montrer que T est ω-incomplète.
5. Soit F une formule Σ_0 telle que $G = \forall x_1 F$. Montrer que pour tout énoncé E dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n$, l'énoncé $E' = E \leftrightarrow F$ vérifie :
$$\mathbb{N} \models \forall x_1 \ldots x_n (E \leftrightarrow E')$$
$$\text{mais} \quad \nvdash_T \forall x_1 \ldots x_n (E \leftrightarrow E') .$$

Exercice 7. On désigne par $\mathcal{P}$ l'arithmétique de Peano. On rappelle qu'il existe une formule close Π_1, soit $\forall x A(x)$ où A est Σ_0, qui est vraie dans $\mathbb{N}$ et non démontrable dans $\mathcal{P}$. On rappelle également que toutes les formules Σ_1 vraies dans $\mathbb{N}$ sont démontrables dans $\mathcal{P}$.

1. Montrer que pour tout entier n, $A(\underline{n})$ est démontrable dans $\mathcal{P}$ (où $\underline{n}$ désigne le terme correspondant à n).
2. Montrer que $\exists x \forall y\, (A(x) \rightarrow A(y))$ est démontrable en calcul des prédicats.
3. En déduire qu'il existe une formule close Σ_2 de la forme $\exists x B(x)$ qui est démontrable dans $\mathcal{P}$, mais telle que $B(\underline{n})$ ne soit démontrable dans $\mathcal{P}$ pour aucun entier n.

Exercice 8. Le but de l'exercice est de fournir une autre démonstration du théorème de Gödel-Rosser en utilisant l'existence de deux ensembles récursivement inséparables. Deux ensembles disjoints E et F sont dits *récursivement inséparables* si et seulement s'il n'existe pas d'ensemble récursif X tel que $E \subset X$ et $F \subset X^{\mathbf{c}}$.

1. Soient A et B deux ensembles récursivement énumérables. On va montrer qu'il existe deux ensembles A' et B' tels que :
   – A' et B' sont récursivement énumérables ;
   –
   $$A \cup B = A' \cup B' \ ; \quad A' \cap B' = \emptyset \ ;$$
   $$A - B \subset A' \ ; \quad B - A \subset B' \ .$$
   a. Donner une solution rapide quand A et B sont tous deux récursifs.
   b. Dans le cas général, soient a un indice de A, b un indice de B. Montrer le résultat voulu en posant (T prédicat de terminaison) :
   $$A' = \{x \in A \ / \ \exists d \ [T(a,x,d) \wedge \forall u < d \ \neg T(b,x,u)]\}$$
   $$B' = \{x \in B \ / \ \exists d \ [T(b,x,d) \wedge \forall u \leqslant d \ \neg T(a,x,u)]\}$$

Désormais A et B sont les deux ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \in W_{\pi_2^1(x)}\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \in W_{\pi_2^2(x)}\} \ .$$

Les deux ensembles A' et B' associés à A et B sont définis comme à la question **1**.

2. **a.** Montrer que les deux ensembles A et B sont récursivement énumérables.
   b. Soient X un ensemble récursif, i son indice et j l'indice de son complémentaire (justifier l'existence de j). On pose $k = \alpha_2(j,i)$. Montrer que
   $$k \in A \cup B \quad \text{et} \quad k \notin A \cap B \ .$$
   c. Montrer que les deux ensembles A' et B' associés à A et B sont récursivement inséparables.
3. Soit Th une théorie cohérente qui a pour conséquence R. Soient ψ et ψ', deux formules du langage de l'arithmétique à 3 variables libres, ψ étant Σ_1, ψ' étant Π_1, qui représentent le prédicat T de Kleene (justifier leur existence).
   On pose :
   $$A'' = \{x \in A \ / \ \vdash_{Th} \exists d \ [\psi(\underline{a}, \underline{x}, d) \wedge \forall u < d \ \neg\psi'(\underline{b}, \underline{x}, d)]\}$$
   $$B'' = \{x \in B \ / \ \vdash_{Th} \exists t \ [\psi(\underline{b}, t, \underline{x}) \wedge \forall u \leqslant t \ \neg\psi'(\underline{a}, t, \underline{x})]\}$$
   a. Montrer que $A' \subset A''$.
   b. Montrer que $A'' \cap B' = \emptyset$.
   c. En déduire que toute théorie Th cohérente ayant R pour conséquence est indécidable.
   Remarque : la question **3.b** est plus difficile que les autres.