Feuille d'exercices : Corrigé n°2

Fonctions élémentaires au sens de Kalmar.

Définitions et notations.

Un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions ayant un nombre fini d'argument dans $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ (sous ensemble de $\cup_{p\in\mathbb{N}^*}\mathbb{N}^{\mathbb{N}^p}$) est dit *clos par opérations élémentaires* s'il satisfait les conditions suivantes :

– il contient les projections $p^i_k : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $p^i_k = \lambda x_1 \dots x_k.x_i$;

– il contient l'addition et la multiplication notées $+$ et $\times$ (ou $\cdot$) ; il contient δ la fonction caractéristique de l'égalité :

$$\delta(x,y) = \begin{array}{ll} 1 & \text{si x=y} \\ 0 & \text{sinon} \end{array}$$

– qui est clos par composition : si $h : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, et $g_1,\dots,g_p : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, alors la composée $h\circ(g_1,\dots,g_p) : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, est définie par :

$$h\circ(g_1,\dots,g_p)(x_1,\dots,x_n) = h(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_p(x_1,\dots,x_n)) \;;$$

– qui est clos par somme et produit bornés, si $f : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ alors Σf la somme bornée de f, et Πf le produit borné de f, toutes deux de $\mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par

$$\Sigma f(a_1,\dots,a_p,x) = \sum_{i=0}^{x} f(a_1,\dots,a_p,i) \quad \Pi f(a_1,\dots,a_p,x) = \prod_{i=0}^{x} f(a_1,\dots,a_p,i)$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ des *fonctions élémentaires* est le plus petit ensemble clos par opérations élémentaires. Les *prédicats élémentaires* et les *ensembles élémentaires* sont les prédicats sur $\mathbb{N}^p$ et les sous-ensembles de $\mathbb{N}^p$ dont la fonction caractéristique est élémentaire. La fonction caractéristique d'un prédicat P, respectivement d'un ensemble A est notée $\chi_{_P}$, respectivement $\chi_{_A}$.

On a vu en cours que l'ensemble des fonctions primitives récursives était clos par opérations élémentaires. Toutes les fonctions élémentaires sont donc primitives récursives (et tous les prédicats ou ensembles élémentaires primitifs récursifs). La réciproque est fausse : voir partie 2.

Justifiez les assertions suivantes.

1 Exemples de fonctions élémentaires, propriétés de clôtures.

1.1 Premiers exemples.

1.1.1. Les fonctions $\lambda x.1$, s la fonction successeur, et $\lambda x.0$ sont élémentaires.

Solution : $\lambda x.1 = \lambda x.\delta(p^1_1(x), p^1_1(x))$, $s(x) = p^1_1(x) + \lambda x.1(x)$, $\lambda x.0 = \lambda x.\delta(p^1_1(x), s(x))$.

1.1.2. Les fonctions constantes $\lambda x_1 \dots x_n.k$, où $k \in \mathbb{N}$ sont élémentaires.

Solution : Soit $n \geqslant 2$, on obtient la fonction constante à un argument égale à n en composant n fois la fonction successeur. On obtient ensuite les fonctions constantes à k arguments par composition avec par exemple p^k_1.

$$\lambda x.n = \underbrace{s\circ\dots\circ s}_{n}\circ\lambda x.0\ , \quad \lambda x_1\dots x_k.n = \lambda x.n \circ p^k_1$$

Les fonctions polynômes à coefficient dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires, en particulier les fonctions puissances $\lambda x.x^n$, $n \geqslant 2$.

Solution : L'ensembles des fonctions polynômes (à plusieurs variables) sur $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble contenant projections et fonctions constantes et clos par addition et multiplication ($f, g :\mapsto \lambda\vec{x}.f(\vec{x}) + G(\vec{x})$, $f, g :\mapsto \lambda\vec{x}.f(\vec{x}) \times G(\vec{x})$). Détaillons la construction pour les fonctions puissances. On a déjà $\lambda x.x = p^1_1$. On montre par récurrence que les fonctions puissance sont élémentaires :

$$\lambda x.x^{n+1} = \times \circ (\lambda x.x^n, \lambda x.x)$$

1.1.3. Les fonction de test $\overline{sg}$, et sg, sont élémentaires.

$$\overline{sg}(x) = \begin{array}{ll} 1 & \text{si x=0} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \qquad sg(x) = \begin{array}{ll} 0 & \text{si x=0} \\ 1 & \text{sinon} \end{array}$$

Solution : $\overline{sg}(x) = \lambda x.\delta(p^1_1(x), \lambda x.0(x))$, $sg = \overline{sg}\circ\overline{sg}$,

1.1.4. La fonction $\lambda a, x.a^x$ et donc les exponentielles de base $a \geqslant 2$, $\lambda x.a^x$ sont élémentaires.

Solution : On a

$$a^x = \prod_{i=0}^{x} (\overline{sg}(i) + a \times sg(i)) = \prod_{i=0}^{x} + \circ (\overline{sg} \circ p_2^2, \times \circ (p_2^1, sg \circ p_2^2))(a, x) .$$

1.1.5. L'ensemble des fonctions élémentaire est clos par définition par cas. Si P est un prédicat élémentaire d'arité n, si g et h sont des fonctions élémentaires de $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, alors la fonction f définie par :

$$\text{si } P(x_1, \ldots, x_n) \text{ alors } f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) \text{ sinon } f(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)$$

est élémentaire.

Solution :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \chi_P(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_n) + \overline{sg}\,(\chi_P(x_1, \ldots, x_n)) \cdot h(x_1, \ldots, x_n)$$

1.1.6. la fonction prédécesseur nulle en 0 est élémentaire :

$$\begin{aligned} pred(0) &= 0 \\ pred(x+1) &= x \end{aligned}$$

Solution : On pose $\overline{\delta}(x, y) = \overline{sg}(\delta(x, y))$:

$$pred(x) = \sum_{y \leqslant x} sg(y) \cdot \overline{\delta}(y, x)$$

1.2 Prédicats élémentaires.

1.2.1. Les prédicats $\leqslant$ et $<$ sont élémentaires.

Solution : Posons $\overline{\delta}(x, y) = \overline{sg}\delta(x, y)$.

$$\chi_<(x, y) = \prod_{i \leqslant x} \overline{\delta}(x, y); \quad \chi_\leqslant(x, y) = \chi_<(x, s(y))$$

1.2.2. La classe des prédicats élémentaires est close par opérations booléennes.

Solution : la classe des prédicats élémentaires est close par négation $\chi_{\neg A} = \overline{sg} \circ \chi_A$, et par conjonction, le prédicat $A[x_1, \ldots, x_p, y_1 \ldots, y_q] \wedge B[x'_1, \ldots, x'_{p'}, y_1 \ldots, y_q]$ a pour fonction caractéristique le produit des fonctions caractéristiques de A et de B :

$$\lambda x_1 \ldots x_p x'_1 \ldots x'_{p'} y_1 \ldots y_q . \chi_A(x_1, \ldots, x_p, y_1 \ldots, y_q) \times \chi_B(x'_1, \ldots, x'_{p'}, y_1 \ldots, y_q) .$$

1.2.3. La classe des prédicats élémentaires est close par quantifications bornées larges et strictes, c'est à dire que si $A(x_1, \ldots, x_p, y)$ est un prédicat élémentaire, alors $\exists y \leqslant x\ A(x_1, \ldots, x_p, y)$ et $\forall y \leqslant x\ A(x_1, \ldots, x_p, y)$, $\exists y < x\ A(x_1, \ldots, x_p, y)$ et $\forall y < x\ A(x_1, \ldots, x_p, y)$ sont des prédicats élémentaires.

Solution : Supposons que le prédicat $A(x_1, \ldots, x_p, y)$ est élémentaire. Alors :

$$\chi_{\exists y \leqslant x\, A}(x_1, \ldots, x_p, y) = sg\left(\sum_{y \leqslant x} \chi_A(x_1, \ldots, x_p, y)\right) \quad ; \quad \chi_{\forall y \leqslant x\, A} = \prod_{y \leqslant x} \chi_A(x_1, \ldots, x_p, y)$$

$$\chi_{\exists y < x\, A}(x_1, \ldots, x_p, y) = sg(y) \cdot \chi_{\exists y \leqslant pred(x)\, A}(x_1, \ldots, x_p, y)$$

$$\chi_{\forall y < x\, A}(x_1, \ldots, x_p, y) = sg(\overline{sg(y)} + \chi_{\forall y \leqslant pred(x)\, A}(x_1, \ldots, x_p, y))$$

1.3 Minimisation bornée.

1.3.1. La classe des fonctions élémentaires est close par le schéma de *minimisation bornée*, qui à une fonction caractéristique χ_F de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ associe la fonction $\mu t \leqslant x\, F$ de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{aligned} \mu t \leqslant x\, F(a_1, \ldots, a_p, t) &= \text{le plus petit entier } t \leqslant x \text{ tel que } F(a_1, \ldots, a_p, t) \quad \text{s'il existe,} \\ \mu t \leqslant x\, F(a_1, \ldots, a_p, t) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Solution : S'il n'y a qu'au plus un t vérifiant $F(a_1, \ldots, a_p, x)$ on a :

$$\mu t \leqslant x . F(a_1, \ldots, a_p, t) = \sum_{t \leqslant x} t \cdot \chi_F(a_1, \ldots, a_p, t)$$

Dans le cas général on est obligé de compliquer un peu :

$$\mu t \leqslant x\, F(a_1, \ldots, a_p, t) = \sum_{t \leqslant x} t \cdot \chi_F(a_1, \ldots, a_p, t) \cdot \prod_{i < t} \chi_F(a_1, \ldots, a_p, i)$$

1.3.2. Applications : la différence positive $\dot{-} : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{aligned} x \dot{-} y &= x - y \text{ si } x \leqslant y \\ x \dot{-} y &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

ainsi que le reste et le quotient de la division euclidienne de x par y sont des fonctions élémentaires.

Solution : On a

$$x \dot{-} y = \mu t \leqslant x\, [x + t = y] .$$

Appelons $q(x, d)$ le quotient de x par d et $r(x, d)$ son reste. On a :

$$q(x, d) = \mu t \leqslant x\, [t \cdot d \leqslant x] \ ; \quad r(x, d) = x \dot{-} q(x, d) \cdot d$$

1.4 Codage des couples, et des p-uplets.

1.4.1. La bijection de Cantor $\alpha_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, définie par :

$$\alpha_2(n,p) = \left(\sum_{i=0}^{n+p} i\right) + p = \frac{(n+p+1)(n+p)}{2} + p$$

est élémentaire ainsi que chaque composante de la réciproque π_1 et π_2.

Solution : La première forme est clairement élémentaire (somme bornée et composition). On utilise la minimisation bornée pour la réciproque :

$$\pi_1(c) = \mu n \leqslant c[\exists p \leqslant c\ \alpha_2(n,p) = c] \qquad \pi_2(c) = \mu p \leqslant c[\exists n \leqslant c\ \alpha_2(n,p) = c]$$

1.4.2. Pour chaque entier $k \geqslant 3$, la fonction, α_k définie par

$$\alpha_k(x_0,\dots,x_k) = \alpha_2(\alpha_{k-1}(x_0,\dots,x_{n-1}),x_k)$$

est une bijection élémentaire, les fonctions composantes de la réciproque π_i^k sont élémentaires.

Solution : Par récurrence sur $k \geqslant 2$.

$k = 2$: d'après la question précédente.

$k \mapsto k+1$: Pour tout entier u il existe un unique couple (u_1, x_{k+1}) tel que $u = \alpha_2(u_1, x_{k+1})$ car α_2 est bijective. Par hypothèse de récurrence il existe une unique k-uplet $(x_1,\dots,x_k)$ tel que $\alpha_k(x_1,\dots,x_k) = u_1$, donc un unique $(k+1)$-uplet $(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$ tel que $\alpha_{k+1}(x_1,\dots,x_{k+1}) = u$, et α_{k+1} est donc bijective.

Par composition et hypothèse de récurrence α_{k+1} est élémentaire. De même pour les π_i^k, on a

$$\pi_{k+1}^{k+1} = \pi_2 \qquad \text{pour } 1 \leqslant i < k\ \pi_i^{k+1} = \pi_i^k \circ \pi_1$$

fonctions qui sont donc élémentaires par composition et hypothèse de récurrence.

1.5 Nombres premiers.

1.5.1. Le prédicat de divisibilité « | » et le prédicat « être premier » sont élémentaires.

Solution :

$$x \mid y \text{ ssi } \exists q \leqslant y\ x \cdot q = y$$
$$p \text{ premier ssi } p \geqslant 2 \wedge \forall q \leqslant p(q \mid p \Rightarrow (q = 1 \vee q = p))$$

On montre maintenant que la fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à n associe le $n+1$-ième nombre premier est élémentaire.

1.5.2. On a $p(n+1) \leqslant \prod_{i=0}^{n} p(n) + 1$.

Solution : Le nombre $\prod_{i=0}^{n} p(n) + 1$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p(i)$ pour $i \leqslant n$ (sinon on aurait $p(i) \mid 1 = [(\prod_{i=0}^{n} p(n) + 1) - \prod_{i=0}^{n} p(n)]$). Soit q un diviseur premier de $\prod_{i=0}^{n} p(n) + 1$, on a bien

$$p(n+1) \leqslant q \leqslant \prod_{i=0}^{n} p(n) + 1$$

Par récurrence sur n, $p(n) \leqslant 2^{2^n}$ ([1]).

Solution :

$n = 0$: $(p(0) = 2 \leqslant 2^{2^0}$.

$0,\dots,n \mapsto n+1$: supposons $p(i) \leqslant 2^{2^i}$ pour $i \leqslant n$. D'après 1.5.2,

$$p(n+1) \leqslant \prod_{i=0}^{n} 2^{2^i} = 2^{\sum_{i=0}^{n} 2^i} = 2^{2^{n+1}-1} + 1 \leqslant 2^{2^{n+1}-1} + 2^{2^{n+1}-1} = 2^{2^{n+1}} .$$

1.5.3. La fonction π qui à n associe le nombre de nombres premiers plus petits ou égaux à n est élémentaire.

Solution : Soit χ_{premier} la fonction caractéristique du prédicat « être premier », dont on déduit du 1.5.1 qu'elle était élémentaire, on a :

$$\pi(n) = \sum_{i=0}^{n} \chi_{\text{premier}}(i) .$$

1.5.4. la fonction p est élémentaire.

Solution : La fonction $\lambda x.2^{2^x}$ est élémentaire par composition car $\lambda x.2^x$ est élémentaire (voir 1.1.4). D'après ce qui précède :

$$p(n) = \mu x \leqslant 2^{2^n}[x \text{ premier et } \pi(n) = n+1] .$$

[1] On peut montrer en fait que $p(n) \leqslant 2^{n+1}$, en utilisant que pour tout nombre $n \geqslant 1$, il existe un nombre premier p tel que $n < p \leqslant 2n$ (Théorème de Bertrand, conjecturé par ce dernier et démontré par Tchebychef en 1850).

1.6 Codage des suites finies.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies d'entiers. La suite vide est notée (). Soit $\Omega : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par :

$$\Omega() = 1 \quad \Omega(x_0, \dots, x_p) = p(0)^{1+x_0} . p(1)^{1+x_1} . \dots . p(p)^{1+x_p} = \prod_{i=0}^{p} p(i)^{1+x_i}$$

1.6.1. La fonction Ω est injective.

Solution : Remarquons que si la suite finie s est non vide $\Omega(s) \geqslant p(0) = 2 > \Omega() = 1$, et donc il suffit de vérifier l'injectivité pour les suites non vides. C'est une conséquence immédiate de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, comme on a ajouté 1 aux exposants, les seuls exposants à prendre en compte sont bien ceux non nuls.

1.6.2. L'image de Ω est un ensemble élémentaire.

Solution : Un entier n est dans l'image de Ω si, dès qu'il a un diviseur premier p, tous les nombres premiers plus petits que p divisent n :

$$n \in \mathrm{Im}\,\Omega \text{ ssi } \forall p \leqslant n[(p \text{ premier et } p \mid n) \Rightarrow \forall q \leqslant p(q \text{ premier } \Rightarrow q \mid n)]$$

et donc $\mathrm{Im}\,\Omega$ est élémentaire d'après les résultats de la partie 1.2.

1.6.3. la fonction $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à x associe la longueur de la suite codée par x si $x \in \mathrm{Im}\,\Omega$, 0 sinon, est élémentaire.

Solution :

$$l(x) = \chi_{\mathrm{Im}\,\Omega}(x) \cdot \pi(x) \ .$$

1.6.4. La fonction de «décodage» $\iota : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, définie ci-dessous est élémentaire.

$$\iota(i, x) = \begin{array}{ll} x_i & \text{si } x = \Omega(x_0, \dots, x_p) \text{ et } 0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{array}$$

Solution : On a vu que $\lambda ax.a^x$ est élémentaire (voir 1.1.4).

$$\iota(i, x) = \begin{array}{ll} \mu e \leqslant x[p(i)^e \not| x] \dot{-} 2 & \text{si } x \in \mathrm{Im}\,\Omega \text{ et } p(i) \mid x \\ 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1.7 Définition par récurrence bornée.

On verra dans la partie 2 que l'ensemble des fonctions élémentaires n'est pas clos par récurrence primitive. On a cependant des définitions par récurrence primitive admissibles à condition que la fonction obtenue soit bornée par une fonction élémentaire.

1.7.1. Si $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ et $b : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sont élémentaires, alors si la fonction f vérifie :

$$\begin{array}{l} f(a_1, \dots, a_p, 0) = g(a_1, \dots, a_p) \\ f(a_1, \dots, a_p, x+1) = h(a_1, \dots, a_p, x, f(a_1, \dots, a_p, x)) \\ f(a_1, \dots, a_p, x) \leqslant b(a_1, \dots, a_p, x) \end{array}$$

f est élémentaire (bien entendu il existe au plus une fonction vérifiant le schéma ci-dessus). Pour cela on définit une fonction qui code la suite des valeurs de f.

Solution : récurrence primitive bornée par b :

$$f(\vec{a}, x) = \mu t \leqslant b(\vec{a}) \left[\exists s \leqslant \prod_{i=0}^{x} p(i)^{b(\vec{a}, i)+1} \left(\iota(0, s) = g(\vec{a}) \text{ et } \forall i < x\, \iota(i+1, s) = h(\vec{a}, i, \iota(i, s) \text{ et } \iota(x, s) = t)\right)\right]$$

1.7.2. On peut de la même façon utiliser un schéma de récurrence sur la suite des valeurs borné. Si $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ et $b : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sont élémentaires, alors si la fonction f vérifie :

$$\begin{array}{l} f(a_1, \dots, a_n, 0) = g(a_1, \dots, a_n) \\ f(a_1, \dots, a_n, x+1) = h(a_1, \dots, a_n, x, \Omega(f(a_1, \dots, a_n, 0), \dots, f(a_1, \dots, a_n, x))) \\ f(a_1, \dots, a_n, x) \leqslant b(a_1, \dots, a_n, x) \end{array}$$

f est élémentaire.

Solution : récurrence sur la suite des valeurs bornée par b :

$$\begin{array}{l} F(\vec{a}, x) = \mu s \leqslant \prod_{i=0}^{x} p(i)^{b(\vec{a}, i)+1} \left[\iota(0, s) = 2^{g(\vec{a})} \text{ et } \forall i < x\, \iota(i+1, s) = h(\vec{a}, i, \prod_{j=0}^{i} p(j)^{1+\iota(j,s)}) \right] \\ f(\vec{a}, x) = \iota(x, F(\vec{a}, x)) \end{array}$$

1.7.3. Par conséquent l'ensemble des fonctions élémentaires et clos sous le schéma suivant. Si $g : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{n+k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $b : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sont élémentaires, et si $p_1, \dots, p_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sont des élémentaires et vérifient chacune :

$$\forall x \in \mathbb{N}\ p_i(x) \leqslant x$$

alors $f : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$, vérifiant :

$$\begin{array}{l} f(a_1, \dots, a_n, 0) = g(a_1, \dots, a_n) \\ f(a_1, \dots, a_n, x+1) = h\left(a_1, \dots, a_n, x, f(a_1, \dots, a_n, p_1(x)), \dots, f(a_1, \dots, a_n, p_k(x))\right) \\ f(a_1, \dots, a_n, x) \leqslant b(a_1, \dots, a_n, x) \end{array}$$

est élémentaire.

Solution : La fonction f est définie par récurrence sur la suite des valeurs bornée, en posant :

$$f(\vec{a}, x+1) = h(\ \vec{a}, x, \iota(p_1(x), \Omega(f(\vec{a},0),\ldots,f(\vec{a},x))),\ldots,\iota(p_k(x),\Omega(f(\vec{a},0),\ldots,f(\vec{a},x)))\ )$$

2 Une fonction primitive récursive non élémentaire.

On pose $exp(x) = 2^x$, et pour $k \in \mathbb{N}$, $exp^k = \underbrace{exp \circ \cdots \circ exp}_{k}$ ($exp^0(x) = x$), puis $E(x) = \underbrace{exp \circ \cdots \circ exp}_{x}(x)$.
On constate facilement que E, est théoriquement calculable (même si elle croit rapidement). Cette fonction est construite par diagonalisation à partir des fonctions (toutes élémentaires en fonction de x par composition) exp^k, $k \in \mathbb{N}$.

Cette fonction peut se définir en utilisant la fonction intermédiaire à deux arguments $B = \lambda xk.exp^k(x)$, qui se définit par récurrence primitive récursive :

$$\begin{aligned} B(x,0) &= x \qquad\qquad E(x) = B(x,x) \\ B(x,k+1) &= exp(B(x,k)) \end{aligned}$$

Les fonctions B et E sont donc primitives récursives. Nous n'avons pas montré la clôture de l'ensemble des fonctions élémentaires par récurrence primitive récursive en général, et il ne l'est effectivement pas comme le montre ce qui suit.
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow: \mathbb{N}$ *domine* une fonction $g : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ si f est supérieure à g à partir d'un certain rang, i.e.

$$\exists K \in \mathbb{N}\ \forall x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{N}\ g(x_1 \cdots x_p) \leqslant f(\sup(x_1, \cdots, x_p, K))$$

Soit $\mathcal{E}'$ l'ensemble des fonctions f dominée par l'une au moins des fonctions exp^k.

2.1. Les fonction exp^k sont croissantes.

Solution : La fonction $exp^0 = \lambda x.x$ et la fonction exp sont croissantes, par composition les fonction exp^k sont croissantes.

2.2. les fonctions $\lambda k.exp^k(x)$ sont croissantes ($x \in \mathbb{N}$ étant fixé).

Solution : La fonction exp vérifie $exp(x) = 2^x > x$ pour $x \in \mathbb{N}$, on a donc par croissance de exp^k, $exp^{k+1}(x) > exp^k(x)$.

2.3. $\mathcal{E}'$ contient les fonctions de base de la définition des fonctions élémentaires.

Solution : $p_i^k(x_1,\ldots,x_k) \leqslant \sup(x_1,\ldots,x_k)$ pour $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{N}$,
$x + y \leqslant 2\sup(x,y) \leqslant 2^{\sup(x,y)}$ pour $x, y \in \mathbb{N}$,
$x \times y \leqslant \sup(x,y)^2 \leqslant 2^{\sup(x,y,4)}$ pour $x, y \in \mathbb{N}$,
$\delta(x,y) \leqslant 1 \leqslant 2^{\sup(x,y)}$ pour $x, y \in \mathbb{N}$.

2.4. $\mathcal{E}'$ est clos par composition.

Solution : Supposons que pour $h : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, et et $g_1,\ldots,g_p : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, on ait des entiers $K, K_1,\ldots,K_p$, et $k, k_1,\ldots,k_p$ tels que (on note $\vec{x}$ pour $x_1,\ldots,x_n$) :

$$\begin{aligned} &g_1(\vec{x}) \leqslant exp^{k_1}(\sup(\vec{x}, K_1)) \\ &\vdots \\ &g_p(\vec{x}) \leqslant exp^{k_p}(\sup(\vec{x}, K_p)) \\ &h(y_1,\ldots,y_p) \leqslant exp^k(\sup(y_1,\ldots,y_p,K)) \end{aligned}$$

on a alors :

$$h(g_1(\vec{x}),\ldots,g_p(\vec{x})) \leqslant exp^k(\sup(exp^{k_1}(\sup(\vec{x},K_1)),\ldots,exp^{k_p}(\sup(\vec{x},K_p)),K))\ .$$

Les fonctions exp^k et les exp^{k_i} sont croissantes (2.0.1), donc, en posant $K_0 = \sup(K_1,\ldots,K_n,K)$:

$$h(g_1(\vec{x}),\ldots,g_p(\vec{x})) \leqslant exp^k(\sup(exp^{k_1}(\sup(\vec{x},K_0)),\ldots,exp^{k_p}(\sup(\vec{x},K_0)),K_0))\ .$$

La fonction $\lambda xk.exp^k(x)$ est croissante en k (2.0.2), donc, en posant $k_0 = \sup(k_1,\ldots,k_n)$ ($K_0 \leqslant exp^{k_0}K_0$) :

$$h(g_1(\vec{x}),\ldots,g_p(\vec{x})) \leqslant exp^k(exp^{k_0}(\sup(\vec{x},K_0))))$$

et en utilisant la croissance de exp^{k_0} :

$$h(g_1(\vec{x}),\ldots,g_p(\vec{x})) \leqslant exp^{k+k_0}(\sup(\vec{x},K_0))$$

c'est à dire que la fonction $h \circ (g_1,\ldots,g_p)$ est dominée par exp^{k+k_0}.

2.5. Par récurrence sur k, pour tout entier $x \geqslant 5$ on a $(x+1)\cdot exp^k(x) \leqslant exp^{k+1}(x)$.

Solution :

$k = 0$: Montrons $(x+1)\cdot x \leqslant 2^x$ pour $x \geqslant 5$ par récurrence sur x. On a $2^5 = 32 > 6\cdot 5 = 30$). Par ailleurs comme $x \geqslant 5 \geqslant 2$:

$$(x+2)(x+1) = x(x+1) + 2(x+1) \leqslant 2x(x+1)$$

Donc si $(x+1)x \leqslant 2^x$, $(x+2)(x+1) \leqslant 2^{x+1}$.

$k \mapsto k+1$: Supposons que pour $x \geqslant 5$, $(x+1)\cdot exp^k(x) \leqslant exp^{k+1}(x)$. On a donc $(x+1 \leqslant 2^x)$:

$$(x+1)\cdot exp^{k+1}(x) \leqslant 2^x \cdot exp^{k+1}(x) \leqslant 2^{x+exp^k(x)} \leqslant 2^{2\cdot exp^k(x)}$$

et comme $x \geqslant 5 > 2$ et par hypothèse de récurrence :

$$(x+1)\cdot exp^{k+1}(x) \leqslant 2^{x\cdot exp^k(x)} \leqslant 2^{exp^{k+1}(x)} = exp^{k+2}(x)$$

2.6. $\mathcal{E}'$ est clos par somme bornée.

Solution : Soit une fonction $f : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ et des entiers k et K tels que (on note $\vec{a}$ pour $a_1, \ldots, a_p$) :

$$f(\vec{a}, x) \leqslant exp^k(\sup(\vec{a}, x, K)) \ .$$

On a alors :

$$\sum_{i \leqslant x} f(\vec{a}, x) \leqslant \sum_{i \leqslant x} exp^k(\sup(\vec{a}, i, K))$$

et comme exp^k est croissante

$$\sum_{i \leqslant x} f(\vec{a}, x) \leqslant \sum_{i \leqslant x} exp^k(\sup(\vec{a}, x, K)) = (x+1)exp^k(\sup(\vec{a}, x, K))$$

on pose $K_0 = \sup(K, 5)$ et on utilise la question précédente :

$$\sum_{i \leqslant x} f(\vec{a}, x) \leqslant exp^{k+1}(\sup(\vec{a}, x, K_0)) \ .$$

La fonction f est donc dominée par exp^{k+1}.

2.7. Pour tout entier $x \geqslant 5$, pour tout entier $k \geqslant 1$, $[exp^k(x)]^{x+1} \leqslant exp^{k+1}(x)$ (en utilisant le 2.0.5).

Solution : On a vu au 2.0.5 que pour $x \geqslant 5$, $(x+1) \cdot exp^k(x) \leqslant exp^{k+1}(x)$. On en déduit que pour $k \in \mathbb{N}$

$$[exp^{k+1}(x)]^{x+1} = 2^{exp^k(x)\cdot(x+1)} \leqslant 2^{exp^{k+1}(x)} = exp^{k+2}(x)$$

ce qui donne bien le résultat cherché en prenant $k+1 \geqslant 1$ pour k.

2.8. $\mathcal{E}'$ est clos par produit borné.

Solution : Soit une fonction $f : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ et des entiers k et K tels que (on note $\vec{a}$ pour $a_1, \ldots, a_p$) :

$$f(\vec{a}, x) \leqslant exp^k(\sup(\vec{a}, x, K)) \ .$$

On utilise comme au 2.0.6 la croissance de exp^k, on a en posant $K_0 = \sup(K, 5)$:

$$\prod_{i \leqslant x} f(\vec{a}, x) \leqslant \prod_{i \leqslant x} exp^k(\sup(\vec{a}, i, K)) \leqslant \prod_{i \leqslant x} exp^k(\sup(\vec{a}, x, K_0)) = exp^k(\sup(\vec{a}, x, K_0))^{x+1}$$

On pose $k_0 = \sup(k, 1)$, on a d'après la question précédente

$$\prod_{i \leqslant x} f(\vec{a}, x) \leqslant exp^{k_0+1}(\sup(\vec{a}, x, K_0)) \ .$$

La fonction f est donc dominée par exp^{k_0+1}.

2.9. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions élémentaires, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$.

Solution : L'ensemble $\mathcal{E}'$ est clos sous les opérations élémentaires d'après les questions précédentes, il contient donc l'ensemble des fonctions élémentaires.

2.10. La fonction E domine toutes les fonctions élémentaires, donc n'est pas élémentaire.

Solution : On a vu que pour toute fonction élémentaire $f : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$, il existe des entiers K et k telle que pour tout $x_1, \ldots, x_p$:

$$f(x_1, \ldots, x_p) \leqslant exp^k(sup(x_1, \ldots, x_p, K))$$

mais la fonction $\lambda xk.exp^k(x)$ est croissante sur ses deux composantes (d'après 2.0.1 et 2.0.2) donc, en posant $K_0 = sup(k, K)$

$$f(x_1, \ldots, x_p) \leqslant exp^{sup(x_1, \ldots, x_p, K_0)}(sup(x_1, \ldots, x_p, K_0)) = E(sup(x_1, \ldots, x_p, K_0))$$

et donc E domine toutes les fonctions élémentaires. Si E était élémentaire, $\lambda x.E(x) + 1$ le serait également, mais ne peut être dominée par E. Donc E n'est pas élémentaire.

3 Une autre caractérisation des fonctions élémentaires.

On peut définir les fonctions élémentaires en utilisant le schéma de récurrence borné de la partie 1.7. Plus précisément on va montrer que l'ensemble des fonctions élémentaires $\mathcal{E}$ égale $\mathcal{E}''$ le plus petit sous-ensemble de $\cup_{p\in\mathbb{N}^*}\mathbb{N}^{\mathbb{N}^p}$ qui :

- Contient les projections p_n^i, la fonction nulle $\lambda x.0$, la fonction successeur s, l'addition $+$, la fonction exponentielle de base 2, $\lambda x.2^x$;
- est clos par composition ;
- est clos par récurrence bornée.

3.1 $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}$

On Utilise les résultats de la partie 1 pour montrer $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}$.

3.2 $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}''$

On montre successivement :

3.2.1. La multiplication est dans $\mathcal{E}''$;

Solution : par récurrence bornée :

$$\begin{array}{l} x\cdot 0 = 0 \\ x\cdot s(y) = x\cdot y + x \\ x\cdot y \leqslant 2^{x+y} \end{array}$$

3.2.2. La fonction $\lambda x.1$, les fonctions sg et $\overline{sg}$ sont dans $\mathcal{E}''$.

Solution : par composition pour $\lambda x.1$, par récurrence bornée pour sg et $\overline{sg}$:

$$\begin{array}{lll} \lambda x.1 = s\circ\lambda x.0 & sg(0)=0 & \overline{sg}(0)=1 \\ & sg(x+1)=1 & \overline{sg}(x+1)=0 \\ & sg(x)\leqslant 1 & \overline{sg}(x)\leqslant 1 \end{array}$$

3.2.3. Le prédécesseur, la différence positive, $\chi_\leqslant$, la fonction caractéristique de $\leqslant$, et δ, celle de l'égalité sont dans $\mathcal{E}''$.

Solution : par récurrence bornée pour le prédédesseur et la différence positive, par composition en utilisant les fonctions sg, s et $+$ pour $\chi_\leqslant$ et δ.

$$\begin{array}{lll} pred(0)=0 & x \dot{-} 0 = x & \chi_\leqslant(x,y) = sg(s(y)\dot{-} x) \\ pred(x+1)=x & x\dot{-}(y+1) = pred(x\dot{-} y) & \delta(x,y) = sg\ \ \chi_\leqslant(x,y)+\chi_\leqslant(y,x) \\ pred(x)\leqslant x & x\dot{-} y\leqslant x & \end{array}$$

3.2.4. Si $f : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ est élémentaire, la fonction f_M qui calcule le plus petit entier t pour lequel le maximum des valeurs de $f(\vec{a}, y)$ pour $0 \leqslant y \leqslant x$ est atteint est élémentaire.

Solution :

$$f_M(\vec{a},x) = \mu t\leqslant x.[\forall y\leqslant x\ f(\vec{a},y)\leqslant f_M(\vec{a},t)]$$

3.2.5. Si $f \in \mathcal{E}''$, alors $f_M \in \mathcal{E}''$.

Solution : Par récurrence bornée :

$$\begin{array}{ll} f_M(\vec{a},0)=0 & \\ f_M(\vec{a},x+1) & = \text{si } f(f_M(\vec{a},x))\leqslant f(\vec{a},x+1) \text{ alors } x+1 \text{ sinon } f_M(\vec{a},x) \\ & = \chi_\leqslant(f(f_M(\vec{a},x)), f(\vec{a},x+1))\cdot(x+1) + \overline{sg}(\chi_\leqslant(f(f_M(\vec{a},x)), f(\vec{a},x+1)))\cdot f_M(\vec{a},x) \\ f_M(\vec{a},x)\leqslant x & \end{array}$$

3.2.6. L'ensemble $\mathcal{E}''$ est clos par somme et produit bornés.

Solution : Par récurrence bornée, en utilisant que $\lambda x.(x+1)\cdot f(\vec{a}, f_M(\vec{a},x))$ est dans $\mathcal{E}''$ par composition pourla somme bornée, en utilisant que l'exponentielle est dans $\mathcal{E}''$ par récurrence bornée, et donc $\lambda x.f(\vec{a}, f_M(\vec{a},x))^{x+1}$ est dans $\mathcal{E}''$ par composition :

$$\begin{array}{lll} \sum_{i=0}^{0} f(\vec{a},i) = f(\vec{a},0) & x^0 = 1 & \prod_{i=0}^{0} f(\vec{a},i) = f(\vec{a},0) \\ \sum_{i=0}^{x+1} f(\vec{a},i) = \sum_{i=0}^{x} f(\vec{a},i) + f(\vec{a},x+1) & x^{y+1} = x^y\cdot x & \prod_{i=0}^{x+1} f(\vec{a},i) = \prod_{i=0}^{x} f(\vec{a},i) + f(\vec{a},x+1) \\ \sum_{i=0}^{x} f(\vec{a},i) \leqslant (x+1)\cdot f(\vec{a}, f_M(\vec{a},x)) & x^y \leqslant (2^x)^y) = 2^{x\cdot y} & \prod_{i=0}^{x} f(\vec{a},i) \leqslant f(\vec{a}, f_M(\vec{a},x))^{x+1} \end{array}$$

On a donc bien $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}''$ donc $\mathcal{E} = \mathcal{E}''$.