Feuille d'exercices n°2

Fonctions élémentaires au sens de Kalmar.

Définitions et notations.

Un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions ayant un nombre fini d'argument dans $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ (sous ensemble de $\cup_{p\in\mathbb{N}^*}\mathbb{N}^{\mathbb{N}^p}$) est dit *clos par opérations élémentaires* s'il satisfait les conditions suivantes :

- il contient les projections $p^i_k : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ ($1 \leqslant i \leqslant k$), $p^i_k = \lambda x_1 \dots x_k.x_i$;
- il contient l'addition et la multiplication notées $+$ et $\times$ (ou $\cdot$) ; il contient δ la fonction caractéristique de l'égalité :

$$\delta(x,y) = \begin{array}{ll} 1 & \text{si x=y} \\ 0 & \text{sinon} \end{array}$$

- qui est clos par composition : si $h : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, et $g_1,\dots,g_p : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, alors la composée $h\circ(g_1,\dots,g_p) : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, f définie par

$$h\circ(g_1,\dots,g_p)(x_1,\dots,x_n) = h(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_p(x_1,\dots,x_n))\ ;$$

- qui est clos par somme et produit bornés, si $f : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ alors Σf la somme bornée de f, et Πf le produit borné de f, toutes deux de $\mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par

$$\Sigma f(a_1,\dots,a_p,x) = \sum_{i=0}^{x} f(a_1,\dots,a_p,i) \quad \Pi f(a_1,\dots,a_p,x) = \prod_{i=0}^{x} f(a_1,\dots,a_p,i)$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ des *fonctions élémentaires* est le plus petit ensemble clos par opérations élémentaires. Les *prédicats élémentaires* et les *ensembles élémentaires* sont les prédicats sur $\mathbb{N}^p$ et les sous-ensembles de $\mathbb{N}^p$ dont la fonction caractéristique est élémentaire. La fonction caractéristique d'un prédicat P, respectivement d'un ensemble A est notée $\chi_{_P}$, respectivement $\chi_{_A}$.

On a vu en cours que l'ensemble des fonctions primitives récursives était clos par opérations élémentaires. Toutes les fonctions élémentaires sont donc primitives récursives (et tous les prédicats ou ensembles élémentaires primitifs récursifs). La réciproque est fausse : voir section 2

Justifiez les assertions des sections suivantes.

1 Exemples de fonctions élémentaires, propriétés de clôtures.

1.1 Premiers exemples.

1.1.1. Les fonctions $\lambda x.1$, s la fonction successeur, et $\lambda x.0$ sont élémentaires.

1.1.2. Les fonctions constantes $\lambda x_1 \dots x_n.k$, où $k \in \mathbb{N}$ sont élémentaires.
Les fonctions polynômes à coefficient dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires, en particulier les fonctions puissances $\lambda x.x^n$, $n \geqslant 2$.

1.1.3. Les fonction de test $\overline{sg}$, et sg, sont élémentaires.

$$\overline{sg}(x) = \begin{array}{ll} 1 & \text{si x=0} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \qquad sg(x) = \begin{array}{ll} 0 & \text{si x=0} \\ 1 & \text{sinon} \end{array}$$

1.1.4. La fonction $\lambda a,x.a^x$ et donc les exponentielles de base $a \geqslant 2$, $\lambda x.a^x$ sont élémentaires.

1.1.5. L'ensemble des fonctions élémentaire est clos par définition par cas. Si P est un prédicat élémentaire d'arité n, si g et h sont des fonctions élémentaires de $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, alors la fonction f définie par :

$$\text{si } P(x_1,\dots,x_n) \text{ alors } f(x_1,\dots,x_n) = g(x_1,\dots,x_n) \text{ sinon } f(x_1,\dots,x_n) = h(x_1,\dots,x_n)$$

est élémentaire.

1.1.6. la fonction prédécesseur nulle en 0 est élémentaire :

$$pred(0) = 0$$
$$pred(x+1) = x$$

1.2 Prédicats élémentaires.

1.2.1. Les prédicats $\leqslant$ et $<$ sont élémentaires.

1.2.2. La classe des prédicats élémentaires est close par opérations booléennes.

1.2.3. La classe des prédicats élémentaires est close par quantifications bornées larges et strictes, c'est à dire que si $A(x_1, \dots, x_p, y)$ est un prédicat élémentaire, alors $\exists y \leqslant x\ A(x_1, \dots, x_p, y)$ et $\forall y \leqslant x\ A(x_1, \dots, x_p, y)$, $\exists y < x\ A(x_1, \dots, x_p, y)$ et $\forall y < x\ A(x_1, \dots, x_p, y)$ sont des prédicats élémentaires.

1.3 Minimisation bornée.

1.3.1. La classe des fonctions élémentaires est close par le schéma de *minimisation bornée*, qui à une fonction caractéristique χ_F de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ associe la fonction $\mu t \leqslant x\, F$ de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{array}{ll} \mu t \leqslant x\, F(a_1, \dots, a_p, t) = \text{le plus petit entier } t \leqslant x \text{ tel que } F(a_1, \dots, a_p, t) & \text{s'il existe,} \\ \mu t \leqslant x\, F(a_1, \dots, a_p, t) = 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

1.3.2. Applications : la différence positive $\dot{-} : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{array}{l} x \dot{-} y = x - y \text{ si } x \leqslant y \\ x \dot{-} y = 0 \text{ sinon} \end{array}$$

ainsi que le reste et le quotient de la division euclidienne de x par y sont des fonctions élémentaires.

1.4 Codage des couples, et des p-uplets.

1.4.1. La bijection de Cantor $\alpha_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, définie par :

$$\alpha_2(n,p) = \left(\sum_{i=0}^{n+p} i\right) + p = \frac{(n+p+1)(n+p)}{2} + p$$

est élémentaire ainsi que chaque composante de la réciproque π_1 et π_2.

1.4.2. Pour chaque entier $k \geqslant 3$, la fonction, α_k définie par

$$\alpha_k(x_0, \dots, x_k) = \alpha_2(\alpha_{k-1}(x_0, \dots, x_{n-1}), x_k)$$

est une bijection élémentaire, les fonctions composantes de la réciproque π_i^k sont élémentaires.

1.5 Nombres premiers.

1.5.1. Le prédicat de divisibilité « | » et le prédicat « être premier » sont élémentaires.

On montre maintenant que la fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à n associe le $n+1$-ième nombre premier est élémentaire.

1.5.2. On a $p(n+1) \leqslant \prod_{i=0}^{n} p(n) + 1$. Par récurrence sur n, $p(n) \leqslant 2^{2^n}$ ([1]).

1.5.3. La fonction π qui à n associe le nombre de nombres premiers plus petits ou égaux à n est élémentaire.

1.5.4. la fonction p est élémentaire.

1.6 Codage des suites finies.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies d'entiers. La suite vide est notée (). Soit $\Omega : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par :

$$\Omega() = 1 \quad \Omega(x_0, \dots, x_p) = p(0)^{1+x_0}.p(1)^{1+x_1}.\cdots.p(p)^{1+x_p} = \prod_{i=0}^{p} p(i)^{1+x_i}$$

1.6.1. La fonction Ω est injective.

1.6.2. L'image de Ω est un ensemble élémentaire.

1.6.3. la fonction $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à x associe la longueur de la suite codée par x si $x \in \operatorname{Im}\Omega$, 0 sinon, est élémentaire.

1.6.4. La fonction de «décodage» $\iota : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, définie ci-dessous est élémentaire.

$$\begin{array}{rll} \iota(i,x) = & x_i & \text{si } x = \Omega(x_0, \dots, x_p) \text{ et } 0 \leqslant i \leqslant p \\ & 0 & \text{sinon} \end{array}$$

[1] On peut montrer en fait que $p(n) \leqslant 2^{n+1}$, en utilisant que pour tout nombre $n \geqslant 1$, il existe un nombre premier p tel que $n < p \leqslant 2n$ (Théorème de Bertrand, Tchebychef 1850).

1.7 Définition par récurrence bornée.

On verra à la section suivante que l'ensemble des fonctions élémentaires n'est pas clos par récurrence primitive. On a cependant des définitions par récurrence primitive admissibles à condition que la fonction obtenue soit bornée par une fonction élémentaire.

1.7.1. Si $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ et $b : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sont élémentaires, alors si la fonction f vérifie :

$$\begin{array}{l} f(a_1,\ldots,a_p,0) = g(a_1,\ldots,a_p) \\ f(a_1,\ldots,a_p,x+1) = h(a_1,\ldots,a_p,x,f(a_1,\ldots,a_p,x)) \\ f(a_1,\ldots,a_p,x) \leqslant b(a_1,\ldots,a_p,x) \end{array}$$

f est élémentaire (bien entendu il existe au plus une fonction vérifiant le schéma ci-dessus). Pour cela on définit une fonction qui code la suite des valeurs de f.

1.7.2. On peut de la même façon utiliser un schéma de récurrence sur la suite des valeurs borné. Si $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ et $b : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sont élémentaires, alors si la fonction f vérifie :

$$\begin{array}{l} f(a_1,\ldots,a_n,0) = g(a_1,\ldots,a_n) \\ f(a_1,\ldots,a_n,x+1) = h(a_1,\ldots,a_n,x,\Omega(f(a_1,\ldots,a_n,0),\ldots,f(a_1,\ldots,a_n,x))) \\ f(a_1,\ldots,a_n,x) \leqslant b(a_1,\ldots,a_n,x) \end{array}$$

f est élémentaire.

1.7.3. Par conséquent l'ensemble des fonctions élémentaires et clos sous le schéma suivant. Si $g : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{n+k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $b : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sont élémentaires, et si $p_1,\ldots,p_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sont des élémentaires et vérifient chacune :

$$\forall x \in \mathbb{N}\ p_i(x) \leqslant x$$

alors $f : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$, vérifiant :

$$\begin{array}{l} f(a_1,\ldots,a_n,0) = g(a_1,\ldots,a_n) \\ f(a_1,\ldots,a_n,x+1) = h\,(a_1,\ldots,a_n,x,f(a_1,\ldots,a_n,p_1(x)),\ldots,f(a_1,\ldots,a_n,p_k(x))) \\ f(a_1,\ldots,a_n,x) \leqslant b(a_1,\ldots,a_n,x) \end{array}$$

est élémentaire.

2 Une fonction primitive récursive non élémentaire.

On pose $exp(x) = 2^x$, et pour $k \in \mathbb{N}$, $exp^k = \underbrace{exp \circ \cdots \circ exp}_{k}$ ($exp^0(x) = x$), puis $E(x) = \underbrace{exp \circ \cdots \circ exp}_{x}(x)$.
On constate facilement que E, est théoriquement calculable (même si elle croit rapidement). Cette fonction est construite par diagonalisation à partir des fonctions (toutes élémentaires en fonction de x par composition) exp^k, $k \in \mathbb{N}$.

Cette fonction peut se définir en utilisant la fonction intermédiaire à deux arguments $B = \lambda xk.exp^k(x)$, qui se définit par récurrence primitive récursive :

$$\begin{array}{ll} B(x,0) = x & \qquad E(x) = B(x,x) \\ B(x,k+1) = exp(B(x,k)) & \end{array}$$

Les fonctions B et E sont donc primitives récursives. Nous n'avons pas montré la clôture de l'ensemble des fonctions élémentaires par récurrence primitive récursive en général, et il ne l'est effectivement pas comme le montre ce qui suit.
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow: \mathbb{N}$ *domine* une fonction $g : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ si f est supérieure à g à partir d'un certain rang, i.e.

$$\exists K \in \mathbb{N}\ \forall x_1,\cdots,x_p \in \mathbb{N}\ g(x_1\cdots x_p) \leqslant f(\sup(x_1,\cdots,x_p,K))$$

Soit $\mathcal{E}'$ l'ensemble des fonctions f dominée par l'une au moins des fonctions exp^k.

2.1. Les fonction exp^k sont croissantes.

2.2. les fonctions $\lambda k.exp^k(x)$ sont croissantes ($x \in \mathbb{N}$ étant fixé).

2.3. $\mathcal{E}'$ contient les fonctions de base de la définition des fonctions élémentaires.

2.4. $\mathcal{E}'$ est clos par composition.

2.5. Par récurrence sur k, pour tout entier $x \geqslant 5$ on a $(x+1)\cdot exp^k(x) \leqslant exp^{k+1}(x)$.

2.6. $\mathcal{E}'$ est clos par somme bornée.

2.7. Pour tout entier $x \geqslant 5$, pour tout entier $k \geqslant 1$, $[exp^k(x)]^{x+1} \leqslant exp^{k+1}(x)$ (en utilisant le **5**).

2.8. $\mathcal{E}'$ est clos par produit borné.

2.9. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions élémentaires, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$.

2.10. La fonction E domine toutes les fonctions élémentaires, donc n'est pas élémentaire.

3 Une autre caractérisation des fonctions élémentaires.

On peut définir les fonctions élémentaires en utilisant le schéma de récurrence borné de la section 1.7. Plus précisément on va montrer que l'ensemble des fonctions élémentaires $\mathcal{E}$ égale $\mathcal{E}''$ le plus petit sous-ensemble de $\cup_{p\in\mathbb{N}^*}\mathbb{N}^{\mathbb{N}^p}$ qui :

- Contient les projections p_n^i, la fonction nulle $\lambda x.0$, la fonction successeur s, l'addition $+$, la fonction exponentielle de base 2, $\lambda x.2^x$;
- est clos par composition ;
- est clos par récurrence bornée.

3.1 $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}$

On Utilise les résultats de la section 1 pour montrer $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}$.

3.2 $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}''$

On montre successivement :

3.2.1. La multiplication est dans $\mathcal{E}''$;

3.2.2. La fonction $\lambda x.1$, les fonctions sg et $\overline{sg}$ sont dans $\mathcal{E}''$.

3.2.3. Le prédécesseur, la différence positive, $\chi_{\leqslant}$, la fonction caractéristique de $\leqslant$, et δ, celle de l'égalité sont dans $\mathcal{E}''$.

3.2.4. Si $f : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ est élémentaire, la fonction f_M qui calcule le plus petit entier t pour lequel le maximum des valeurs de $f(\vec{a}, y)$ pour $0 \leqslant y \leqslant x$ est atteint est élémentaire.

3.2.5. Si $f \in \mathcal{E}''$, alors $f_M \in \mathcal{E}''$.

3.2.6. L'ensemble $\mathcal{E}''$ est clos par somme et produit bornés.

On a donc bien $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}''$ donc $\mathcal{E} = \mathcal{E}''$.