Feuille d'exercices n°3

(Fonction d'Ackermann)

Exercice 1. Soit une fonction $\psi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que l'ensemble $\{\lambda y.\psi(x,y) \;/\; x \in \mathbb{N}\}$ soit l'ensemble des fonctions primitives récursives à une variable.

Montrer par diagonalisation que cette fonction ne peut être primitive récursive, et que l'existence d'une telle fonction ψ qui soit calculable entraîne qu'il existe des fonctions calculables non primitives récursives.

L'existence d'une fonction ψ telle que ci-dessus et qui soit calculable est assez intuitif. La fonction ψ peut être vue comme une fonction d'évaluation de *définitions* de fonctions primitives récursives à un argument (définitions elles mêmes codées par des entiers). Il s'agit en quelque sorte d'écrire un compilateur pour le lanage de programmation que constitueraient les définitions de fonctions primitives récursives.

Cependant les codages à mettre en œuvre seraient assez lourds. On va montrer l'existence d'une fonction calculable, la fonction d'Ackermann, qui énumére non pas toutes les fonctions primitives récursives, mais une suite de fonctions primitives récursives, telle que toute fonction primitive récursive soit majorée par une fonction de cette suite. Le fait qu'elle est non primitive récursive suit de façon analogue par diagonalisation.

Exercice 2 (fonction d'Ackermann). La fonction d'Ackermann énumère une suite de fonctions telle que chacune est obtenue en itérant la précédente. Il y a plusieurs définitions possibles (la fonction originale avait 3 arguments, Rozsa Péter a donné une version a 2 arguments à laquelle celle ci-dessous est quasi-identique). Choisissons la fonction A de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{aligned}
&A(0,x) = x+2\\
&A(1,0) = 0\\
&A(n+2,0) = 1\\
&A(n+1,x+1) = A(n, A(n+1,x))
\end{aligned}$$

On définit $A_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ par $A_n(x) = A(n,x)$.

1. Vérifier qu'il existe bien une et une seule fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant les équations ci-dessus. Calculez explicitement les premières valeurs de A, par exemple $\{A(n,x) \;/\; 0 \le n \le 3,\ 0 \le x \le 3\}$, et donner un argument informel pour la calculabilité intutive de A.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x > 0\ A_{n+1}(x) = \underbrace{A_n \circ \cdots \circ A_n}_{x}(A_{n+1}(0))\,.$$

Exprimer à partir de fonctions usuelles les fonctions A_0, A_1 et A_2.

3. Montrer que chacune des fonctions A_n est récursive primitive, et donnez en une définition dont vous montrerez qu'elle utilise exactement n occurrences du schéma d'itération (cas particulier du schéma de récurrence voir feuille 1). On peut remarquer que les n schémas de récurrences sont imbriqués.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}^*\ A_n(x) > x$.

5. En déduire que pour tout n A_n est strictement croissante.

6. Déduire de la question **4** que, à partir de 2, A est croissante au sens large sur son premier argument, le second étant fixé :

$$\forall x \ge 2\ \forall n \in \mathbb{N}\ A(n,x) \le A(n+1,x)\,.$$

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *domine* une fonction $g : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ si f est supérieure à g à partir d'un certain rang, i.e.

$$\exists K \in \mathbb{N}\ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^p\ g(\vec{x}) \le f(\sup(\vec{x}, K))$$

On définit une suite $\mathcal{C}_n$ d'ensembles de fonctions primitives récursives tous clos par composition, les fonctions de $\mathcal{C}_n$ étant les fonctions qui utilisent des suites imbriquées d'au plus n schémas de récurrence primitive. En voici une définition par induction :

(i) $\mathcal{C}_0$ est la clôture par composition de l'ensemble des fonctions de bases : constantes, projections, et successeur ;

(ii) $\mathcal{C}_{n+1}$ est la clôture par composition de la réunion de $\mathcal{C}_n$ et des fonctions obtenues par une seule occurrence du schéma de récurrence primitive à partir des fonctions de $\mathcal{C}_n$.

Il est clair que $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}$ et que $\bigcup_{i=0}^{\infty} C_n$ égale l'ensemble des fonctions primitives récursives.
On pose pour k entier, $A_n^k = \underbrace{A_n \circ \cdots \circ A_n}_{k}$.

7. Montrer que : $\forall n,k \in \mathbb{N}\ A_n^k \in \mathcal{C}_n$

8. Montrer que $\forall n,k,x \in \mathbb{N}\ A_n^k(x) \le A_{n+1}(x+k)\,.$

9. Montrer par récurrence sur la définition de l'ensemble des fonctions primitives récursives que :

$$\text{si } f \in \mathcal{C}_n, \text{ alors } \exists k \in \mathbb{N}\ A_n^k \text{ domine } f\,.$$

10. Montrer que A_n^k est dominée par A_{n+1} (on pourra montrer que pour $y > 0$, $A_{n+1}(y) \ge 2y$, puis que pour $x > 2k$, $A_{n+1}(x-k) \ge x$).

11. En déduire que si $f \in \mathcal{C}_n$, alors A_{n+1} domine f.

12. Montrer que la fonction diagonale $\lambda n.A(n,n)$ domine toutes les fonctions primitives récursives. En déduire que ni cette fonction, ni la fonction d'Ackermann ne sont primitives récursives.

Remarque : on a défini à cette occasion une hiérarchie sur les fonctions primitives récursives suivant le niveau d'imbrication des schémas de récurrence et la suite de fonctions primitives récursives énumérée par la fonction d'Ackermann permet de montrer que la hiérarchie est stricte. Les fonctions élémentaires au sens de Kalmar (cf. feuille 2) correspondent au niveau 3 de la hiérarchie (exercice), on montre dans la feuille 2 que A_3 n'est pas élémentaire.