M2 – Cours fondamental 2 05-06
Logique

Examen du 4 janvier 2006

(durée: 3 heures)

Les notations utilisées (fonction d'énumération φ^n, prédicat T^n, ...) sont celles du cours.

Exercice 1 (récursivité). **1.** Rappeller brièvement pourquoi tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est récursif infini si et seulement s'il est l'image d'une fonction récursive strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

2. Montrer qu'il existe une fonction α récursive totale telle $\varphi_{\alpha(i)}$ est définie sur le plus grand segment initial de $\mathbb{N}$ sur lequel φ_i est strictement croissante, et égale à φ_i sur ce segment.

3. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale β telle que :

$$\operatorname{Im} \varphi_i = W_{\beta(i)} \ .$$

4. En déduire qu'il existe une fonction récursive totale γ telle que $\{W_{\gamma(i)} \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ est la classe de tous les sous-ensembles récursifs de $\mathbb{N}$.

5. L'ensemble des indices des sous-ensembles récursifs de $\mathbb{N}$ est-il récursivement énumérable ?

Exercice 2 (récursivité, réduction, hiérarchie arithmétique). On rappelle que $K = \{i \in \mathbb{N} \ / \ \varphi(i,i) \downarrow\}$ est Σ_1-complet, et que $C = \{i \in \mathbb{N} \ / \ \forall x \ \varphi_i(x) \downarrow\}$ est Π_2-complet. On définit pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_j = \{i \in \mathbb{N} \ / \ W_i \supset W_j\}$.

1. Montrer que pour tout j, A_j est Π_2. Montrer qu'il existe j tel que A_j ne soit pas Π_2 complet.

2. Montrer que, si W_j est non vide, K se réduit à A_j.

3. Montrer que, si W_j est fini non vide, A_j est Σ_1-complet.

4. Construire une fonction récursive totale β telle que si $W_i \neq \mathbb{N}$, $W_{\beta(i)}$ est fini, sinon $W_{\beta(i)} = \mathbb{N}$.

5. Montrer que, si W_j est infini, A_j est Π_2-complet.

Exercice 3 (arithmétique). Soit S une théorie arithmétique (les formules Σ vraies dans $\mathbb{N}$ sont démontrables dans S), récursivement axiomatisable, et Σ-*cohérente* (les formules Σ démontrables dans S sont vraies dans $\mathbb{N}$). Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe des machines (à registres) dont le calcul termine pour chaque entrée, mais dont l'arrêt n'est pas prouvable dans S. La syntaxe est supposée codée comme en cours. Les diverses fonctions de codages vues en cours sont supposées connues.

1. Montrer qu'il existe une formule Σ_1 du langage de l'arithmétique à 3 variables libres, soit $\mathcal{T}[x_1, x_2, x_3]$, telle que :

$$\vdash_S \mathcal{T}[\underline{i}/x_1, \ \underline{n}/x_2, \ \underline{d}/x_3] \text{ ssi } T^1(i,n,d) \ .$$

2. Montrer que la fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, qui à i associe le code de la formule $\forall x_2 \exists x_3\ \mathcal{T}[\underline{i}/x_1]$ est récursive totale.

3. Soit I, l'ensemble des indices de machines dont l'arrêt est prouvable dans S :

$$I = \{i \in \mathbb{N} \ / \ \vdash_S \forall x_2 \exists x_3\ \mathcal{T}[\underline{i}/x_1]\}\,.$$

Montrer que I est récursivement énumérable.

4. Montrer que les entiers de I sont tous des codes de fonctions récursives totales.

5. Montrer qu'il existe une machine qui termine pour chaque entrée mais dont l'arrêt n'est pas prouvable dans S.

6. Déduire de ce qui précède (sans utiliser le théorème de Gödel) l'existence d'un énoncé vrai dans $\mathbb{N}$ non prouvable dans S, et que cet énoncé peut être choisi Π_2.

7. Montrer qu'il existe un énoncé A une variable libre x telle que $\nvdash_S \forall x\ A$ et pour tout entier n, $\vdash_S A[\underline{n}/x]$.

Exercice 4 (complexité). On considère le problème du SAC A DOS en nombres entiers.

- Donnée : les entiers $c_1, c_2, ..., c_n$ et K.
- Question : existe-t-il des entiers $x_1, x_2, ..., x_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = K$?

1. A chaque instance $(c_1, c_2, \ldots, c_n; K)$ du problème du SAC A DOS en nombres entiers, on associe un graphe orienté $G(c_1, c_2, ..., c_n; K)$ défini par les ensembles de sommets E et d'arêtes R suivants :

- $E = \{0, 1, ..., K\}$.
- $R = \{(m, k) : 0 \leqslant m < k \leqslant K$ et il existe $1 \leqslant j \leqslant n$ tel que $k - m = c_j\}$.

Montrer qu'il existe un chemin de 0 à K dans le graphe $G(c_1, c_2, ..., c_n; K)$ si et seulement si l'instance $(c_1, c_2, ..., c_n; K)$ du problème du SAC A DOS possède une solution.

2. En déduire que le problème du SAC A DOS peut être résolu par un algorithme de complexité en temps $O(nK)$.

3. Le résultat précédent est-il en contradiction avec le fait que le problème du SAC A DOS soit $\mathcal{NP}$-complet (résultat que l'on admettra) ?