Problème : Corrigé n°1

extrait du partiel 2004

Exercice 1 (déduction).

1.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\neg C \vdash \neg C}\,\text{ax.} \qquad \Gamma', \neg A \vdash C
}{\Gamma', \neg C, \neg A \vdash \bot}\,\neg_e
}{\Gamma', \neg C \vdash \neg\neg A}\,\neg_i
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\neg C \vdash \neg C}\,\text{ax.} \qquad \Gamma, A \vdash C
}{\Gamma, \neg C, A \vdash \bot}\,\neg_e
}{\Gamma, \neg C \vdash \neg A}\,\neg_i
}{
\dfrac{\Gamma, \Gamma', \neg C \vdash \bot}{\Gamma, \Gamma' \vdash C}\,\bot_c
}\,\neg_e + \text{contr.}
$$

2. D'après la question précédente on peut également utiliser la règle de tiers exclu :

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\exists x\; B\,x \vdash \exists x\; B\,x}\,\text{ax.}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{B\,x_0, B\,y \vdash B\,x_0}\,\text{aff.} + \text{ax.}
}{B\,x_0 \vdash B\,y \to B\,x_0}\,\to_i
}{B\,x_0 \vdash \forall y(B\,y \to B\,x_0)}\,\forall_i
}{B\,x_0 \vdash \exists x \forall y(B\,y \to B\,x)}\,\exists_i
}{\exists x\; B\,x \vdash \exists x \forall y(B\,y \to B\,x)}\,\exists_e
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\neg\exists x\; B\,x \vdash \neg\exists x\; B\,x}\,\text{ax.}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{B\,y \vdash B\,y}\,\text{ax.}}{B\,y \vdash \exists x\; B\,x}\,\exists_i
}{\neg\exists x\; B\,x, B\,y \vdash \bot}\,\neg_e
}{\neg\exists x\; B\,x, B\,y \vdash B\,x_0}\,\bot_e
}{\neg\exists x\; B\,x \vdash B\,y \to B\,x_0}\,\to_i
}{\neg\exists x\; B\,x \vdash \forall y(B\,y \to B\,x_0)}\,\forall_i
}{\neg\exists x\; B\,x \vdash \exists x \forall y(B\,y \to B\,x)}\,\exists_i
}{\vdash \exists x \forall y(B\,y \to B\,x)}\,\text{tiers-exclu}
$$

Exercice 2 (Une autre définition des fonctions élémentaires).

1. On a $\lambda x, y.2^{x+y} \in \mathcal{E}'$ par composition donc :

$$
\begin{array}{ll}
x \cdot 0 = 0 & \\
x \cdot s(y) = x \cdot y + x & \\
x \cdot y \leqslant 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} & \quad \text{car pour } z \in \mathbb{N}\ z \leqslant 2^z
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{lll}
\lambda x.1 = s \circ \lambda x.0 & sg(0) = 0 & \overline{sg}(0) = 1 \\
 & sg(x+1) = 1 & \overline{sg}(x+1) = 0 \\
 & sg(x) \leqslant 1 & \overline{sg}(x) \leqslant 1
\end{array}
$$

3.

$$
\begin{array}{lll}
pred(0) = 0 & x \dot{-} 0 = x & \chi_{\leqslant}(x, y) = sg(s(y) \dot{-} x) \\
pred(x+1) = x & x \dot{-} (y+1) = pred(x \dot{-} y) & \delta(x, y) = \chi_{\leqslant}(x, y) \cdot \chi_{\leqslant}(y, x) \\
pred(x) \leqslant x & x \dot{-} y \leqslant x &
\end{array}
$$

4. La fonction $f_M(\vec{a}, t)$ suivante calcule le plus petit t pour lequel le maximum de $\{f(\vec{a}, y)\ /\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$ est atteint :

$$
\begin{array}{ll}
f_M(\vec{a}, 0) = 0 & \\
f_M(\vec{a}, x+1) & = \text{si } f(f_M(\vec{a}, x)) \leqslant f(\vec{a}, x+1) \text{ alors } x+1 \text{ sinon } f_M(\vec{a}, x) \\
 & = \chi_{\leqslant}(f(f_M(\vec{a}, x)), f(\vec{a}, x+1)) \cdot (x+1) + \overline{sg}(\chi_{\leqslant}(f(f_M(\vec{a}, x)), f(\vec{a}, x+1))) \cdot f_M(\vec{a}, x) \\
f_M(\vec{a}, x) \leqslant x &
\end{array}
$$

5. Si $f \in \mathcal{E}'$ alors par composition et d'après **1** et **4**, on a $\lambda x.[(x+1) \cdot f(\vec{a}, f_M(\vec{a}, x))] \in \mathcal{E}'$ donc :

$$
\begin{array}{l}
\sum_{i=0}^{0} f(\vec{a}, i) = f(\vec{a}, 0) \\
\sum_{i=0}^{x+1} f(\vec{a}, i) = \sum_{i=0}^{x} f(\vec{a}, i) + f(\vec{a}, x+1) \\
\sum_{i=0}^{x} f(\vec{a}, i) \leqslant (x+1) \cdot f(\vec{a}, f_M(\vec{a}, x))
\end{array}
$$

6. On remarque que par composition $\lambda x, y.2^{x \cdot y} \in \mathcal{E}'$ (**1**). On montre ensuite que $\mathcal{E}'$ contient la fonction d'exponentiation, que l'on utilise pour la définition par récurrence bornée du produit borné en utilisant **4** :

$$
\begin{array}{ll}
x^0 = 1 & \prod_{i=0}^{0} f(\vec{a}, i) = f(\vec{a}, 0) \\
x^{y+1} = x^y \cdot x & \prod_{i=0}^{x+1} f(\vec{a}, i) = \prod_{i=0}^{x} f(\vec{a}, i) + f(\vec{a}, x+1) \\
x^y \leqslant (2^x)^y) = 2^{x \cdot y} & \prod_{i=0}^{x} f(\vec{a}, i) \leqslant f(\vec{a}, f_M(\vec{a}, x))^{x+1}
\end{array}
$$

7. Comme $\mathcal{E}'$ contient les fonctions de base des fonctions élémentaires : projections, addition et fonction nulle par hypothèse, multiplication d'après la question **1** et fonction caractéristique de l'égalité d'après la question **3**, comme $\mathcal{E}'$ est clos par composition par hypothèse, par somme bornée d'après la question **5** et par produit borné d'après la question **6**, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, et donc d'après les résultats de la feuille 2 (voir préambule) $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$.