M2 – Cours fondamental 2 05-06
Logique

Problème n°1

extrait du partiel 2004

Exercice 1 (déduction). Dans la suite A et C désignent des formules quelconques d'un langage du premier ordre $\mathcal{L}$, Γ et Γ' désignent des contextes (suites finies non ordonnées de formules) de ce langage.

1. Dériver la règle du tiers exclu :

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma', \neg A \vdash C}{\Gamma, \Gamma' \vdash C}\ \text{tiers-exclu}$$

en déduction naturelle avec uniquement en plus des règles axiomes et structurelles, les règles de raisonnement par l'absurde et de la négation.

2. Dériver $\vdash \exists x \forall y (B\, y \to B\, x)$, où B est un prédicat unaire du langage $\mathcal{L}$, en déduction naturelle en utilisant uniquement en plus des règles axiomes et structurelles, les règles de raisonnement par l'absurde, de la négation, de l'implication et des quantificateurs.

Exercice 2 (Une autre définition des fonctions élémentaires). On rappelle que l'ensemble des fonctions élémentaires $\mathcal{E}$ est le plus petit sous-ensemble de $\cup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^p}$:

- contenant les projections $p_n^i : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, l'addition, la multiplication, et la fonction caractéristique de l'égalité δ ;
- clos par composition ;
- clos par somme et produit bornés.

Soit $\mathcal{E}'$ le plus petit sous-ensemble de $\cup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^p}$:

- contenant les projections p_n^i, la fonction nulle $\lambda x.0$, la fonction successeur s, l'addition $+$, la fonction exponentielle de base 2 $\lambda x.2^x$;
- clos par composition ;
- clos par récurrence bornée, c'est à dire que si $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ et $b : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sont dans $\mathcal{E}'$, alors une fonction f vérifiant :

$$\begin{array}{l} f(a_1, \ldots, a_p, 0) = g(a_1, \ldots, a_p) \\ f(a_1, \ldots, a_p, x+1) = h(a_1, \ldots, a_p, x, f(a_1, \ldots, a_p, x)) \\ f(a_1, \ldots, a_p, x) \leqslant b(a_1, \ldots, a_p, x) \end{array}$$

  est dans $\mathcal{E}'$ (il existe au plus une fonction vérifiant ce schéma).

Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{E}'$ est l'ensemble des fonctions élémentaires. On admettra que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ (conséquence immédiate des résultats des exercices de la feuille 2).

1. Montrez que la multiplication est dans $\mathcal{E}'$.

2. Montrez que la fonction $\lambda x.1$, la fonction signe sg et sa négation $\overline{sg}$ sont dans $\mathcal{E}'$.

3. Montrez que $pred$ la fonction prédécesseur, $\dot{-}$ la différence positive, $\chi_\leqslant$ la fonction caractéristique de $\leqslant$, et δ celle de l'égalité sont dans $\mathcal{E}'$.

4. Montrez que si $f : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ est dans $\mathcal{E}'$, on peut trouver une fonction $f_M : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ dans $\mathcal{E}'$, où $f_M(\vec{a}, x)$ est un entier t pour lequel $f(\vec{a}, t)$ est le maximum de $\{f(\vec{a}, y)\ /\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

5. Montrez que l'ensemble $\mathcal{E}'$ est clos par somme bornée.

6. Montrez que l'ensemble $\mathcal{E}'$ est clos par produit borné.

7. Conclure.