Examen partiel du 17 novembre 2005 : Corrigé

(durée: 3 heures)

Exercice 1. **1.** Par définition l'ensemble des fonctions primitives récursives contient les projections, la fonction nulle et la fonction successeur, et il est clos par composition. On sait que les fonctions α_2, π_2^1 et π_2^2 sont primitives récursives. D'autre part l'ensemble des fonctions primitives récursives est clos par itération. En effet si f est définie par itération sur g, on définit f par récurrence primitive récursive en posant :

$$\begin{aligned} &f(x,0) = p^1{}_1(x) \\ &f(x,n+1) = g(f(x,n)) = g(p^3{}_3(x,n,f(x,n))) \end{aligned}$$

L'ensemble des fonctions primitives récursives contient donc $\mathcal{C}$.

2. On montre les résultat par récurrence sur n pour $n \geqslant 2$. Pour $n = 2$ cela suit directement de la définition de $\mathcal{C}$. On déduit le résultat au rang n du résultat au rang $n+1$ par composition (en utilisant les projections) :

$$\alpha_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) = \alpha_2(\alpha_n(x_1,\dots,x_n),x_{n+1})\ ;\quad \pi_i^{n+1} = \pi_i^n \circ \pi_1^2 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n\ ;\quad \pi_{n+1}^{n+1} = \pi^2{}_2$$

3. Comme $\mathcal{C}$ contient les fonctions de base usuelle et qu'il est clos par composition, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est clos par récurrence primitive pour montrer que $\mathcal{C}$ contient l'ensemble des fonctions primitives récursives. Soit donc f définie à partir de g et h par récurrence primitive :

$$\begin{aligned} &f(a_1,\dots,a_p,0) = g(a_1,\dots,a_p) \\ &f(a_1,\dots,a_p,n+1) = h(a_1,\dots,a_p,n,f(a_1,\dots,a_p,n)) \end{aligned}$$

Soit F' définie par itération, à partir de la fonction

$$H(x) = \alpha_{p+2}\left(\pi_1^{p+2}(x),\dots,\pi_p^{p+2}(x),\pi_{p+1}^{p+2}(x)+1,h\left(\pi_1^{p+2}(x),\dots,\pi_{p+2}^{p+2}(x)\right)\right)\ .$$

Soit G la fonction définie par composition $G(a) = \alpha_{p+2}\left(\pi_1^p(a),\dots,\pi_p^p(a),0,g\left(\pi_1^p(a),\dots,\pi_p^p(a)\right)\right)$. On pose $F(a,n) = F'(G(a),n)$. On montre par récurrence que

$$F(a,n) = \alpha_{p+2}\left(\pi_1^{p+2}(a),\pi_p^{p+2}(a),n,f(\pi_1^p(a),\dots,\pi_p^p(a),n)\right)$$

$n = 0$ **:** par définition de G, sachant que $F'(x,0) = x$.

$n \mapsto n+1$ **:** on suppose le résulat pour n. Par définition de F', $F(a,n+1) = H(F'(G(a),n)) = H(F(a,n))$. Donc :

$$F(a,n{+}1) = \alpha_{p+2}\left(\pi_1^{p+2}(F(a,n)),\dots,\pi_p^{p+2}(F(a,n)),\pi_{p+1}^{p+2}(F(a,n))+1,h(\pi_1^{p+2}(F(a,n)),\dots,\pi_{p+2}^{p+2}(F(a,n))\right)$$

et par hypothèse de récurrence.

$$F(a,n+1) = \alpha_{p+2}\left(\pi_1^{p+2}(a),\dots,\pi_p^{p+2}(a),n+1,h\left(\pi_1^{p+2}(a),\dots,\pi_p^{p+2}(a),n,f(\pi_1^p(a),\dots,\pi_p^p(a),n)\right)\right)$$

D'où le résultat.

La fonction F est dans $\mathcal{C}$, donc la fonction f par composition : $f(a_1,\dots,a_k,n) = \pi_{p+2}^{p+2}(F(\alpha_p(a_1,\dots,a_p),n))$.
L'ensemble $\mathcal{C}$ est clos par récurrence primitive, il contient donc l'ensemble des fonctions récursives primitives, et d'après la question précédente, c'est l'ensemble des fonctions primitives récursives.

Exercice 2. Soit f une fonction (éventuellement partielle) vérifiant : W_i est fini $\Rightarrow f(i) = \mathsf{card}\, W_i$.

1. la fonction g définie par $g(x) = \mu t.[2x = x]$ est définie seulement en 0. La fonction ψ définie par $\psi(i,x) = \varphi(i,i).g(x)$ vérifie :

$$\begin{aligned} &\text{si } i \in K \text{ alors } \psi(i,x)\downarrow \text{ si et seulement si } x = 0 \\ &\text{si } i \notin K \text{ alors } \psi(i,x)\uparrow \text{ pour tout } x \end{aligned}$$

Soit e un indice de ψ, $\psi(i,x) = \varphi^2(e,i,x) = \varphi^1(s_1^1(e,i),x)$. On pose $\alpha(i) = s_1^1(e,i)$, et on a le résultat cherché.

2. Par construction de ψ, $\mathsf{card}\, W_{\alpha(i)} = 1$ si $i \in K$, $\mathsf{card}\, W_{\alpha(i)} = 0$ sinon. Par conséquent pour une telle fonction partielle f, $f \circ \alpha$ est la fonction caractéristique de K et ne peut donc être récursive. La fonction f ne peut donc être récursive.

Exercice 3. **1.** On pose $g(i) = \pi^1{}_2(\mu c\ [T^1(i,\pi_2^1(c),\pi^2{}_2(c))])$, $g(i)\downarrow$ dès que $W_i \neq \emptyset$, et on a bien $g(i) \in W_i$. On en déduit que la fonction h définie par :

$$h(i,x) = \mu t.[x = g(i)]$$

est récursive partielle, et vérifie que si $W_i \neq \emptyset$, il existe un unique x (qui est $g(i)$) tel que $h(i,x)\downarrow$, et $x \in W_i$. Sinon pour tout x $h(i,x)\uparrow$.
Soit k un indice de h, on pose $\gamma(i) = s^1{}_1(k,i)$. On a bien le résultat cherché.

2. Soit b un indice de la fonction f. Le prédicat $f(x)\downarrow \wedge \exists i \leqslant f(x) \varphi_{\gamma(i)}(y)\downarrow$ s'écrit

$$\exists a \exists i \leqslant a \exists d \exists d' [T^1(\gamma(i), y, d) \wedge T^1(b, x, d') \wedge U(d') = a].$$

La relation $[T^1(\gamma(i), y, d) \wedge T^1(b, x, d') \wedge U(d') = a]$ est récursive, par les quantifications existentielles et existentielles bornées indiquées, on obtient un prédicat dont l'extension est un sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbb{N}^2$ (b est vue comme constante). Donc il existe une fonction récursive partielle g telle que :

$$g(x,y)\downarrow \text{ ssi } f(x)\downarrow \wedge \exists i \leqslant f(x) \varphi_{\gamma(i)}(y)\downarrow \ .$$

Soit k un indice de g, en posant $\alpha(x) = s^1_1(k, x)$ on a donc :

$$\phi_{\alpha(x)}(y)\downarrow \text{ ssi } f(x)\downarrow \wedge \exists i \leqslant f(x) \varphi_{\gamma(i)}(y)\downarrow$$

donc si $f(x)\downarrow$, alors $W_{\alpha(x)} = \bigcup_{i \leqslant f(x)} W_{\gamma(i)}$.

3.

$$W_e \text{ récursif } \Rightarrow \left[f(e)\downarrow \wedge \exists j \leqslant f(e)\ W_j = W_e^{\mathbf{c}}\right] \qquad (*)$$

Supposons qu'une telle fonction f soit récursive partielle. On construit α comme à la question précédente. On applique le théorème du point fixe à la fonction α. On obtient un entier e tel que :

$$W_e = W_{\alpha(e)} = \bigcup_{i \leqslant f(e)} W_{\gamma(i)}$$

Comme le cardinal de chacun des $W_{\gamma(i)}$ est au plus 1, l'ensemble W_e est fini, donc récursif. Soit j un indice de $W_e^{\mathbf{c}}$. Si $j \leqslant f(e)$, on a $W_{\gamma(j)} \subset W_e \cap W_j$, donc $W_{\gamma(j)} = \emptyset$ donc $W_j = \emptyset$. Mais $W_e \neq \mathbb{N}$ (W_e fini). Donc forcément $j > f(e)$. Une fonction récursive partielle f ne peut donc vérifier la condition $(*)$.

Exercice 4. **1.**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F\to B \vdash F\to B}\,\text{ax.} \qquad \dfrac{}{F\vdash F}\,\text{ax.}}{F, F\to B \vdash B}\,\to_e}{F\vdash (F\to B)\to B}\,\to_i$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash ((B\to G)\to B)\to B}\,\textit{Peirce} \qquad \dfrac{\dfrac{(F\to G)\to B \vdash (F\to G)\to B \qquad \dfrac{\dfrac{B\to G\vdash B\to G \qquad \dfrac{F\to B\vdash F\to B \quad F\vdash F}{F\to B, F\vdash B}\,\to_e}{F\to B, B\to G, F\vdash G}\,\to_e}{F\to B, B\to G\vdash F\to G}\,\to_i}{(F\to G)\to B, F\to B, B\to G\vdash B}\,\to_e}{(F\to G)\to B, F\to B\vdash (B\to G)\to B}\,\to_i}{(F\to G)\to B, F\to B\vdash B}\,\to_e$$

On admettra sans démonstration que pour toute théorie Θ, pour toutes formules A et B,

$$\vdash_{\Theta\cup\{A\}} B \text{ si et seulement si } A \vdash_\Theta B \qquad (0)$$

2. **a.** Soit C une formule de $\mathcal{F}$, pour un certain i, $C = F_i$, et donc par définition de T_{i+1}, on a $C \in T_{i+1}$ ou $(C \to B) \in T_{i+1}$.

b. Montrons par récurrence sur n que $\nvdash_{T_n} B$. On en déduira par finitude que $\nvdash_{T^s} B$.

$n = 0$**.** Comme $T = T_0$, par hypothèse, $\nvdash_{T_0} B$.

$n \longrightarrow n+1$**.** On suppose que $\nvdash_{T_n} B$. On distingue deux cas suivant comment a été construit T_{n+1}.

$\vdash_{T_n} (F_n \to B)\to B$**.** Alors $T_{n+1} = T_n \cup \{F_n\}$. Si $\vdash_{T_{n+1}} B$, alors par (0) et introduction de l'implication, $\vdash_{T_n} F_n \to B$, donc par élimination de l'implication, $\vdash_{T_n} B$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. On a bien $\nvdash_{T_{n+1}} B$

$\nvdash_{T_n} (F_n \to B)\to B$**.** Alors $T_{n+1} = T_n \cup \{F_n \to B\}$, donc $\nvdash_{T_{n+1}} B$, sinon par (0) et introduction de l'implication, $\vdash_{T_n} (F_n \to B)\to B$.

c. Soit C une formule quelconque telle que $\vdash_{T^s} C$. On sait d'après **2.a** que $C \in T^s$ ou $(C \to B) \in T^s$. Or si $(C \to B) \in T^s$, comme $\vdash_{T^s} C$, $\vdash_{T^s} B$. Mais ceci est exclu d'après **2.b** : $C \in T^s$.

3. On montre le résultat par induction sur la construction des formules de $\mathcal{F}$. Le résultat suit directement de la définition de la valuation pour les constantes propositionnelles. Supposons maintenant le résultat pour F et G : $v(F) = 1$ ssi $F \in T^s$, $v(G) = 1$ ssi $G \in T^s$, et montrons le pour $F \to G$. Distinguons deux cas.

Soit $(F \to G) \in T^s$**.** Si $F \in T^s$ par élimination de l'implication et **2.c**, $G \in T^S$, donc $v(G) = 1$, donc $v(F \to G) = 1$. Si $F \notin T^s$, alors $v(F) = 0$ donc $v(F \to G) = 1$.

Soit $(F \to G) \notin T^s$**.** Forcément $G \notin T^s$, sinon par affaiblissement et introduction de l'implication, et **2.c** $(F \to G) \in T^s$. Donc $v(G) = 0$. Supposons que $F \notin T^s$. Alors $(F \to B) \in T^s$ (**2.a**). Par ailleurs $((F \to G) \to B) \in T^s$. On utilise alors la seconde assertion de la question **1** (qui utilise la loi de Peirce)), on obtient $\vdash_{T^s} B$ ce qui contredit **2.b**. Donc $F \in T^s$. Par hypothèse d'induction $v(F) = 1$, donc $v(F \to G) = 0$.

4. Par contraposée, si $\nvdash_T B$, alors d'après la question précédente, on construit une valuation v telle que pour toute formule A de T^s, donc de T, $v(A) = 1$, mais $v(B) = 0$ car $B \notin T^s$ (**2.b**).