M2 – Cours fondamental 2 05-06
Logique

Examen partiel du 17 novembre 2005

(durée: 3 heures)

Les notations utilisées (fonction d'énumération φ^n, prédicat T^n, ...) sont celles du cours.

Exercice 1. Pour cette exercice, on dit que $f : \mathbb{N}^2 \to N$ est définie par *itération* à partir de $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (il s'agit d'un schéma d'itération sans paramètres) quand :

$$f(x,n) = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n}(x) \quad (f(x,0) = x)$$

Soit $\mathcal{C}$ la plus petite classe des fonctions contenant les fonctions de base usuelles (projections, fonction nulle, fonction successeur), les fonctions de codage et de décodage des couples α_2, π_2^1 et π_2^2, clos par composition et par itération.

1. Montrer que toutes les fonctions de $\mathcal{C}$ sont primitives récursives.
2. Montrer que les fonctions de codage et de décodage des n-uplets, α_n, et les π_n^i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, sont dans $\mathcal{C}$.
3. Montrer que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions primitives récursives.

Exercice 2. Soit f une fonction (éventuellement partielle) vérifiant : W_i est fini $\Rightarrow$ $f(i) = \mathsf{card}\, W_i$. Le but de l'exercice est de montrer qu'une telle fonction partielle. ne peut être récursive.
On désigne par K l'ensemble de définition de la fonction $\lambda x \varphi(x,x)$ dont on rappelle qu'il n'est pas récursif.

1. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive α telle que :

   si $i \in K$ alors $\varphi_{\alpha(i)}$ est une fonction partielle définie seulement en 0
   si $i \notin K$ alors $\varphi_{\alpha(i)}$ n'est nulle part définie.

2. En déduire que f telle que définie ci-dessus ne peut être récursive.

Exercice 3. **1.** Montrer qu'il existe une fonction récursive partielle à un argument g telle que

$$W_i \neq \emptyset \Rightarrow g(i) \in W_i$$

puis en déduire qu'il existe une fonction récursive totale γ telle que :

$$W_{\gamma(i)} \subset W_i \text{ et } (W_i \neq \emptyset \Rightarrow \mathsf{card}\, W_{\gamma(i)} = 1) \ .$$

2. Soit f une fonction récursive partielle à un argument. Montrer l'existence d'une fonction récursive totale α telle que :

$$\text{si } f(x)\downarrow, \text{ alors } W_{\alpha(x)} = \bigcup_{i \leqslant f(x)} W_{\gamma(i)} \ .$$

3. Montrer que l'on ne peut pas borner récursivement en fonction de l'indice d'un ensemble récursif, la recherche d'un indice de son complémentaire, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonction récursive partielle f telle que (on note $X^{\mathbf{c}}$ le complémentaire dans $\mathbb{N}$ d'un sous-ensemble X de $\mathbb{N}$) :

$$W_e \text{ récursif } \Rightarrow \big[f(e)\downarrow \wedge \exists j \leqslant f(e)\ W_j = W_e^{\mathbf{c}}\big] \qquad (*)$$

Exercice 4 (complétude pour le calcul propositionnel purement implicationnel). On s'intéresse aux formules propositionnelles construites avec pour seul connecteur " $\to$ ", sur un ensemble dénombrable de constantes propositionnelles $\{p_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces formules. Dans la suite " formule " désigne une formule de $\mathcal{F}$. On veut démontrer que les règles d'introduction et d'élimination de la déduction naturelle pour l'implication, plus les règles structurelles et les règles axiomes, auxquelles on ajoute le schéma d'axiome :

$$\frac{}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A} \ \text{\scriptsize\textit{Loi de Peirce}}$$

forment un système complet pour les formules qui n'utilisent que "$\to$" pour connecteur. Dans la suite la suite $\Gamma \vdash_\Theta C$ signifie que C se déduit de Γ dans la théorie Θ *en utilisant uniquement ces règles.*

1. Démontrer *en utilisant uniquement ces règles* que pour toutes formules F, G et B :

$$F \vdash (F \to B) \to B \quad \text{et} \quad (F \to G) \to B, F \to B \vdash B$$

Indication pour la deuxième assertion, on peut utiliser l'instance suivante de la loi de Peirce : $((B \to G) \to B) \to B$.

On suppose donnée une énumération de toutes les formules de $\mathcal{F}$, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit T une théorie incluse dans $\mathcal{F}$ finie ou dénombrable, et B une formule de $\mathcal{F}$, telles que : $\not\vdash_T B$. On construit une suite de théories $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $\mathbb{N}$.

i. $T_0 = T$;

ii. Si $\vdash_{T_n} (F_n \to B) \to B$, alors $T_{n+1} = T_n \cup \{F_n\}$, sinon $T_{n+1} = T_n \cup \{F_n \to B\}$.

On pose $T^s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_n$ (en particulier $T \subset T^s$). On admettra sans démonstration que pour toute théorie Θ, pour toutes formules A et B,

$$\vdash_{\Theta\cup\{A\}} B \text{ si et seulement si } A \vdash_\Theta B \tag{0}$$

(induction immédiate sur la hauteur de la dérivation, en utilisant éventuellement contraction ou affaiblissement).

2. Montrer que :

a. pour toute formule C de $\mathcal{F}$, $C \in T^s$ ou $C \to B \in T^s$;

b. $\not\vdash_{T^s} B$;

c. pour toute formule C de $\mathcal{F}$, si $\vdash_{T^s} C$ alors $C \in T^s$.

Les questions suivantes sont hors barême, et seront peu notées. Il est fortement conseillé de ne les aborder que si toutes les autres questions ont été traitées.

3. La valuation v est définie sur les constantes propositionnelles $p \in \mathcal{P}$ par :

$$\text{si} \ \ p \in T^s \ \ \text{alors} \ \ v(p) = 1 \ \ \text{sinon} \ \ v(p) = 0 \ .$$

Montrer que pour toute formule propositionnelle C :

$$\text{si} \ \ C \in T^s \ \ \text{alors} \ \ v(C) = 1 \ \ \text{sinon} \ \ v(C) = 0 \ .$$

4. En déduire le théorème de complétude annoncé (pour le calcul propositionnel purement implicationnel) : quand pour toute valuation v telle que pour toute formule A de T $v(A) = 1$ on a $v(B) = 1$, alors $\vdash_T B$.