Feuille DM n°1

Une version faible des suites de Goodstein

La suite $(g_n(a))$ (une suite de Goodstein faible) est définie par récurrence à partir de $g_0(a) = a$. On a $g_{n+1}(a) = 0$ si $g_n(a) = 0$. Sinon on décompose $g_n(a)$ en base $n+2$, et on prend pour $g_{n+1}(a)$ le prédécesseur de l'entier de même décomposition en base $n+3$. Une définition précise est donnée ci-dessous. Le but de l'exercice est de montrer que quel que soit l'entier a, la suite $g_n(a)$ finit par s'annuler (elle croît pourtant très rapidement pour les premières valeurs de n).

L'ensemble des suites d'entiers naturels nulle à partir d'un certain rang est noté $\mathscr{S}$.On appelle *degré* d'une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{S}$, l'indice le plus élévé d'un terme non nul de la suite, et on le note $\deg((a_i)_{i\in\mathbb{N}})$. On notera simplement (a_i) la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

On rappelle l'existence et l'unicité de l'écriture en base k : étant donné un entier $k \geq 2$, pour tout entier $x \in \mathbb{N}$, il existe une et une seule suite $(a_i) \in \mathscr{S}$ telle que :

$$x = \sum_{i\geq 0} a_i k^i, \text{ avec pour tout } i, 0 \leq a_i < k .$$

La fonction $h : (\mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par cas :

— si $x = 0$, $h(k,0) = 0$

— Si $x > 0$, soit $(a_i) \in \mathscr{S}$ sa décomposition dans la base k, c'est-à-dire que si p est le degré de (a_i), $x = \sum_{i=0}^{p} a_i k^i$, alors :

$$h(k,x) = h\left(k, \sum_{i=0}^{p} a_i k^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{p} a_i (k+1)^i\right) - 1 .$$

On définit ensuite la fonction $g : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ par récurrence (on note $g_n(x)$ pour $g(n,x)$) :

$$g_0(x) = x ; \quad g_{n+1}(x) = h(n+2, g_n(x)) .$$

1. Vérifiez que h et g sont bien définies.

2. Calculer la suite $u_n = g_n(4)$ (vérifier que pour $n \geq 22$ $u_n = 0$).

3. On définit la relation notée $\prec$ sur l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers naturels :

$$(a_n) \prec (b_n) \text{ si et seulement si } \exists p \in \mathbb{N}\ (a_p < b_p \text{ et } \forall n > p\ a_n = b_n).$$

Montrer que l'on a bien défini un ordre strict, que l'ordre est partiel (non total) sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, mais que cet ordre est total sur l'ensemble $\mathscr{S}$ des suites d'entiers naturels nulles à partir d'un certain rang.

4. Montrer que pour (a_n), $(b_n) \in \mathscr{S}$,

$$\deg((a_n)) < \deg((b_n)) \Rightarrow (a_n) \prec (b_n) .$$

5. Montrer que l'ordre défini à la question précédente est un bon ordre sur $\mathscr{S}$.

6. On associe à l'entier $g_k(x)$ la suite (nulle à partir d'un certain rang) $G_k(x)$ des ses coefficients dans la base $k+2$: si $g_k(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (k+2)^i$, $G_k(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$. Montrer que si $G_k(x)$ n'est pas la suite nulle, $G_{k+1}(x) \prec G_k(x)$.

7. En déduire que pour tout x la suite $(g_n(x))$ est nulle à partir d'un certain rang. (*Remarque : si on calcule sur un ordinateur personnel les termes consécutifs de la suite $g_n(x)$ en utilisant la définition par récurrence, le temps de calcul devient à peu près rédhibitoire dès que $x = 8$*).