Feuille d'exercices n°1

Ensembles ordonnés

Définitions :

— Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est un ensembme non vide muni d'une relation d'ordre, c'est-à-dire une relation réflexive, transitive et antisymétrique :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in E\ x \leq x & \text{(réflexivité)} \\ \forall x, y, z \in E\ \left[(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z\right] & \text{(transitivité)} \\ \forall x, y \in E\ \left[(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y\right] & \text{(antisymétrie)} \end{array}$$

— Une relation d'ordre est total quand elle vérifie de plus

$$\forall x, y \in E\ (x \leq y \vee y \leq x) \quad \text{(totalité)}$$

— un *isomorphisme* entre deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ est une bijection ϕ de A dans B vérifiant :

$$\forall x,\ y \in A(x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y)\ .$$

— un *plongement* d'un ensemble ordonné $(A, \leq_A)$ dans un ensemble ordonné $(B, \leq_B)$ est une fonction ψ de A dans B vérifiant :

$$\forall x,\ y \in A(x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y)\ ,$$

une telle fonction est nécessairement injective et définit un isomorphisme entre $(A, \leq_A)$ et $(\psi(A), \leq_B)$.

Exercice 1. Dans un ensemble ordonné $(A, \leq)$, on dit que y est *successeur* de x, noté $x \prec y$, quand

$$x < y \text{ et } \forall z \in A\big(x \leq z \leq y \Rightarrow (z = x \text{ ou } z = y)\big)\ .$$

Montrer que si $(A, \leq)$ est fini, alors la relation $\leq$ est la *clôture transitive* de la relation « successeur », c'est-à-dire qu'étant donnés $x,\ y \in A$, si $x \leq y$, $x = y$, ou il existe une suite finie $x = x_0 \prec \cdots \prec x_n = y$ (pour $0 \leq i \leq n-1$, $x_i \prec x_{i+1}$, $x_0 = x$, $x_n = y$).

Exercice 2 (Diagramme de Hasse). Pour représenter un ordre fini, il suffit de représenter le graphe de la relation successeur associée d'après la question précédente. On représente habituellement ces graphes de façon que si $x < y$, y soit placé au dessus de x. Un tel graphe est appelé « diagramme de Hasse ».

Décrire à l'aide d'un graphe tous les ordres (à isomorphisme près) à 1, 2 et 3 éléments. En déduire tous les ordres à 4 éléments qui possède un plus petit élément.

Exercice 3. Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné. Montrer que l'ordre $\leq$ est total si et seulement la relation $\not\leq$ (n'est pas inférieur ou égal) est une relation d'ordre strict.

Exercice 4. Soient $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ deux ensembles ordonnés.

1. Montrer que si $(A, \leq)$ est totalement ordonné, toute injection (bijection) croissante de $(A, \leq)$ dans $(B, \leq)$ est un plongement (resp. isomorphisme) d'ordre.
2. Montrer que l'on peut trouver $(B, \leq_B)$ tel que la propriété ci-dessus est fausse dès que $(A, \leq)$ n'est pas totalement ordonné.
3. Montrer que le Théorème de *Cantor-Schröder-Bernstein* pour les ordres totaux est faux : Il existent deux ordres totaux $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ tels que A se plonge dans B, B se plonge dans A, mais A et B ne sont pas isomorphes.

Exercice 5 (Somme linéaire). Soient deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ supposés disjoints, il existe plusieurs façons de définir un ordre sur $A \cup B$ la réunion disjointe de A et B, la plus simple étant de prendre la réunion des deux relations d'ordre qui est encore un ordre.

La *somme linéaire (ou ordinale)* $(A, \leq_A) \oplus (B, \leq_B)$ est l'ensemble ordonné $(A \cup B, \leq_{A\cup B})$, qui prolonge les deux ordres sur A et sur B et place tous les élements de B après ceux de A

$$x \leq_{A\cup B} y \text{ ssi } (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in A \wedge x \leq_A y) \text{ ou } (x \in B \text{ et } y \in B \wedge x \leq_B y)$$

(quand A et B ne sont pas disjoints on peut toujours définir la somme disjointe en posant $A \uplus B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ et l'ordonner en adaptant la définition ci-dessus).

1. Montrer que si A et B sont totalement ordonnés leur somme linéaire l'est également.

2. Montrer que si A et B sont bien ordonnés leur somme linéaire l'est également.

Exercice 6. Soient $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$, $(A_3, \leq_3)$ et $(A_4, \leq_4)$ des ordres.

1. Montrer que si $(A_1, \leq_1)$ est ordre-isomorphe à $(A_3, \leq_3)$ et $(A_2, \leq_2)$ est ordre-isomorphe à $(A_4, \leq_4)$ alors $(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2)$ est ordre-isomorphe à $(A_3, \leq_3) \oplus (A_4, \leq_4)$.

2. Donner un example de deux ordres totaux $(A_1, \leq_1)$ et $(A_2, \leq_2)$ tels que

- **a.** $(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2)$ et $(A_2, \leq_2)$ sont ordre-isomorphes.
- **b.** $(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2)$ et $(A_1, \leq_1)$ sont ordre-isomorphes.
- **c.** $(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2)$ et $(A_2, \leq_2) \oplus (A_1, \leq_1)$ ne sont pas ordre-isomorphes.

Exercice 7 (Produit lexicographique). Il existe de même plusieurs façons de définir un ordre sur le produit cartésien de deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$. L'*ordre lexicographique* sur le produit $(A, \leq_A) \circ (B, \leq_B)$ est l'ordre $(A \times B, \leq_{A\times B})$ défini par

$$(x, y) \leq_{A\times B} (x', y') \text{ ssi } x <_A x' \text{ ou } x = x' \wedge y \leq_B y'$$

1. Montrer que si A et B sont totalement ordonnés l'ordre lexicographique sur le produit l'est également.

2. Montrer que si A et B sont bien ordonnés l'ordre lexicographique sur le produit l'est également.

Exercice 8. Soient $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$, $(A_3, \leq_3)$ et $(A_4, \leq_4)$ des ordres.

1. Montrer que si $(A_1, \leq_1)$ est ordre-isomorphe à $(A_3, \leq_3)$ et $(A_2, \leq_2)$ est ordre-isomorphe à $(A_4, \leq_4)$ alors $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ est ordre-isomorphe à $(A_3, \leq_3) \circ (A_4, \leq_4)$.

2. Donner un exemple de deux ordres totaux $(A_1, \leq_1)$ et $(A_2, \leq_2)$ tels que

- **a.** $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ et $(A_2, \leq_2)$ sont ordre-isomorphes.
- **b.** $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ et $(A_1, \leq_1)$ sont ordre-isomorphes.
- **c.** $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ et $(A_2, \leq_2) \circ (A_1, \leq_1)$ ne sont pas ordre-isomorphes.

3. Supposons que $(A_1, \leq_1)$ est un ordre total fini de cardinalité n. Montrer que le produit lexicographique $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ est ordre isomorphe à $\overbrace{(A_2, \leq_2) \oplus \cdots \oplus (A_2, \leq_2)}^{(n)}$.

Exercice 9. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, ordonnés par restriction de l'ordre usuel, lesquels sont des bons ordres ?

1. $\{-\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$;

2. $\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$;

3. $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$;

4. $\{0\} \cup \{-\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$;

5. $\{1 - \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2 - \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$;

6. $\{1\} \cup \{1 - \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1 + \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$;

7. $\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{p - \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrer que ceux qui sont des bons ordres se construisent par somme et produit à partir des bons ordres $(\mathbb{N}, \leq)$ et $\{1\}$.