Axiomes de la théorie de Zermelo

Cette axiomatisation de la théorie des ensembles a été donnée sous une forme un peu différente par Ernst Zermelo en 1908. Un peu étendue, elle a permis d'éclaircir des questions que se posaient des mathématiciens comme Georg Cantor à la fin du XIXesiècle et au début du XXe, puis de répondre à celles-ci. Elle permet, théoriquement, de formaliser les mathématiques usuelles, tout demeurant suffisamment simple pour fournir un outil qui a permis aux mathématiciens de démontrer des résultats à propos de la théorie, comme le résultat d'indépendance de l'axiome du choix énoncé à la fin de ce texte.
On suppose qu'il n'y a que des ensembles. Même si ce n'est pas précisé, les éléments d'un ensemble sont eux mêmes des ensembles. Les variables désignent toujours des ensembles. On les note parfois, pour tenter d'être plus lisible, avec des lettres différentes, minuscules, majuscules, scriptes (x, X, $\mathscr{X}$), mais il s'agit toujours d'ensemble. Quand on parle parfois d'objet, il s'agit encore d'ensemble (vu comme élément d'un autre ensemble).
La théorie des ensembles est une théorie de l'appartenance, elle s'énonce dans le langage de signature ($\in$), où $\in$, pour l'appartenance, est un symbole de relation binaire.
La relation d'inclusion, notée $\subseteq$, est définie par :

$$A \subseteq B \equiv \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) .$$

Axiome 1 (Axiome d'extensionnalité). Les ensembles A et B sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments, autrement dit

$$\forall A \forall B \, [A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \land B \subseteq A)] \; .$$

Axiome 2 (Schéma d'axiomes de compréhension restreinte). Pour toute propriété $P(x)$, exprimée dans le langage de la théorie des ensembles et comportant éventuellement d'autres variables libres que x, pour tout ensemble A il existe un ensemble B des éléments de A vérifiant la propriété P :

$$\forall A \exists B \, [x \in B \leftrightarrow (x \in A \land P(x))] \; .$$

Cet ensemble, unique par extensionnalité (dans un environnement pour les variables libres de P différentes de x), est noté $\{x \in A \mid P(x)\}$.
Il s'agit d'un *schéma* d'axiomes car il décrit une infinité d'axiomes, in pour chaque formule $P(x)$.

En calcul des prédicats du premier ordre une structure possède un domaine non vide. On peut donc définir par compréhension restreint $\{y \in x \mid y \neq y\}$ qui ne dépend pas de x, et donc poser

$$\emptyset = \{y \in x \mid y \neq y\} \qquad \text{(ensemble vide)}$$

Axiome 3 (Axiome de la paire). Pour tous ensembles a et b, il existe un ensemble C tel que les éléments de C sont a et b (non nécessairement distincts) :

$$\forall a \forall b \exists C \, [x \in C \leftrightarrow (x = a \lor x = b)]$$

Cet ensemble, unique par extensionnalité, est noté $\{a, b\}$.

Intersection. Si $\mathscr{A} \neq \emptyset$ on définit, par compréhension restreinte, l'intersection des éléments de $\mathscr{A}$, notée $\cap\mathscr{A}$. C'est l'ensemble, unique par extensionnalité, vérifiant

$$x \in \cap\mathscr{A} \leftrightarrow \big(\forall Y \in \mathscr{A} \;\, x \in Y\big) \; .$$

L'ensemble $\cap\{A, B\}$ est noté $A \cap B$.

Axiome 4 (Axiome de la réunion). Étant donné un ensemble $\mathscr{A}$, il existe un ensemble B dont les éléments sont les éléments des éléments de $\mathscr{A}$:

$$\forall \mathscr{A} \exists \mathscr{B} \big[x \in B \leftrightarrow \big(\exists Y \in \mathscr{A} \;\, x \in Y\big)\big].$$

Cet ensemble, unique par extensionnalité, est noté $\cup\mathscr{A}$. L'ensemble $\cup\{A, B\}$ est noté $A \cup B$.

Axiome 5 (Axiome de l'ensemble des parties). Pour tout ensemble A, il existe un ensemble $\mathscr{X}$ dont les éléments sont les sous-ensembles de A.

$$\forall A \exists \mathscr{X} \, (X \in \mathscr{X} \leftrightarrow X \subseteq A) \ .$$

Cet ensemble, unique par extensionnalité, est noté $\mathscr{P}(A)$.

Axiome 6 (Axiome de l'infini). Il existe un ensemble A auquel appartient $\emptyset$ et clos par $x \mapsto x \cup \{x\}$:

$$\exists A \, [\emptyset \in A \wedge \forall x (x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A)] \ .$$

L'intersection de tous les ensembles A vérifiant
— $\emptyset \in A$,
— si $x \in A$ alors $x \cup \{x\} \in A$,
est bien défini d'après l'axiome de l'infini (il existe au moins un tel ensemble), et les autres axiomes de la théorie des ensembles. C'est l'ensemble des entiers de von Neumann, qui représente l'ensemble des entiers naturels en théorie des ensembles. On le note $\mathbb{N}$. On note

$$0 = \emptyset \text{ et } s(x) = x \cup \{x\} \ .$$

Hors l'axiome d'extensionnalité, tous les axiomes énoncent l'existence d'un certain ensemble, en fonction de paramètres (ses éléments pour la paire etc.), qui s'avère être unique, sauf dans le cas de l'axiome de l'infini. Mais si on pense que c'est finalement $\mathbb{N}$ (le plus petit ensemble au sens de l'inclusion ayant les propriétés indiqués) on a également unicité dans ce cas. Ces axiomes énoncent tous (en l'arrangeant un peu pour l'axiome de l'infini) des cas particuliers de la compréhension : étant donné une propriété, il existe un ensemble qui est celui des objets ayant cette propriété. Mais un axiome de compréhension général serait contradictoire (paradoxe de Russell).
Bien que la signature du langage ne comporte que le symbole de relation $\in$, on étend celui-ci au fur et à mesure avec des notations que l'on peut considérer comme des abréviations, quand on une propriété d'existence et d'unicité. Par exemple dans le cas de la paire, on a, par l'axiome d'extensionnalité, les équivalences suivantes en théorie des ensembles :

$$\begin{aligned}
x \in \{u, v\} &\equiv x = u \vee x = v \\
y = \{u, v\} &\equiv \forall x (x \in y \leftrightarrow x = u \vee x = v) \\
\{u, v\} \in z &\equiv \exists y \left[y \in z \wedge \forall x (x \in y \leftrightarrow x = u \vee x = v) \right]
\end{aligned}$$

qui permettent de remplacer la nouvelle notation $\{u, v\}$ partout où elle apparait par une expression du langage de signature $(\in)$.

Proposition (Couples de Wiener-Kuratowski). À deux ensembles x et y, on associe un ensemble noté (x, y) (le couple x, y) défini par $(x, y) = \{\{x, y\}, \{x\}\}$, qui vérifie

$$(u, v) = (u', v') \equiv u = u' \wedge v = v' \ .$$

Un *graphe fonctionnel* est un ensemble G de couples vérifiant

$$\forall x, x', y \left[\big((x, y) \in G \wedge (x, y') \in G \big) \rightarrow y = y' \right] \ .$$

En théorie des ensembles, une fonction est souvent identifiée à son graphe, qui doit être un graphe fonctionnel, ce qui permet d'introduire la notation habituelle. Une fonction définie sur A est une fonction dont le graphe G vérifie

$$\forall x, y \big((x, y) \in G \rightarrow x \in A \big) \ .$$

Un axiome d'existence qui n'est pas un cas particulier de compréhension et n'assure aucunement l'unicité est l'*axiome du choix*.

Axiome 7 (Axiome du choix). Pour tout ensemble A, il existe une fonction f définie sur $\mathscr{P}(A)$, dite fonction de choix, qui à tout sous-ensemble non vide de A associe un élément de ce sous-ensemble, soit :

$$\forall A \exists f \left[\forall X \in \mathscr{P}(A) \big(X \neq \emptyset \rightarrow f(X) \in X \big) \right]$$

Cet axiome est indépendant des autres axiomes : on ne peut pas le démontrer avec les autres axiomes (résultat dû à Abraham Fraenkel en 1922, complété par des travaux ultérieurs d'Andrzej Mostowki, puis étendu par Paul Cohen en 1965), et on ne peut pas non plus le réfuter (Kurt Gödel 1940).