31HU03MI 13-14
Logique 24 mars 2015

Test – corrigé n°1

1. Les propriétés habituelles de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{N}$ sont supposées connues. L'exponentiation est définie par les égalité suivantes (récurrence avec paramètre) :

$$x^0 = 1 \quad \text{et} \quad x^{s(y)} = x^y \cdot x \ ,$$

montrer que $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$ (justifier soigneusement).

Solution : On démontre $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$ par récurrence sur z (pour un entier y fixé).

0 :

$$\begin{array}{rll} x^{y+0} & = x^y & \text{définition de l'addition} \\ & x^y \cdot 1 & \text{1neutre pour la multiplication} \\ & x^y \cdot x^0 & \text{définition de l'exponentielle} \end{array}$$

$y \to s(y)$ **:** hypothèse de récurrence $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$

$$\begin{array}{rll} x^{y+s(z)} & = x^{s(y+z)} & \text{définition de l'addition} \\ & = x^{y+z} \cdot x & \text{définition de l'exponentielle} \\ & = (x^y \cdot x^z) \cdot x & \text{hypothèse de récurrence} \\ & = x^y \cdot (x^z \cdot x) & \text{associativité de la multiplication} \\ & = x^y \cdot x^{s(z)} & \text{définition de l'exponentielle} \end{array}$$

2. On pose pour $n \in \mathbb{Z}$, $S_n = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \geq n\}$, $\mathbb{Z}^-$ est l'ensemble des entiers négatifs. On rappelle que l'inclusion sur un ensemble de parties est une relation d'ordre.
Indiquer si les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, munis de l'inclusion, sont bien ordonnés :

$$\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \{S_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \{\emptyset\} \cup \{S_n \ / \ n \in \mathbb{Z}^-\}$$

et justifier.

Solution : Un ensemble ordonné (cf. rappel) est bien ordonné si tous ses sous-ensembles *non vides* possèdent un plus petit élément.

a. Le sous-ensemble $\{S_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{A}$, ne possède pas de plus petit élément car $S_{n+1} \subsetneq S_n$, donc aucun S_n ne peut être le plus petit élément de ce sous-ensemble.
Par conséquent $(\mathcal{A}, \subset)$ n'est pas bien ordonné.

b. Montrons que $(\mathcal{B}, \subset)$ est bien ordonné. Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de $\mathcal{B}$ non vide. Deux cas sont possibles :

$\emptyset \in \mathcal{C}$ **:** L'ensemble vide est le plus petit élément de $\mathcal{C}$.

$\emptyset \notin \mathcal{C}$ **:** Alors $\mathcal{C} \subset \{S_n \ / \ n \in \mathbb{Z}^-\}$. Soit n_0 le plus élément de l'ensemble (non vide car $\mathcal{C}$ est non vide) $\{n \in \mathbb{N} \ / \ -n \in \mathcal{C}\}$. Alors S_{-n_0} est le plus petit élément de $\mathcal{C}$, car si $n_0 \leq n$, $S_{-n_0} \subset S_{-n}$ (si $n_0 \leq n$, $-n_0 \geq -n$, donc si $x \geq -n_0$, alors $x \geq -n$).

On a bien montré que tout sous-ensemble non vide $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ possède un plus petit élément.