Feuille d'exercices n°5

Cardinalité
Applications du lemme de Zorn

Cardinalité

Dans cette feuille d'exercices on appelle

- *ensemble dénombrable* un ensemble en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
- *ensemble infini* un ensemble dont un sous-ensemble est dénombrable.

Deux ensembles A et B qui sont en bjection sont dit *équipotents*, on note $A \sim B$. On dit aussi que *A et B ont même cardinal.*

Exercice 1. Trouver à chaque fois une fonction bijective :

1. de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$; de $\mathbb{N}$ dans $\{x \in \mathbb{N} \ / \ x \geq a\}$ pour un entier a donné ;
2. de $\mathbb{N}$ dans $\{x \in \mathbb{N} \ / \ \text{x est pair}\}$; de $\mathbb{N}$ dans $\{x \in \mathbb{N} \ / \ \text{x est impair}\}$; de $\mathbb{N}^*$ dans $\{x \in \mathbb{N} \ / \ \text{x est impair}\}$; de $\mathbb{Z}^{-*}$ dans $\mathbb{N}^*$; de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ (se servir de ce qui précède) ;
3. de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ puis de de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$; de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$;
4. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ (on peut par exemple se servir d'une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$) ;
5. de $\mathbb{R}^*$ dans $]0, +\infty[$ (se servir de questions précédentes), puis de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$, puis de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1[$.

Exercice 2. Montrer que si E est infini est A est une partie finie ou dénombrable de E telle que $E \smallsetminus A$ est infini, alors E a même cardinal que $E \smallsetminus A$ (indication : utiliser une partie dénombrable de $E \smallsetminus A$).

Exercice 3.

1. Rappeler pourquoi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$, ont même cardinal.
2. Montrer que l'ensemble de parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
3. En déduire que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ est de même cardinal que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (cf. exercice précédent).
4. En se servant de la numérotation binaire, établir une bijection entre $[0,1[$ est l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$.
5. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal.

Exercice 4. Utiliser le théorème de Cantor-Bernstein pour montrer que les ensembles suivants ont la puissance du continu, c'est-à-dire qu'ils ont même cardinal que $\mathbb{R}$.

1. Les ensembles $\mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. *Indication :* utiliser l'équipotence $\mathbb{R} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Indication :* utiliser l'équipotence $\mathbb{R} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
3. L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. L'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Qu'en est-il de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Exercice 5. On nomme C l'ensemble des fonctions croissantes (au sens large) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$f \in C \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in \mathbb{N} \ f(x) \leq f(x+1) \, .$$

1. Montrer que l'ensemble C est infini. On rappelle qu'un ensemble est infini si et seulement si il contient un sous-ensemble dénombrable, c'est à dire un sous-ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C indexée par n. Soit g la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$g(n) = 1 + (f_0(0) + \cdots + f_n(n)) \quad (\text{ ou encore } g(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} f_i(i)) \, .$$

2. Montrer que $g \in C$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $g \neq f_n$.
4. En déduire qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur C.

Exercice 6. Soit C l'ensemble des fonctions croissantes (au sens large) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Etablir une bijection entre C et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et en déduire que C a la puissance du continu (donc n'est pas dénombrable, par une autre méthode qu'à l'exercice précédent).

Applications du lemme de Zorn

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On rappelle que

— une *chaîne* de E un sous-ensemble totalement ordonné de $(E, \leq)$;

— *un majorant* d'un sous ensemble C de E est un élément a de E, supérieur ou égal à tous le éléments de C ; une *borne supérieure* de C est un majorant de C qui est inférieur ou égal à tous les majorants de C (le plus petit des majorant de C), si elle existe elle est unique ;

— un *élément maximal* de E est un élément m de E qui ne possède aucun majorant strict, $\forall x \in E\ (m \leq x \Rightarrow m = x)$;

— un *ensemble ordonné inductif* est un ensemble ordonné dont toute chaîne possède un majorant.

Lemme de Zorn. Tout ensemble inductif possède un élément maximal.

Pour appliquer le lemme de Zorn, il faut donc identifier l'ensemble ordonné dont un élément maximal permettra de conclure, et montrer que cet ensemble est inductif. Pour montrer qu'un ensemble est inductif, on décompose souvent en :

— montrer d'abord qu'il est non vide (la chaîne vide a donc un majorant) ;

— montrer ensuite qu'une chaîne non vide possède un majorant.

Dans beaucoup d'applications, une chaîne non vide de l'ensemble considéré possède une borne supérieure que l'on peut choisir comme majorant. Quand l'ensemble est ordonné par inclusion, ou une restriction de l'inclusion (ce qui arrive également dans beaucoup d'applications), la borne supérieure est la réunion des éléments de la chaîne.

Exercice 7 (Cardinalité). Le but est de montrer que pour tout ensemble A infini, $A \times \mathbb{N} \sim A$. On en déduit que pour deux ensembles A et B, si A est infini et $B \sim A$, alors $A \cup B \sim A$.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des graphes de bijections entre X et $X \times \mathbb{N}$, où X est une partie de A, ordonné par inclusion.

1. Montrer que $\mathcal{G} \neq \emptyset$.
2. Montrer que, si $\mathcal{C}$ est une chaîne non vide de $\mathcal{G}$, $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{G}$.
3. Montrer que si G_M est un élément maximal de $\mathcal{G}$, alors G est le graphe d'une bijection entre M et $M \times \mathbb{N}$ tel que $A \setminus M$ est un ensemble fini.
4. Conclure (utiliser le résultat de l'exercice 2).

On peut montrer qu'en fait, si A est infini, $A \times A \sim A$ (voir le polycopié de Jean-Louis Krivine) dont ce résultat se déduit, mais la démonstration par le lemme de Zorn est plus complexe.

Exercice 8 (théorème de Krull). Montrer que dans un anneau commutatif A, tout idéal I est inclus dans un idéal maximal.

Exercice 9 (théorème de la base incomplète). Soit E un espace vectoriel, L une famille libre de E (qui peut etre vide) et G une famille génératrice de E (qui peut être E). Montrer qu'il existe une base B de E qui complète L (L est une sous-famille de B) avec des éléments de G (indication : une base est un système libre maximal).

Exercice 10 (théorème de Zermelo). Montrer que tout ensemble E peut être bien ordonné (indication : soit l'ensemble $\mathcal{B}_E$ des $(A, \leq_A)$ où $A \subset E$ et $\leq_A$ est une relation de bon ordre sur A, trouver une relation d'ordre sur $\mathcal{B}_E$ qui permet de conclure par le lemme de Zorn).