Feuille d'exercices n°7

Théorie des ensembles

Exercice 1. La définition de (x, y), le couple (x, y), est celle du polycopié (couple de Wiener-Kuratowski), montrer qu'il vérifie bien la propriété fondamentale des couples

$$\forall a, b, c, d\,[(a, b) = (c, d) \to (a = c \wedge b = d)]$$

Vérifiez d'abord que pour des paires $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ d'éléments non nécessairement distincts on a bien :

$$\forall a, b, c, d\,[\{a, b\} = \{c, d\} \to ((a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c))]$$

Exercice 2. On suppose que $\mathbb{N}$ a été défini comme l'intersection de tous les ensembles A tel que $\emptyset \in A$ et si $x \in A$, alors $x \cup \{x\} \in A$ (entiers de von Neumann). Par définition, $\mathbb{N}$ vérifie la propriété de récurrence

$$\forall A\,[(\emptyset \in A \wedge \forall x(x \in A \to x \cup \{x\} \in A)) \to \mathbb{N} \subseteq A]$$

et comme $x \in x \cup \{x\}$, $x \cup \{x\} \neq \emptyset$ ce qui est l'un des axiomes de Peano. Le but de l'exercice est de démontrer l'injectivité sur $\mathbb{N}$ de $x \mapsto x \cup \{x\}$. Le principe est de démontrer que $\in_{\mathbb{N}}$, la relation $\in$ restreinte à $\mathbb{N}$ définit sur $\mathbb{N}$ un ordre strict total dont l'ordre large associé est $\subseteq_{\mathbb{N}}$, l'inclusion restreinte à $\mathbb{N}$, et que $x \mapsto x \cup \{x\}$ est strictement croissante sur $(\mathbb{N}, \subseteq_{\mathbb{N}})$.

1. montrer que tout élément d'un entier est un entier

$$\forall n \in \mathbb{N}\,\forall m\,(m \in n \to m \in \mathbb{N})\ .$$

2. Montrer la transitivité de $\in_{\mathbb{N}}$, soit (en exploitant la première question pour simplifier l'énoncé) :

$$\forall p \in \mathbb{N}\,\forall m\,\forall n\,[(m \in n \wedge n \in p) \to m \in p]$$

énoncé qui peut encore s'écrire $\forall p \in \mathbb{N}\,\forall n(n \in p \to n \subseteq p)$.

3. Montrer l'irréflexivité de $\in_{\mathbb{N}}$, soit $\forall n \in \mathbb{N}\ n \notin n$.

4. La relation $\in_{\mathbb{N}}$ définit un ordre strict sur $\mathbb{N}$ (transitive et irréflexive) d'après les deux questions précédentes. Montrer que l'ordre large associé est $\subseteq_{\mathbb{N}}$, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,\forall m\,[(m \subseteq n \leftrightarrow (m \in n \vee m = n)]\ .$$

5. L'ordre ainsi défini est total :

$$\forall m \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}\,(m \in n \vee m = n \vee n \in m)\ .$$

6. $x \mapsto x \cup \{x\}$ est strictement croissante sur $(\mathbb{N}, \subseteq_{\mathbb{N}})$, soit :

$$\forall m \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}\,(m \in n \to m \cup \{m\} \in n \cup \{n\})\ .$$

7. En déduire l'injectivité de $x \mapsto x \cup \{x\}$ sur $\mathbb{N}$.

8. Le principe de définition par récurrence a été démontré, dans un contexte ensembliste, pour toute structure $(N, 0, s)$ vérifiant les axiomes de Peano, et il est facile de voir que cette démonstration se fait dans la théorie de Zermelo.

En déduire qu'en théorie des ensembles, si $(N, 0, s)$ vérifie les axiomes de Peano (version second ordre, modulo la théorie des ensembles), alors $(N, 0, s)$ est isomorphe à $(\mathbb{N}, \emptyset, x \mapsto x \cup \{x\})$.

Remarque 1 : le dernier résultat montrer que deux structures vérifiant les axiomes de Peano sont isomorphes dans un même modèle (au sens de la logique du premier ordre) de la théorie des ensembles (on dit univers), mais les entiers de von Neumann de deux univers différents n'ont aucune raison d'être isomorphes.

Remarque 2 : ce résultat permet de montrer que, par exemple, si les entiers de Zermelo définis par $\emptyset$ et $x \mapsto \{x\}$ forment un ensemble, alors ils sont isomorphes aux entiers de von Neumann. On peut montrer que les entiers de Zermelo forment un ensemble dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (qui a un schéma d'axiomes supplémentaires), mais pas dans la théorie de Zermelo. Dans la théorie de Zermelo l'axiome de l'infini dépend du choix fait pour 0 et le successeur.