Feuille d'exercices n°5

Calcul des prédicats

Exercice 1. Soient $A(x)$ et $B(x)$ des formules qui ont toutes deux une seule variable libre.

1. Montrer pour tout connecteur $c \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

$$\forall x \exists y (A(x)\, c\, B(y)) \equiv \exists y \forall x (A(x)\, c\, B(y)) \ .$$

Donner à chaque fois une formule équivalente qui soit combinaison propositionnelle des formules A et B quantifiées.

2. Montrer que ce résultat est faux pour $c =\leftrightarrow$, et pour $c = \oplus$ la disjonction exclusive.

Exercice 2. Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Pour toute formule F de $\mathcal{L}$, on note $\exists! x F$ la formule :

$$\exists x (F \wedge \forall y (F[y/x] \rightarrow y = x))$$

Comment lit-on usuellement cette formule ? Préciser le cas où x n'apparaît pas libre dans F.

1. Soit le langage $\mathcal{L}$ comportant le symbole de prédicat binaire R. Les trois formules suivantes

$$\exists! x \exists! y Rxy \ ; \ \forall x \exists! y Rxy \ ; \ \exists! x \forall y Rxy \ .$$

sont elles satisfaites dans les structures $(\mathbb{N}, \leq)$ et $(\{0,1\}, \leq)$?

2. Montrer que pour une formule F dont les variables libres sont parmi x et y les formules $\exists! x \exists! y F$ et $\exists! y \exists! x F$ ne sont en général pas logiquement équivalentes.

3. Ecrire une formule signifiant « il existe un unique couple (x, y) tel que F », et comparer cette formule aux deux formules $\exists! x \exists! y F$ et $\exists! y \exists! x F$.

4. Ecrire une formule équivalente à la négation de $\exists! x F$, dont tous les quantificateurs sont en tête (forme dite prénexe).

Exercice 3. On considère le langage $L = \{0, 1, +, -, \cdot, \leq\}$ des corps ordonnés augmenté d'un symbole de prédicat unaire U, d'un symbole de prédicat binaire R, d'un symbole de fonctions f unaire, d'un symbole de constante a. On considère la L-structure $\mathcal{M}$ d'ensemble de base $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, les symboles $0, 1, +, -, \cdot, \leq$ sont interprétés de façon habituelle ; U est interprété par une partie X de $\mathbb{R}$, R par une partie G de R^2, f par une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ notée $\overline{f}$, a par un réel $\overline{a}$.

1. Ecrire à chaque fois une formule du premier ordre qui est satisfaite dans $\mathcal{M}$ si et seulement si :

- **a.** X est bornée ; $\overline{a}$ est adhérent à X ; X est fermée ; X est dense dans $\mathbb{R}$; X a un point d'accumulation ; X est fini.
- **b.** G est le graphe d'une fonction ; G est le graphe de f.
- **c.** f est continue en $\overline{a}$; f est continue ; X est l'image de f ; f prend un nombre fini de valeurs ;

2. On considère maintenant que U est interprété par l'appartenance au segment $[0, 1]$, R par $<$, f par : $x \mapsto x^2 + 1$. Décrire les sous-ensembles du plan correspondant aux formules :

$$Ux \ ; \ \ Ufx \ ; \ \ \exists x\, Ufx \ ; \ \ Rxfy \ ; \ \ \forall x\, Ryfx \ ; \ \ \forall x\, Rxfy \ ; \ \ \forall x\, Rxfx \ ; \ \ \forall y (Uy \rightarrow Rfyx)$$

(soit les ensembles de couples (a, b) vérifiant $\mathcal{M} \models F[x := a, y := b]$ en prenant pour F chacune de ces formules).

Exercice 4. Soit $\mathcal{L}$ le langage égalitaire de signature $(0, s, +)$ où 0 est un symbole de constante s un symbole de fonction unaire, + un symbole de fonction binaire.

Soit S l'ensemble de formules suivant :

A_1 $\forall x \forall y (sx = sy \rightarrow x = y)$;
A_2 $\forall x \ sx \neq 0$;
A_3 $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y \ x = sy)$;
A_4 $\forall x \ x + 0 = x$;
A_5 $\forall x \forall y \ x + sy = s(x + y)$;
A_6 $\forall x \forall y \forall z \ x + (y + z) = (x + y) + z$;

Bien-sûr $(\mathbb{N}, 0_{\mathbb{N}}, s_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}})$ est un modèle de S.

1. La structure $\mathcal{M}$ a pour ensemble de base $M = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z})$. La constante 0 est interprétée par $(0, 0)$, la fonction successeur par $(x, y) \mapsto (x, y{+}1)$ (vérifier que cette opération est stable sur M), l'addition par l'addition sur chacune des composantes du couple (vérifier que cette opération est stable sur M). Montrer que $\mathcal{M}$ est un modèle de S.

2. Trouver un énoncé du langage vrai dans $\mathbb{N}$ et faux dans $\mathcal{M}$ (indication : on peut commencer par exprimer des énoncés du langage $\mathcal{L}$ exprimant dans $\mathbb{N}$ qu'un nombre est pair, et qu'un nombre est impair et utiliser ces énoncés).

3. Le schéma de récurrence pour le langage $\mathcal{L}$ est constitué d'une infinité de formules et exprime la récurrence pour toute propriété exprimable dans le langage $\mathcal{L}$, soit pour toute formule $P(x, y_1, \ldots, y_k)$ n'ayant pas d'autres variables libres que $(x, y_1, \ldots, y_k)$ l'énoncé :

$$\forall y_1, \ldots, y_k \left([P(0, y_1, \ldots, y_k) \wedge \forall x \left(P(x, y_1, \ldots, y_k) \rightarrow P(sx, y_1, \ldots, y_k)\right)\right)] \rightarrow \forall x P(x, y_1, \ldots, y_k))$$

Montrer que $\mathcal{M}$ n'est pas modèle du schéma de récurrence (c'est-à-dire d'au moins un des énoncés du schéma).

4. Montrer que le modèle $\mathcal{M}$ ne peut s'enrichir dans le langage $\mathcal{L} \cup \{.\}$ en un modèle de S plus les axiomes définissant la multiplication :

$$\forall x \; x.0 = 0 \quad \forall x \forall y \; x.(sy) = x.y + x$$

(on pourra d'abord remarquer que ces axiomes auraient pour conséquence dans $\mathcal{M}$ que $(a, b).(m, r + p) = (a, b).(m, r) + (pa, pb)$).

Exercice 5. Soit $\mathcal{L}$ un langage comportant un symbole de relation binaire $\leq$, des symboles de fonction $+$ (à 2 places) et $-$ (à 1 place) et un symbole de constante 0. Dans la suite, nx est une abréviation pour le terme $x + x + ... + x$ (n fois) et $x < y$ pour la formule $(x \leq y \wedge \neg x = y)$. Un groupe abélien totalement ordonné est une structure $\mathcal{M} = (M, \leq, +, -, 0)$ qui satisfait un ensemble T de formules closes exprimant que :

- $(M, +, -, 0)$ est un groupe abélien dont l'élément neutre est 0 et $-$ la fonction qui à tout élément associe son opposé pour $+$;
- $(M, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné ;
- $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \forall z \; (x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z)$

1. Les structures suivantes sont-elles des groupes abéliens totalement ordonnés ?
   - **a.** $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \leq, +, -, 0)$ (le groupe additif ordonné usuel),
   - **b.** $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, \leq, +, -, 0)$ (le groupe additif ordonné usuel),
   - **c.** $\mathcal{R} = (\mathbb{R}^*, \leq, ., (\;)^{-1}, 1)$ (le groupe multiplicatif ordonné usuel).

2. Toute sous-structure d'un groupe abélien totalement ordonné est-elle un groupe abélien totalement ordonné ?

3. On considère les formules suivantes :
$F_1 : \forall x \forall y \; (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$
$F_2 : \forall y \; (0 < y \rightarrow \exists z (0 < z \wedge z < y))$
$F_3 : \forall x \; (0 \leq x \leftrightarrow -x \leq 0)$
$F_4 : \exists x \; (0 < x \wedge \forall y (0 < y \rightarrow x \leq y))$

   - **a.** Chacune des formules F_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ est-elle conséquence de T ?
   - **b.** Pour chacune des formules F_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, existe-t-il un modèle de $T \cup F_i$?
   - **c.** Montrer que la formule $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ est conséquence de T.

4. Montrer que pour tout entier $n > 0$, la formule $G_n : \forall x \; (0 \leq x \rightarrow x \leq nx)$ est conséquence de T.
En déduire que pour tout entier $n > 0$, la formule $H_n : \forall x \; (nx = 0 \rightarrow x = 0)$ est conséquence de T, ainsi que la formule $\forall x \exists y \; (\neg x = 0 \rightarrow x < y)$.

5. Déduire de la question précédente que les groupes abéliens suivants ne sont pas ordonnables, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ordre telle que la structure obtenue soit un modèle de T.
$(\mathbb{R}^*, ., ^{-1}, 1)$, $(\mathbb{C}^*, ., ^{-1}, 1)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, -, 0)$.