Feuille d'exercices n°3

Calcul propositionnel

Exercice 1. Le calcul propositionnel est défini sur un ensemble d'atomes $\mathcal{P}$. On rappelle qu'un littéral est soit un atome soit une négation d'atome.

1. Montrer que toute formule qui est une disjonction de littéraux comportant au moins un atome non nié, est équivalente à une formule qui n'utilise que les trois connecteurs $\wedge, \vee, \rightarrow$ (ni négation, ni absurde).

2. Soit v_1 la valuation constante égale à 1 sur tous les atomes de $\mathcal{P}$. Montrer que si $v_1(F) = 1$ et si F est sous forme normale conjonctive : $F = \bigwedge_{i=1}^{n} F_i$ avec $n \geq 1$ où les formules F_i sont des disjonctions de littéraux, alors chacune des disjonctions F_i comporte au moins un atome non nié.

3. Montrer que si $v_1(F) = 1$, F est équivalente à une formule écrite avec pour seuls connecteurs $\wedge, \vee, \rightarrow$ (ni négation ni absurde).

Exercice 2. Un système d'équations et d'inéquations booléennes $\mathcal{S}$ sur un ensemble de variables $\mathcal{P}$ s'écrit :

$$F_i = G_i \text{ pour i=1,...,k}$$
$$F_i \leq G_i \text{ pour i= k+1,...,h}$$

où les F_i, G_i, $i = 1, ..., h$, sont des formules propositionnelles sur $\mathcal{P}$. Un tel système a une solution s'il existe une valuation v telle que $\overline{v}(F_i) = \overline{v}(G_i)$ pour $i = 1, ..., k$ et $\overline{v}(F_i) \leq \overline{v}(G_i)$, pour $i = k+1, ..., h$.

1. Montrer que pour tout système d'équations et d'inéquations booléennes $\mathcal{S}$, il existe une formule propositionnelle H_S telle que : $\mathcal{S}$ a une solution si et seulement si H_S est satisfaisable.

2. Que faire lorsqu'on ajoute aussi des contraintes du type : $F_i < G_i$

Exercice 3. Une FND sur un ensemble $\mathcal{P}$ tel que $|\mathcal{P}| = n \in \mathbb{N}$

$$F = \bigvee_{k=1}^{m} \left(\bigwedge_{i \in A_k} x_i \wedge \bigwedge_{i \in B_k} \neg x_i \right) \text{ avec } A_k \cap B_k = \emptyset$$

est dite orthogonale si pour tout $k, l \in \{1, ..., m\}$ tels que $k \neq l$: $(A_k \cap B_l) \cup (A_l \cap B_k) \neq \emptyset$.

1. Montrer qu'une condition équivalente pour que la FND F soit orthogonale est que pour tous k et l vérifiant $1 \leq k < l \leq m$

$$\left(\bigwedge_{i \in A_k} x_i \wedge \bigwedge_{i \in B_k} \neg x_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in A_l} x_i \wedge \bigwedge_{i \in B_l} \neg x_i \right) \equiv \bot$$

(c'est-à-dire que les clauses conjonctives de la FND sont « orthogonales » deux à deux).

2. Donner un exemple de FND orthogonale avec au moins trois variables et trois conjonctions élémentaires.

3. Montrer que toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une FND orthogonale.

4. Combien y-a-t-il de valuations satisfaisant F ?

Exercice 4. Soit $C_1 = \bigwedge_{i \in A_1} x_i \wedge \bigwedge_{i \in B_1} \neg x_i$ et $C_2 = \bigwedge_{i \in A_2} x_i \wedge \bigwedge_{i \in B_2} \neg x_i$. Montrer que C_1 implique C_2 (i.e. que C_2 absorbe C_1) si et seulement si $A_2 \subseteq A_1$ et $B_2 \subseteq B_1$.

Exercice 5. On rappelle qu'un *impliquant* d'une formule propositionnelle F est une conjonction de littéraux qui a pour conséquence F, et qu'un *impliquant premier* de F est un impliquant de F n'ayant pour conséquence aucun autre impliquant de F (cf exercice 4).

Soit $C = \bigwedge_{i \in I} l_i$ où chaque l_i est un littéral et F une formule propositionnelle. On suppose que C est un impliquant de F. Montrer que C est un impliquant premier de F si et seulement si aucune des conjonctions $C_j = \bigwedge_{i \in I \setminus \{j\}} l_i$ n'est un impliquant de F.

Exercice 6. Soit $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_{2n-1}\}$ et $F = \bigwedge_{i=0}^{n-1} (x_{2i} \vee x_{2i+1})$.

1. Montrer que F peut être mise sous la forme FND suivante :

$$F = \bigvee_{\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \in \{0,1\}^n} C_\epsilon = \bigvee_{\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \in \{0,1\}^n} x_{\epsilon_1} \wedge x_{2+\epsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_{2(n-1)+\epsilon_n}$$

2. Montrer que chaque conjonction élémentaire C_ϵ, $\epsilon \in \{0,1\}^n$, est un impliquant premier de F.

3. Réciproquement, montrer que tout impliquant premier est de la forme C_ϵ, pour $\epsilon \in \{0,1\}^n$

4. En déduire que F n'a pas de FND contenant strictement moins de 2^n conjonctions élémentaires.