Feuille d'exercices n°2

Calcul propositionnel

Exercice 1. Le jeu du Sudoku consiste à compléter une grille 9×9 partiellement remplie par des chiffres de 1 à 9 avec les contraintes qui suivent.

1. Chaque case contient un et un seul chiffre
2. Les chiffres de 1 à 9 apparaissent sur chacune des lignes. Autrement dit, aucune ligne ne contient deux fois le même chiffre.
3. Les chiffres de 1 à 9 apparaissent sur chacune des colonnes. Autrement dit, aucune colonne ne contient deux fois le même chiffre.
4. Les chiffres de 1 à 9 apparaissent dans chacun des sous-carrés 3×3 qui subdivisent la grille. Autrement dit, aucun de ces carrés ne contient deux fois le même chiffre.

Modéliser les contraintes de ce jeu en calcul propositionnel.

Exercice 2. Déterminer la table de vérité de la formule suivante :

$$((\neg p \vee q \vee r) \rightarrow (p \wedge \neg q \wedge r))$$

Trouver une formule à deux variable équivalente à la précédente (la plus « simple » possible).

Exercice 3.

1. Combien y a t-il de valuations sur n variables propositionnelles ? Combien de tables de vérité ?
2. Trouver une formule à une variable correspondant à chaque table de vérité à une variable et n'utilisant que les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$.
   On prend dans la suite $n = 2$, les variables étant $\{p, q\}$.
3. Trouver pour chaque valuation v une formule propositionnelle F à deux variables n'utilisant que les connecteurs $\wedge$, $\neg$ et telle que v soit la seule valuation vérifiant $v(F) = 1$. Même question, pour F n'utilisant que les connecteurs $\vee$, $\neg$ et v la seule valuation vérifiant $v(F) = 0$.
4. Trouver une formule à deux variables correspondant à chaque table de vérité à deux variables et n'utilisant que les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

Exercice 4 (équivalence). Soit une formule F ayant pour seul connecteur $\leftrightarrow$ et où chaque variable propositionnelle n'a *au plus qu'une occurrence*. Soit $\{p_1, \ldots, p_n\}$ l'ensemble de toutes les variables propositionnelles qui apparaissent effectivement dans F.

1. Montrer que pour toute valuation v, $v(F) = 1$ si et seulement si le nombre des p_i tels que $v(p_i) = 0$ est pair.
2. Conclure que la valeur logique d'une telle proposition est indépendante du parenthésage et de l'ordre des variables, c'est-à-dire l'associativité et la commutativité à équivalence logique près du connecteur $\leftrightarrow$.
3. Que se passe t-il à la première question si l'on autorise des répétitions ?

Exercice 5 (barres de Sheafer). On rappelle que toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs $\{\wedge, \vee, \neg\}$. On dit alors que $\{\wedge, \vee, \neg\}$ est *un système complet de connecteurs.*

On note $\uparrow$ et $\downarrow$ les connecteurs définis par $A \uparrow B \equiv_d \neg(A \wedge B)$ et $A \downarrow B \equiv_d \neg(A \vee B)$.

1. Exprimer les connecteurs $\wedge, \vee, \neg$ à l'aide du seul connecteur $\{\uparrow\}$ et en déduire que $\{\uparrow\}$ est un système complet.
2. Montrer que $\{\downarrow\}$ est un système complet de connecteurs.

Exercice 6 (systèmes complets de connecteurs). Montrer que $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ n'est pas un système complet de connecteurs. On peut par exemple montrer que toute formule F construite sur ces seuls connecteurs vérifie $v_1(F) = 1$, où v_1 est la valuation constante égale à 1.

Exercice 7 (systèmes complets de connecteurs). Montrer qu'il n'y a que les barres de Sheafer fournissent les deux seuls systèmes complets de connecteur constitué d'un seul connecteur binaire. On peut montrer qu'un tel connecteur ne peut être "stable" par une valuation constante, et qu'il ne peut avoir non plus une valeur indépendante d'un de ses arguments.

Exercice 8. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles, $\mathfrak{F}_\mathcal{P}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$. On définit deux relations sur $\mathfrak{F}_\mathcal{P}$

$A \vdash B$ signifie que : pour toute valuation $v \in \mathcal{P}^{\{0,1\}}$ si $v(A) = 1$, alors $v(B) = 1$
$A \vdash B$ signifie que : pour toute valuation $v \in \mathcal{P}^{\{0,1\}}$ $v(A) = 1$ si et seulement si $v(B) = 1$.

1. Vérifier que $\vdash A$ signifie que A est une tautologie, que $A \vdash B$ si et seulement si $\vdash A \rightarrow B$, et que $A \equiv B$ si et seulement si $\vdash A \leftrightarrow B$.
2. Montrer que $\vdash$ est une relation de préordre, $\equiv$ une relation d'équivalence avec laquelle $\vdash$ est compatible, et que $\vdash$ induit sur $\mathfrak{F}_\mathcal{P}/\equiv$ une relation d'ordre que l'on notera $\leq$.
3. Montrer que $(\mathfrak{F}_\mathcal{P}/\equiv, \leq)$ est un treillis distributif avec complément, plus petit et plus grand élément, soit une algèbre de Boole. Identifier la borne supérieure et la borne inférieure de deux éléments.
4. On suppose que $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ est fini à n éléments. Quel est le cardinal de $\mathfrak{F}_\mathcal{P}/\equiv$? Quels sont ses atomes, et quel est le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}$ des atomes de $\mathfrak{F}_\mathcal{P}/\equiv$ (au sens des algèbres de Boole, cf. feuille 1) ? Montrer que $\mathfrak{F}_\mathcal{P}/\equiv$ est isomorphe à $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ (c'est un résultat géénral pour les algèbres de Boole finies).
5. On suppose maintenant que $\mathcal{P} = \{p_{i+1} \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ est infini dénombrable. Montrer que $\mathfrak{F}_\mathcal{P}/\equiv$ ne possède pas d'atomes. L'algèbre de Boole $\mathfrak{F}_\mathcal{P}/\equiv$ peut-elle isomorphe à un ensemble de parties ?

Exercice 9. Une fonction booléenne à n arguments est une fonction définie de $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, elle est polynomiale si elle s'exprime comme un polynôme à n variables sur le corps à 2 éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Donner des représentations polynomiales des fonctions correspondants aux connecteurs usuels.
2. Montrer que toute fonction polynomiale à n arguments est une somme de monômes où chaque variable apparaît avec un exposant 0 ou 1.
3. Montrer que toute fonction booléenne est polynomiale.
4. Montrer que toute fonction booléenne s'écrit de façon unique comme une somme de monômes où chaque variable apparaît avec un exposant 0 ou 1, c"est à dire qu'une fonction booléenne $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ est caractérisée de façon unique par une suite $(a_I)_{I \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})}$ à valeur dans $\{0,1\}$, vérifiant pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans $\{0,1\}$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} a_I \prod_{i \in I} x_i \ .$$