Feuille d'exercices n°1

Algèbre de Boole, treillis, ensembles ordonnés

Algèbre de Boole des parties d'un ensemble

Exercice 1 (distributivité, lois de De Morgan, cas infini). Soit E un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-ensembles de E et $B \subset E$ un ensemble. Pour $X \subset E$, le complémentaire de X dans E est noté $X^{\mathbf{c}}$. Montrer que :

$$B \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)\ ;\quad B \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$$

$$(\bigcap_{i\in I} A_i)^{\mathbf{c}} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\mathbf{c}}\ ;\quad (\bigcup_{i\in I} A_i)^{\mathbf{c}} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\mathbf{c}}$$

Exercice 2 (Images directe et réciproque d'ensembles par une fonction). Soit $f : X \to Y$ une fonction.

1. Montrer les identités suivantes, pour tous ensembles $A, B \subset Y$:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

2. Donner une condition suffisante sur f qu'on ait, pour tous ensembles $A, B \subset X$:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

3. A-t-on $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ en général ?

4. Les égalités ensemblistes précédentes se généralisent-elles aux unions et intersections infinies ?

5. Montrer que f est surjective si et seulement si $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ est injective.

Exercice 3 (limites supérieures et inférieures). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles d'un ensemble A. On pose :

$$\overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} A_n = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n\ ,$$
$$\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} A_n = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} A_n\ .$$

1. Montrer qu'on a toujours $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$.

2. Montrer que $\overline{\lim} A_n$ est l'ensemble des éléments $x \in A$ tel que $x \in A_n$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$. Interpréter de façon analogue $\underline{\lim} A_n$.

3. Identifier les limites supérieures et inférieures si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante.

4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On pose $A_n = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x_n\}$. Identifier $\overline{\lim} A_n$.

Treillis, algèbres de Boole

Exercice 4 (treillis). Un *treillis* est un ensemble ordonné $(A, \leq)$ tel que tout couple (x, y) d'éléments de A possède une borne inférieure, notée $x \wedge y$, et une borne supérieure, notée $x \vee y$.

1. Montrer qu'un treillis peut être défini de façon équivalente comme une structure algébrique $(A, \wedge, \vee)$ telle que les opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ sont associatives, commutatives, idempotentes et satisfont les lois d'*absorption* :

$$x \wedge (x \vee y) = x \ ; \quad x \vee (x \wedge y) = x \qquad \textit{(absorption)}$$

c'est-à-dire que

a. si $(A, \leq)$ est un treillis défini comme ensemble ordonné, $\wedge$ et $\vee$ satisfont bien ces lois ;

b. si $(A, \wedge, \vee)$ est une structure qui satisfait ces lois, alors

i. $x \wedge y = x$ si et seulement si $x \vee y = y$;

ii. la relation $x \leq y$ définie par $x \wedge y = x$ (ou $x \vee y = y$) est une relation d'ordre ;

iii. $x \wedge y$ est la borne inférieure et $x \vee y$ la borne supérieure de (x, y), et donc $(A, \leq)$ est un treillis comme ensemble ordonné.

2. Montrer que pour un treillis les notions de plus petit élément, d'élément absorbant pour $\wedge$ et d'élément neutre pour $\vee$ sont équivalentes, de même que celles de plus grand élément d'élément neutre pour $\wedge$ et d'élément absorbant pour $\vee$

3. Énoncer un principe de dualité pour les treillis, les treillis avec plus grand et plus petit élément.

Exercice 5 (compléments dans les treillis distributifs). On dit qu'un treillis A est *distributif* si on a pour tous $x, y, z \in A$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \ ; \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

(les deux lois sont duales l'une de l'autre et donc le principe de dualité est conservé).

1. Montrer que dans une treillis une loi de distributivité se déduit de l'autre et donc il suffit de montrer une seule de ces deux lois pour que le treillis soit distributif.

2. Montrer que $(A, \wedge, \vee)$ est un treillis distributif avec plus petit élément 0 et plus grand élément 1 si et seulement si $\wedge$ et $\vee$ sont associatives, commutatives, idempotentes, 1 élément neutre pour $\wedge$ et absorbant pour $\vee$, 0 est neutre pour $\vee$, et absorbant pour $\wedge$, et $\wedge$ est distributive sur $\vee$.

3. Montrer que si $(A, \wedge, \vee)$ est un treillis distributif avec plus petit élément 0 et plus grand élément 1, alors pour tout $x \in A$, il existe au plus un élément $y \in A$ tel que

$$x \wedge y = 0, \quad x \vee y = 1.$$

Un tel élément est appelé *complément* de a.

Exercice 6 (algèbre de Boole). Soit $(A, \wedge, \vee)$ un treillis distributif avec plus petit élément 0, plus petit élément 1, et tel que tout $x \in A$ possède un complément, noté x'

1. Montrer que pour tout $x \in A$, $x'' = x$;

2. Montrer les lois de De Morgan, pour tout $x, y \in A$

$$(x \vee y)' = x' \wedge y', \quad (x \wedge y)' = x' \vee y' \ .$$

3. Une algèbre de Boole est uine structure $(A, \wedge, \vee, (.)', 0, 1)$ ($\wedge$ et $\wedge$ binaires, $(.)'$ unaire, 0 et 1 constantes, telle que $\wedge$ et $\vee$ sont toutes deux associatives commutatives et idempotentes, 1 élément neutre pour $\wedge$ et absorbant pour $\vee$, 0 est neutre pour $\vee$, et absorbant pour $\wedge$, et $\wedge$ et et $\vee$ sont distributives l'une sur l'autre, x' est le complément de x et $x'' = x$, et les lois de De Morgan sont vérifiées.

Montrer qu'une structure est une algèbre de Boole si et seulement si c'est un treillis distributif avec plus petit et plus grand éléments et dont tout élément possède un complément (utiliser les questions précédentes et l'exercice précédent).

Exercice 7. À quelle condition l'ensemble totalement ordonné fini $\{0, \dots, n-1\}$, $n \geq 1$, est-il un treillis ? Une algèbre de Boole ?

Exercice 8 (Treillis complet, algèbre de Boole complète).

1. Montrer que dans un treillis avec plus grand et plus petit élément (en particulier une algèbre de Boole), tout sous-ensemble possède une borne supérieure et une borne inférieure. Un tel treillis est dit *complet*.

2. Vérifier que l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble non vide E quelconque est une algèbre de Boole complète.

3. Soit E un ensemble infini (par exemple $\mathbb{N}$), et $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties finies et co-finies de E (les parties co-finies de E sont les parties dont le complémentaire dans E est fini). Montrer que $(\mathcal{A}, \cup, \cap, (.)^{\mathbf{c}}, \emptyset, E)$ est une algèbre de Boole mais qu'elle n'est pas complète.

4. L'ensemble $\mathcal{P}_f(E)$ des parties finies de E et l'ensemble $\mathcal{P}_{cf}(E)$ des parties co-finies, l'ensemble $\mathcal{P}_\infty(E)$ sont-elles des treillis pour l'inclusion ? Si oui ces treillis sont-ils distributifs ? Avec plus grand et plus petit élément ? Avec complément ?

Exercice 9 (algèbres de Boole atomiques). Dans toute la suite $(A, \wedge, \vee, (.)', 0, 1)$ est une algèbre de Boole.

On dit qu'un élément a de A est un *atome* si $a \neq 0$ et a n'a pas d'autre minorant que 0 et lui même (c'est-à-dire que les seuls éléments z vérifiant $z \leq a$ sont 0 et a). On dit que l'algèbre A est *atomique* si tout élément x de A différent de 0 est minoré par un atome.

1. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, (.)^{\mathbf{c}}, \emptyset, E)$ est une algèbre de Boole atomique, et identifier ses atomes.

2. Montrer que toute algèbre de Boole finie est atomique.

3. Soit a un atome de A. Montrer que pour tous $x, y \in A$, $a \leq x \vee y$ si et seulement si $a \leq x$ ou $a \leq y$ (*indication :* pour tout atome a de A, tout $x \in A$, $a \wedge x = 0$ ou $a \wedge x = a$).

4. Montrer que si A est une algèbre de Boole atomique, tout élément est la borne supérieure des atomes qui le minorent (*indication :* soit $x \in A$, démontrez et utilisez que si $y \in A$ n'est pas un majorant de x, alors $x \wedge y' \neq 0$).

Exercice 10 (algèbres de Boole finies). Soit $(A, \wedge, \vee, (.)', 0, 1)$ une algèbre de Boole *finie* (et donc atomique), et soit E l'ensemble des atomes de A. On définit $\phi : A \to \mathcal{P}(E)$ qui à $x \in A$ associe l'ensemble des atomes qui minorent x, soit

$$\phi(x) = \{z \in E \ / \ z \leq x\}.$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in A$

$$\phi(x \wedge y) = \phi(x) \cap \phi(y) \ ; \quad \phi(x \vee y) = \phi(x) \cup \phi(y).$$

Une telle application est appelée *morphisme* de treillis (quand elle vérifie de plus $\phi(x') = \phi(x)^{\mathbf{c}}$, ce que l'on va démontrer aux questions suivantes, c'est un morphisme d'algèbre de Boole).

2. Vérifiez que $\phi(0) = \emptyset$, et que si x est un atome $\phi(x) = \{x\}$.

3. Montrer que si $x_1, \dots, x_n$ sont des atomes de A, alors en posant

$$a = \bigvee_{i=1}^{n} x_i \,,$$

on a $\phi(a) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (*Indication :* généraliser le résultat 3. de l'exercice 9 ci-dessus), et en déduire que ϕ est surjective.

4. Montrer que $\phi(1) = E$, et en déduire que pour tout $a \in A$, $\phi(a') = \phi(a)^{\mathbf{c}}$, c'est-à-dire que ϕ est un morphisme d'algèbre de Boole.

5. Montrer que ϕ est injective (utiliser le résultat de la question 4 de l'exercice 9).

6. Conclure que toute algèbre de Boole finie est isomorphe à l'algèbre des parties de ses atomes. En particulier toute algèbre de Boole finie a pour cardinal une puissance de 2.

Ordres et bons ordres

Une relation de *bon ordre* sur A est une relation d'ordre sur A tel que tout sous-ensemble non vide de A possède un plus petit élément. On dit aussi que A est *bien ordonné* par cette relation.
Un *morphisme d'ordre* entre deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ est une application $\varphi : A \to B$ vérifiant

$$\forall x, y \in A\,(x \leq_A y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_B \varphi(y))\,.$$

Un isomorphisme d'ordre est un morphisme bijectif. Dit autrement un isomorphisme d'ordre est une bijection croissante dont la réciproque est également croissante.
Dans un ensemble ordonné $(A, \leq)$, on dit que y est *successeur* de x, noté $x \prec y$, quand

$$x < y \quad \textsf{et} \quad \forall z \in A\,(x \leq z \leq y \Rightarrow (z = x \;\textsf{ou}\; z = y))\ .$$

Exercice 11. Montrer que si $(A, \leq)$ est fini, alors la relation $\leq$ est la clôture transitive de la relation « successeur », c'est-à-dire qu'étant donnés $x,\ y \in A$, si $x \leq y$, $x = y$, où il existe une suite finie $x = x_0 \prec \cdots \prec x_n = y$ (pour $0 \leq i \leq n-1$, $x_i \prec x_{i+1}$, $x_0 = x$, $y_n = y$).

Exercice 12. Pour représenter un ordre fini, il suffit de représenter le graphe de la relation successeur associée d'après la question précédente. On représente habituellement ces graphes de façon que si $x < y$, y soit placé au dessus de x. Décrire à l'aide de graphe tous les ordres (à isomorphisme près) à 2, 3, et 4 éléments.

Exercice 13. Soit $(A, \leq_A)$ un ensemble ordonné $(B, \leq_B)$ deux ensembles ordonnés.

1. Montrer que si $(A, \leq)$ est totalement ordonné, toute bijection croissante de $(A, \leq)$ dans $(B, \leq)$ est un isomorphisme d'ordre.
2. Montrer que l'on peut trouver $(B, \leq_B)$ tel que la propriété ci-dessus est fausse dès que $(A, \leq)$ n'est pas totalement ordonné.

Exercice 14 (somme linéaire). Soient deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ supposés disjoints, il existe plusieurs façons de définir un ordre sur $A \cup B$ la réunion disjointe de A et B, la plus simple étant de prendre la réunion des deux relations d'ordre qui est encore un ordre.

La somme linéaire (ou ordinale) $(A, \leq_A) \oplus (B, \leq_B)$ est l'ensemble ordonné $(A \cup B, \leq_{A \cup B})$, qui prolonge les deux ordres sur A et sur B et place tous les élements de B après ceux de A

$$x \leq_{A \cup B} y \text{ ssi } (x \in A \;\textsf{et}\; y \in B) \;\textsf{ou}\; (x \in A \;\textsf{et}\; y \in A \wedge x \leq_A y) \;\textsf{ou}\; (x \in B \;\textsf{et}\; y \in B \wedge x \leq_B y)$$

(quand A et B ne sont pas disjoints on peut toujours définir la somme disjointe en posant $A \uplus B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ et l'ordonner en adaptant la définition ci-dessus).

1. Montrer que si A et B sont totalement ordonnés leur somme linéaire l'est également.
2. Montrer que si A et B sont bien ordonnés leur somme linéaire l'est également.

Exercice 15 (produit lexicographique). Il existe de même plusieus façon de définir un ordre sur le produit cartésien de deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$. L'ordre lexicographique sur le produit $(A, \leq_A) \circ (B, \leq_B)$ est l'ordre $(A \times B, \leq_{A \times B})$ défini par

$$(x, y) \leq_{A \times B} (x', y') \text{ ssi } x <_A x' \;\textsf{ou}\; x = x' \wedge y \leq_B y'$$

1. Montrer que si A et B sont totalement ordonnés l'ordre lexicographique sur le produit l'est également.
2. Montrer que si A et B sont bien ordonnés l'ordre lexicographique sur le produit l'est également.

Exercice 16. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, ordonnés par restriction de l'ordre usuel, lesquels sont de bons ordres ?

1. $\{-\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;
2. $\{\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;
3. $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;
4. $\{0\} \cup \{-\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;
5. $\{1 - \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2 - \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;
6. $\{1\} \cup \{1 - \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1 + \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;
7. $\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{p - \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrer que ceux qui sont des bon ordres se construisent par somme et produit à partir des bons ordres $(\mathbb{N}, \leq)$ et $\{1\}$.