Normalisation forte du système T

Paul Rozière
(*notes de cours*)

10 juin 2003

1 Définitions, notations

Ensemble des termes (noté Λ_T).

1. si $t \in \Lambda$, alors $t \in \Lambda_T$;
2. si $t \in \Lambda_T$, alors $\pi_1 \in \Lambda_T$ et $\pi_2 \in \Lambda_T$;
3. $0 \in \Lambda_T$;
4. si $t \in \Lambda_T$, alors $(s\ t) \in \Lambda_T$;
5. si $t_n,\ t_0,\ t_s,\ \in \Lambda_T$, alors $(rec\ t_n\ t_0\ t_s) \in \Lambda_T$.

Ensembles de types (noté $\mathcal{F}_T$). Ce sont les formules propositionnelles utilisant les connecteurs $\wedge$, $\to$, avec pour atomes un ensemble de variables de types et la constante N.

Système d'assignation de type. Ce sont des règles de déduction naturelle. On les donne comme règles sur les preuves. On utilisera aussi à l'occasion la formulation des règles avec des séquents.

$$\frac{}{x : A}\ var$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\![x : A]\!]\\ \vdots \\ u : B\end{array}}{\lambda x.u : A \to B}\ \to_i \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots \\ u : A \to B\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ v : A\end{array}}{(u\ v) : B}\ \to_e$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots \\ u : A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ v : B\end{array}}{\langle u, v\rangle : A \wedge B}\ \wedge_i \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots \\ u : A \wedge B\end{array}}{\pi_1 u : A}\ \wedge_{eg} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots \\ u : A \wedge B\end{array}}{\pi_2 u : B}\ \wedge_{ed}$$

$$\frac{}{0 : N}\ N_{i0} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots \\ u : N\end{array}}{s\ u : N}\ N_{is} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots \\ t_n : N\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ t_0 : A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ t_s : N, A \to A\end{array}}{(rec\ t_n\ t_0\ t_s) : A}\ N_e$$

La prémisse principale de la règle de récurrence N_e est la prémisse correspondant au terme t_n ci-dessus.

Règles de réduction.

$(\lambda x.u\ v) \triangleright u[v/x]$
$\pi_1\langle u, v\rangle \triangleright u\,;\ \pi_2\langle u, v\rangle \triangleright v$
$(rec\ 0\ t_0\ t_s) \triangleright t_0\,;\ (rec\ (s\ t_n)\ t_0\ t_s) \triangleright (t_s\ t_n\ (rec\ t_n\ t_0\ t_s))$

Fait 1.1 *Le type est conservé par réduction, à savoir :*

$$si\ \Gamma \vdash t : A\ \ et\ t \triangleright t',\ \ alors\ \Gamma \vdash t' : A$$

2 Preuve de normalisation forte par réductibilité

La preuve de normalisation du système T est due à Tait, qui a introduit à cette occasion la méthode des candidats de réductibilité. La formulation de la preuve qui suit est inspirée de celle de J. L. Krivine (Lambda-calcul types et modèles).

Interprétation. On définit une interprétation $|\ | : \mathcal{F}_T \longrightarrow \Lambda_T$ par induction sur la structure des types. On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des termes fortement normalisables de Λ_T.

1. Si P est un atome $|P| = \mathcal{N}$ (en particulier $|N| = \mathcal{N}$) ;
2. $|A \rightarrow B| = \{t \in \Lambda_T / \forall u \in |A|\ (t\ u) \in |B|\}$;
3. $|A \wedge B| = \{t \in \Lambda_T / \pi_1 t \in |A| \text{ et } \pi_2 t \in |A|\}$;

Comme pour la preuve dans le cas du lambda-calcul simplement typé, on va montre une propriété de saturation par une β-expansion de tête «bornée».
Notation. On définit l'ensemble $\Sigma(R)$ inductivement :
- $R \in \Sigma(R)$;
- Si $t \in \Sigma(R)$, alors $\pi_1(t) \in \Sigma(R)$, $\pi_2(t) \in \Sigma(R)$, pour tout terme u, $(t\ u) \in \Sigma(R)$, pour tout terme u et v, $(rec\ t\ u\ v) \in \Sigma(R)$.

C'est l'ensemble des termes obtenus à partir de R seulement par règles d'élimination. Si R est une variable, resp. un redex, on dira que R variable de tête, resp. redex de tête, d'un terme de $\Sigma(R)$. Un terme a au plus une variable de tête, resp. un redex de tête. Dans la suite on notera $\sigma\langle R\rangle$ désigne un élément de $\Sigma(R)$, et si l'on note $\sigma\langle R'\rangle$ pour le terme obtenu par substitution de R' à R, $\sigma\langle R'\rangle \in \Sigma(R')$.

Lemme 2.1 (saturation) *Dans tout ce qui suit $\sigma\langle R\rangle$ désigne un terme de $\Sigma(R)$ (terme obtenu à partir de R uniquement par des règles d'élimination).*

iλ. *Si $\sigma\langle t[u/x]\rangle \in \mathcal{N}$ et $u \in \mathcal{N}$, alors $\sigma\langle(\lambda x.t\ u)\rangle \in \mathcal{N}$.*
iiλ. *Si $\sigma\langle t[u/x]\rangle \in |A|$ et $u \in \mathcal{N}$, alors $\sigma\langle(\lambda x.t\ u)\rangle \in |A|$.*
iπ. *Si $\sigma\langle t\rangle \in \mathcal{N}$ et $u \in \mathcal{N}$,*
alors $\sigma\langle\pi_1\langle t, u\rangle\rangle \in \mathcal{N}$ et $\sigma\langle\pi_2\langle u, t\rangle\rangle \in \mathcal{N}$.
iiπ. *Si $\sigma\langle t\rangle \in |A|$ et $u \in \mathcal{N}$,*
alors $\sigma\langle\pi_1\langle t, u\rangle\rangle \in |A|$ et $\sigma\langle\pi_2\langle u, t\rangle\rangle \in |A|$.
i0. *Si $\sigma\langle t\rangle \in \mathcal{N}$, si $t_0, t_s \in \mathcal{N}$,* si aucune forme normale de t ne commence par s[1],
alors $\sigma\langle(rec\ t\ t_0\ t_s)\rangle \in \mathcal{N}$.

[1] cette clause de la propriété de saturation est liée au choix d'interpréter N par $\mathcal{N}$, l'ensemble de tous les termes fortement normalisables. On aurait pu interpréter N par l'ensemble des termes fortement normalisable de forme normale un entier ($s^n\ 0$). Il suffirait alors de saturer pour t de forme normale 0.

ii0. *Si $\sigma \langle t_0 \rangle \in |A|$, si $t_0, t_s \in \mathcal{N}$, si aucune forme normale de t ne commence par s, alors $\sigma \langle (rec\ t\ t_0\ t_s) \rangle \in |A|$.*

is. *Si $\sigma \langle t_s\ t\ (rec\ t\ t_0\ t_s) \rangle \in \mathcal{N}$, alors $\sigma \langle (rec\ (s\ t)\ t_0\ t_s) \rangle \in \mathcal{N}$.*

ii$s$. *Si $\sigma \langle t_s\ t\ (rec\ t\ t_0\ t_s) \rangle \in |A|$, alors $\sigma \langle (rec\ (s\ t)\ t_0\ t_s) \rangle \in |A|$.*

Lemme 2.2 *Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables du λ-calcul. Alors, pour tout type A :*

$$\mathcal{V} \subset |A| \subset \mathcal{N}$$

Lemme 2.3 (Adéquation pour la récurrence)
Si $t_n \in |N|$, $t_0 \in |A|$ et $t_s \in |N, A \to A|$, alors $(rec\ t_n\ t_0\ t_s) \in |A|$.

Lemme 2.4 (Adéquation) *Si $x_1 : C_1, \ldots, x_n : C_n \vdash t : C$ alors*

$$u_1 \in |C_1|, \ldots, u_n \in |C_n| \Rightarrow t[u_1/x_1, \ldots, u_n/x_n] \in |C| \ .$$

Théorème 2.5 *Si $x_1 : C_1, \ldots, x_n : C_n \vdash t : C$, alors t est fortement normalisable.*

Démonstration (théorème). D'après la première inclusion du lemme 2.2, les variables sont dans les interprétations, en particulier $x_i \in C_i$. On déduit de ceci et du lemme 2.4 que $t \in |C|$. On déduit de la deuxième inclusion du lemme 2.2 que t est fortement normalisable. ■

Démonstration (lemme 2.4). On démontre par induction sur la dérivation de

$$x_1 : C_1, \ldots, x_n : C_n \vdash t : C$$

que pour tous $u_1 \in |C_1|, \ldots, u_n \in |C_n|$:

$$t[u_1/x_1, \ldots, u_n/x_n] \in |C| \ .$$

On note pour un terme quelconque w, $w[u_1/x_1, \ldots, u_n/x_n] = w[\overline{u}/\overline{x}]$. On distingue différents cas suivant la dernière règle de cette dérivation.

- La dernière règle est var. Il existe i tel que $t = x_i$, c'est évident.
- La dernière règle est $\to_i$, soit $\dfrac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \to B}$
  On suppose que pour tout $v \in |A|$, $t[\overline{u}/\overline{x}][v/x] \in |B|$. D'après le lemme 2.2 $|A| \subset \mathcal{N}$, donc, d'après le lemme 2.1 (**ii**λ), pour tout $v \in |A|$, $(\lambda x.t[\overline{u}/\overline{x}]\ v) \in |B|$. Par définition de l'interprétation, $\lambda x.t[\overline{u}/\overline{x}] \in |A \to B|$.
- La dernière règle est $\to_e$. On suppose $t[\overline{u}/\overline{x}] \in |A \to B|$, et $u[\overline{u}/\overline{x}] \in |A|$. Par définition de $|A \to B|$, $(t[\overline{u}/\overline{x}]\ u[\overline{u}/\overline{x}]) = (t\ u)[\overline{u}/\overline{x}] \in |B|$.
- La dernière règle est $\wedge_i$. On suppose que $t_1[\overline{u}/\overline{x}] \in |A|$ et $t_2[\overline{u}/\overline{x}] \in |B|$. D'après le lemme2.2, $t_1[\overline{u}/\overline{x}] \in \mathcal{N}$ et $t_2[\overline{u}/\overline{x}] \in \mathcal{N}$.
  D'après le lemme 2.1 (**ii**π), $(\pi_1 \langle t_1[\overline{u}/\overline{x}], t_2[\overline{u}/\overline{x}] \rangle) \in |A|$ et $(\pi_2 \langle t_1[\overline{u}/\overline{x}], t_2[\overline{u}/\overline{x}] \rangle) \in |B|$. Par définition de $|A \wedge B|$, $\langle t_1[\overline{u}/\overline{x}], t_2[\overline{u}/\overline{x}] \rangle \in |A \wedge B|$.
- La dernière règle est $\wedge_{eg}$. On suppose $t[\overline{u}/\overline{x}] \in |A \wedge B|$. Par définition de $|A \wedge B|$, $\pi_1 t[\overline{u}/\overline{x}] \in |A|$.
- La dernière règle est $\wedge_{ed}$. Identique au cas précédent.

- La dernière règle est N_{i0}. On rappelle que $|N| = \mathcal{N}$. Comme $t = 0$, qui est une constante, est fortement normalisable et vérifie $0[\overline{u}/\overline{x}] = 0$, on a $0[\overline{u}/\overline{x}] \in |N|$.
- La dernière règle est N_{is}. Soit $t = (s\ u)$. Par hypothèse d'induction $u[\overline{u}/\overline{x}] \in |N|$. Comme $|N| = \mathcal{N}$, et que pour tout terme v, $(s\ v)$ est fortement normalisable si et seulement si v est fortement normalisable, $(s\ u)[\overline{u}/\overline{x}] = (s\ u[\overline{u}/\overline{x}])$ est fortement normalisable donc dans $|N|$.
- La dernière règle est N_e. Soit $t = (rec\ t_n\ t_0\ t_s)$. Par hypothèse d'induction $t_n[\overline{u}/\overline{x}] \in |N|$, $t_0[\overline{u}/\overline{x}] \in |A|$, et $t_s[\overline{u}/\overline{x}] \in |N, A \to A|$, et donc $t \in |A|$ d'après le lemme 2.3. ■

D'après le lemme de König, si u est fortement normalisable, il existe une borne sur la somme des longueurs des suites de réductions de u, appelons la $N(u)$.

Démonstration (lemme 2.3). On prouve le résultat pour tous termes t_0, t_s, par récurrence sur $N(t_n) + L(t_n)$, où $L(t_n)$ est la longueur de la forme normale (si l'on a pas encore montré la propriété de Church-Rosser, on peut prendre pour $L(t_n)$ la somme des longueurs des formes normales de t_n). On discute les cas suivant t_n.

- Le terme t_n commence par s, soit $t_n = (s\ u_n)$. Alors les formes normales de t_n s'écrivent $(s\ v_n)$, où v_n est une forme normale de u_n. Ceci établit une correspondance bijective entre les formes normales de t_n et celles de u_n. On a bien $L(u_n) < L(t_n)$. Par ailleurs $N(u_n) = N(t_n)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à u_n, on a $(rec\ u_n\ t_0\ t_s) \in |A|$. Comme $t_s \in |N, A \to A|$ et $u_n \in |N|$, on a $(t_s\ t_n\ (rec\ u_n\ t_0\ t_s)) \in |A|$. D'après le lemme 2.1(**ii**s) (en prenant σ vide), $(rec\ (s\ u_n)\ t_0\ t_s) \in |A|$.
- Le terme t_n a un redex en tête. Soit $t_n \rhd_1 u_n$, la réduction correspondante. On est dans l'un des 4 cas étudiés au lemme 2.1. Comme $t_n \in |N|$ et $|N| = \mathcal{N}$, on a $u_n \in |N|$. Par ailleurs les formes normales de u_n sont des formes normales de t_n, d'où $L(u_n) \leq L(t_n)$ et $N(u_n < N(t_n)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à u_n, d'où $(rec\ u_n\ t_0\ t_s) \in |A|$. L'une des 4 clauses **ii** du lemme 2.1 s'applique (pour $\sigma\ \langle u_n \rangle = (rec\ u_n\ t_0\ t_s)$), donc $(rec\ t_n\ t_0\ t_s) \in |A|$.
- Le terme t_n n'a pas de redex en tête, et ne commence pas par s. Alors t_n commence soit par un λ, soit par un couple, soit est 0, (c'est une introduction différente de celle de s), soit à une variable en tête. Dans tous ces cas aucune forme normale de t_n ne commence par s.
  De $t_0 \in |A|$ et du lemme 2.1 (**ii**0) (en prenant σ vide), on déduit que $(rec\ t_n\ t_0\ t_s) \in |A|$.
  ■

Démonstration (lemme 2.2). On définit inductivement l'ensemble $\mathcal{N}_0$:
- $x \in \mathcal{N}_0$, pour x une variable ;
- si $u \in \mathcal{N}_0$ et $v \in \mathcal{N}$, alors $(u\ v) \in \mathcal{N}_0$;
- si $u \in \mathcal{N}_0$, alors $\pi_1 u \in \mathcal{N}_0$ et $\pi_2 u \in \mathcal{N}_0$;
- si $u \in \mathcal{N}_0$, si $u_0 \in \mathcal{N}$ et $u_s \in \mathcal{N}$, alors $(rec\ u\ u_0\ u_s) \in \mathcal{N}_0$.

Remarquons que les termes éléments de $\mathcal{N}_0$ sont des termes obtenus par une suite de règles d'élimination à partir d'une variable, avec les termes corrspondants à d'éventuelles prémisses secondaires qui sont fortement normalisables.
Toutes les réductions d'un terme t de $\mathcal{N}_0$ ont donc lieu dans les termes « arguments » de la variable de tête qui sont tous fortement normalisables par construction. Comme ces réductions sont indépendantes, si la réduction de t était infinie, l'une des réduction de l'un des termes « arguments » serait infinie, ce qui contredit $t \in \mathcal{N}_0$.
On prouve par induction sur A que $\mathcal{N}_0 \subset |A| \subset \mathcal{N}$.

– Soit $A = P$ est atomique. On a $\mathcal{N}_0 \subset |P| = \mathcal{N}$.
– Soit $A = C \to D$. Soit $t \in |A|$. Par hypothèse d'induction $x \in |C|$, donc $(t\ x) \in |D|$, or par hypothèse d'induction $|D| \subset \mathcal{N}$, donc $(t\ x) \in \mathcal{N}$, donc $t \in \mathcal{N}$.
Soit maintenant σ un terme de $\mathcal{N}_0$. Par hypothèse d'induction sur C, $C \subset \mathcal{N}$. Pour tout $v \in |C|$, $(\sigma\ v) \in \mathcal{N}_0$, donc par hypothèse d'induction sur D, $(\sigma\ v) \in |D|$. Par définition de $|C \to D|$, $\sigma \in |A|$.
– Soit $A = C \wedge D$. Soit $t \in A$. Alors par définition de $|A|$, $\pi_1 t \in |C|$. Par hypothèse d'induction, $\pi_1 t \in \mathcal{N}$, donc $t \in \mathcal{N}$.
Soit maintenant σ un terme de $\mathcal{N}_0$. On a alors que $\pi_1\sigma \in \mathcal{N}_0$ et $\pi_2\sigma \in \mathcal{N}_0$, donc par hypothèse d'induction sur C et D, $\pi_1\sigma \in |C|$ et $\pi_2\sigma \in |D|$. Par définition de $|C \wedge D|$, $\sigma \in |A|$. ■

Démonstration (lemme 2.1**ii**). Chacun des 4 cas envisagés, se montre par induction sur la complexité du type A, le cas de base A est atomique étant donné par la clause **i** correspondante.
Voyons le premier cas :
– Soit $A = C \to D$. Soit $w \in |C|$. Par définition de $|C \to D|$, $(\sigma\ \langle t[u/x]\rangle\ \ w) \in |D|$. Par hypothèse d'induction sur D, $(\sigma\ \langle \lambda x.t\ u\rangle\ \ w) \in |D|$. Ceci étant vrai pour tout $w \in |C|$, on a montré (définition de $|A|$) $\sigma\ \langle(\lambda x.t\ u)\rangle \in |A|$.
– Soit $A = |C \wedge D|$. Par définition de $|C \wedge D|$, $\pi_1\sigma\ \langle t[u/x]\rangle \in |C|$ et $\pi_2\sigma\ \langle t[u/x]\rangle \in |D|$. Par hypothèse d'induction sur C et D, on déduit que $\pi_1\sigma\ \langle(\lambda x.t\ u)\rangle \in |C|$ et $\pi_2\sigma\ \langle(\lambda x.t\ u)\rangle \in |D|$.
donc $\sigma\ \langle(\lambda x.t\ u)\rangle \in |A|$. ■
Les 3 autres cas se démontrent exactement de la même façon.

Démonstration (lemme 2.1**i**). On rappelle que l'on a définit pour un terme fortement normalisable v l'entier $N(v)$ qui est la somme des longueurs des suites de réductions de v (lemme de König).
Prouvons les clauses **i** du lemme. Les preuves des 4 cas sont très semblables.

iλ. Supposons $u \in \mathcal{N}$, et $\sigma\ \langle t[u/x]\rangle \in \mathcal{N}$. On prouve $\sigma\ \langle(\lambda x.t\ u)\rangle \in \mathcal{N}$ par récurrence sur $N(u) + N(\sigma\ \langle t[u/x]\rangle)$. Pour cela il suffit de prouver que tous les réduits en une étape de ce terme sont fortement normalisables.

Examinons les différentes possibilités pour w tel que $\sigma\ \langle(\lambda x.t\ u)\rangle \triangleright_1 w$.
- Soit $w = \sigma\ \langle t[u/x]\rangle$. Le résultat découle de l'hypothèse du lemme.
- Soit $w = \sigma\ \langle(\lambda x.t'\ u)\rangle$, avec $t \triangleright_1 t'$. On en déduit que $\sigma\ \langle t[u/x]\rangle \triangleright_1 \sigma\ \langle t'[u/x]\rangle$. On a donc par hypothèse, $\sigma\ \langle t'[u/x]\rangle \in \mathcal{N}$, et par définition de la fonction N, $N(\sigma\ \langle t'[u/x]\rangle) < N(\sigma\ \langle t[u/x]\rangle)$. On peut conclure par hypothèse de récurrence que $w \in \mathcal{N}$.
- Soit $w = \sigma\ \langle(\lambda x.t\ u')\rangle$, avec $u \triangleright_1 u'$. On en déduit que $\sigma\ \langle t[u/x]\rangle \triangleright \sigma\ \langle t[u'/x]\rangle$. On a donc $N(\sigma\ \langle t[u'/x]\rangle) \leq N(\sigma\ \langle t[u/x]\rangle)$, et $N(u') < N(u)$. Par hypothèse de récurrence $w \in \mathcal{N}$.
- Soit $w = s'\ \langle(\lambda x.t\ u)\rangle$. avec $\sigma \triangleright_1 \sigma'$. C'est analogue aux deux précédents cas.

iπ. On prouve $\sigma\ \langle \pi_1\langle t, u\rangle\rangle \in \mathcal{N}$ par récurrence sur $N(\sigma\ \langle \pi_1\langle t, u\rangle\rangle) + N(u)$. Le cas de la réduction sera π_2 est identique. Il suffit de montrer que pour tout w tel que $\sigma\ \langle \pi_1\langle t, u\rangle\rangle \triangleright_1 w$, $w \in \mathcal{N}$. Examinons les différentes possibilités pour w.
- Soit $w = \sigma\ \langle t\rangle$. Le résultat découle de l'hypothèse du lemme.

– Soit $w = \sigma\,\langle \pi_1\langle t, u'\rangle\rangle$, avec $u \rhd_1 u'$. On a $u' \in \mathcal{N}$, $N(u') < N(u)$, d'où le résultat par hypothèse de récurrence.
– Soit $w = \sigma\,\langle \pi_1\langle t', u\rangle\rangle$, avec $t \rhd_1 t'$. On en déduit que $\sigma\,\langle t\rangle \rhd_1 \sigma\,\langle t'\rangle$, donc par hypothèse $\sigma\,\langle t'\rangle \in \mathcal{N}$. Par définition de la fonction N, $N(\sigma\,\langle t'\rangle) < N(\sigma\,\langle t\rangle)$, donc on peut conclure par hypothèse de récurrence que $w \in \mathcal{N}$.
– Soit $w = \sigma\,\langle \pi_1\langle t, u\rangle\rangle$, avec $\sigma \rhd_1 \sigma'$. Analogue au cas précédent.

i0. On prouve $\sigma\,\langle (rec\ t\ t_0\ t_s)\rangle \in \mathcal{N}$ par récurrence sur $N(\sigma\,\langle t\rangle) + N(t_0) + N(t_s)$. Il suffit de montrer que pour tout w tel que $\sigma\,\langle (rec\ t\ t_0\ t_s)\rangle \rhd_1 w$, $w \in \mathcal{N}$. Examinons les différentes possibilités pour w. Du fait de la condition « aucune forme normale de t ne commence par s », on peut se limiter aux cas suivants.
– Soit $w = \sigma\,\langle t\rangle$. Le résultat découle de l'hypothèse du lemme.
– Soit $w = \sigma\,\langle (rec\ t\ t_0'\ t_s)\rangle$, respectivement $w = \sigma\,\langle (rec\ t\ t_0\ t_s')\rangle$, avec $t_0 \rhd_1 t_0'$, respectivement $t_s \rhd_1 t_s'$. On en déduit $N(t_0') < N(t_0)$, respectivement $N(t_s') < N(t_s)$, d'où le résultat par hypothèse de récurrence.
– Soit $w = \sigma\,\langle (rec\ t'\ t_0\ t_s)\rangle$, avec $t \rhd_1 t'$. On en déduit que $\sigma\,\langle t\rangle \rhd_1 \sigma\,\langle t'\rangle$, donc par hypothèse $\sigma\,\langle t'\rangle \in \mathcal{N}$. Par définition de la fonction N, $N(\sigma\,\langle t'\rangle) < N(\sigma\,\langle t\rangle)$, donc on peut conclure par hypothèse de récurrence que $w \in \mathcal{N}$.
– Soit $w = \sigma'\,\langle (rec\ t'\ t_0\ t_s)\rangle$, avec $\sigma \rhd_1 \sigma'$. Analogue au cas précédent.

is. On prouve que $\sigma\,\langle (rec\ (s\ t)\ t_0\ t_s)\rangle \in \mathcal{N}$ par récurrence sur $N(\sigma\,\langle (t_s\ t\ (rec\ t\ t_0\ t_s))\rangle)$. Il suffit de montrer que $w \in \mathcal{N}$, pour tout w tel que $\sigma\,\langle (rec\ (s\ t)\ t_0\ t_s)\rangle \rhd_1 w$. Examinons les différentes possibilités pour w.
– Soit $w = \sigma\,\langle t_s\ t\ (rec\ t\ t_0\ t_s)\rangle$. Le résultat découle de l'hypothèse du lemme.
– Soit $w = \sigma\,\langle (rec\ (s\ t')\ t_0\ t_s)\rangle$, avec $t \rhd_1 t'$. On en déduit que

$$\sigma\,\langle (t_s\ t\ (rec\ t_s\ t_0\ t_s))\rangle \rhd_2 \sigma\,\langle (t_s\ t'\ (rec\ t_s'\ t_0\ t_s))\rangle$$

donc par hypothèse $\sigma\,\langle (t_s\ t'\ (rec\ t_s'\ t_0\ t_s))\rangle \in \mathcal{N}$. Par définition de la fonction N, $N(\sigma\,\langle (t_s\ t'\ (rec\ t_s'\ t_0\ t_s))\rangle) < N(\sigma\,\langle (t_s\ t\ (rec\ t_s\ t_0\ t_s))\rangle)$, donc on peut conclure par hypothèse de récurrence que $w \in \mathcal{N}$.
– Soit $w = \sigma\,\langle (rec\ (s\ t)\ t_0\ t_s')\rangle$, avec $t_s \rhd_1 t_s'$. Analogue au cas précédent.
– Soit $w = \sigma\,\langle (rec\ (s\ t)\ t_0'\ t_s)\rangle$, avec $t_0 \rhd_1 t_0'$. Analogue au cas précédent.
– Soit $w = \sigma'\,\langle (rec\ (s\ t)\ t_0\ t_s)\rangle$, avec $\sigma \rhd_1 \sigma'$. Analogue aux cas précédents. ■

Exercice 1 Soit t un terme normal clos. Montrer que :

1. Si $\vdash t : A \to B$, alors il existe un terme normal u tel que $x : A \vdash u : B$ et $t = \lambda x.u$.

2. Si $\vdash t : A \wedge B$, alors il existe deux termes clos u et v tels que $\vdash u : A$, $\vdash v : B$ et $t = \langle u, v\rangle$.

3. Si $\vdash t : N$, alors il existe un entier n tel que $t = (s^n\ 0)$.

Exercice 2 Montrer que si t est un terme clos de type $N^p \to N$ dans le système T, alors il existe une fonction récursive f_t telle que :

$$(t\ (s^{n_1}\ 0) \ldots\ (s^{n_p}\ 0)) \rhd (s^{f_t\ n_1 \ldots\ n_p}\ 0)\ .$$

On dit alors que le terme t représente la fonction récursive f. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale qui ne peut être représentée dans le système T.