Déduction naturelle classique et $\lambda\mu$-calcul

Paul Rozière

notes de cours

10 juin 2003

(1171 –version provisoire)

1 Introduction.

Nous allons décrire une notion de déduction naturelle pour la logique classique (dûe à Michel Parigot) qui permet une interprétation algorithmique directe de celle-ci (sans passer par les $\neg\neg$-traductions).

La règle d'absurdité classique que nous avons vu au § **??** page ?? "bloque" certaines réductions naturelles, comme par exemple sur l'exemple suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2\ ,\ \dfrac{[\![\neg(A\to B)]\!] \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[\![A]\!]\\ \vdots\\ d_1\\ \vdots\\ B\end{array}}{A\to B}\,{\to_i}}{\bot}\,\neg_e\\ \vdots\\ d_2\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A\to B}\,\bot_c \qquad \begin{array}{c}\Gamma_3\\ \vdots\\ d_3\\ \vdots\\ A\end{array}}{B}\,\to_e$$

Pour réduire :

i. on a besoin d'une notion de coupure "commutative" ou "structurelle", qui consiste à faire commuter la dernière règle $\to_e$ avec les règles de la déduction prémisse ($\bot_c$, d_2 et $\neg_e$) de façon à mettre en évidence la coupure sur $A \to B$;

ii. Par ailleurs la réduction n'est possible que si la formule mutifiée $\neg(A \to B)$ apparaît toujours en position principale dans la déduction d_2.

Pour cela on va utiliser comme en calcul des séquents classique plusieurs formules à droite, ce qui revient à utiliser une négation (pour les formules à droite) qui n'est pas dans le langage, et donc résout le problème ii. On va d'autre part utiliser une commutation de règles analogue à celle utilisée en calcul de séquents pour les coupures croisées (i).

Bien que l'on puisse présenter la déduction naturelle avec plusieurs conclusions sur des séquents constitués de deux multi-ensembles, comme en calcul des séquents classique, nous allons plutôt utiliser des séquents avec une formule conclusion distinguée ce qui facilite le parallèle avec la déduction naturelle classique de Prawitz, ainsi que cela conduit directement à l'interpétation algorithmique. l'interprétation algorithmique.

2 La déduction naturelle avec plusieurs formules à droite.

2.1 Déduction de séquents.

Formellement un séquent est donc un triplet de deux multi-ensembles et d'un singleton ou de l'ensemble vide $(\Gamma, \Delta, \{A\})$ ou $(\Gamma, \Delta, \emptyset)$. On le note $\Gamma \vdash A, \Delta$ ou $\Gamma \vdash\ , \Delta$. Dans le deuxième cas la place vide peut être vue comme une notation pour l'absurde, mais qui est purement "structurel", c'est à dire qu'il ne fait pas partie du langage des formules. Le séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash C, B_1, \ldots, B_p$ s'interprète comme $A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_p \vdash C$, le séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash\ , B_1, \ldots, B_p$ comme $A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_p \vdash \bot$. La conclusion du séquent $\Gamma \vdash C, \Delta$ est la formule C, son contexte les deux multi-ensembles Γ et Δ.

Les règles logiques sont les règles usuelles de la déduction naturelle intuitionniste reformulée avec des séquents avec plusieurs formules à droite, plus des règles de choix de la formule conclusion qui internalisent éventuellement des règles structurelles à droite, et codent le raisonnement par l'absurde : voir le tableau 1 page suivante.

On peut préferer définir la négation à partir d'une constante logique pour l'absurde, soit $\bot$. La règle d'introduction de la négation est dérivable grâce aux règles d'affaiblissement à droite et à la règle μ. Pour pouvoir dériver la règle d'élimination de la négation on doit ajouter la règle :

$$\frac{\Gamma \vdash \bot, \Delta}{\Gamma \vdash\ , \Delta}\ \bot$$

qui peut apparaître comme un cas particulier de la règle de nommage où l'on ne note pas la formule $\bot$.

On montre facilement le résultat suivant (si Δ est un multi-ensemble, $\neg\Delta$ désigne le multi-ensemble $\{\neg F\ /\ F \in \Delta\}$) :

Proposition 2.1 *Le séquent $\Gamma \vdash C, \Delta$, resp. $\Gamma \vdash\ , \Delta$ est dérivable en déduction naturelle classique avec plusieurs formules à droite ssi le séquent $\Gamma, \neg\Delta \vdash C$, resp. $\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$ est dérivable dans la déduction naturelle classique de Prawitz (une seule formule à droite, règle $\bot_c$).*

Démonstration. On utilise les systèmes avec négation primitive ce qui évite de confondre l'absurdité comme formule et le vide (par traduction du $\neg$ le résultat ne dépend pas de ce choix). Les deux sens de l'équivalence se font par induction sur la hauteur de la preuve.

Supposons le séquent $\Gamma \vdash C, \Delta$ dérivable, C pouvant désigner le vide. Si la dernière règle est une règle logique ou structurelle le séquent $\Gamma, \neg\Delta \vdash C^*$, avec $C^* = C$ si C est une formule, $C^* = \bot$ sinon, est dérivable par la même règle — dans le cas d'une règle structurelle droite il faut bien sûr utiliser la même règle structurelle mais à gauche. Il reste donc à dériver les règles sur l'absurde :

$$\frac{\Gamma \vdash C, \Delta}{\Gamma \vdash\ , C, \Delta}\ \text{nommage} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\neg C \vdash \neg C \quad \Gamma, \neg\Delta, \vdash C}{\Gamma, \neg\Delta, \neg C \vdash \bot}\ \neg_e$$

Règle axiome

$$\frac{}{A \vdash A}\ \text{Ax.}$$

Règles logiques

conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ \wedge_{eg} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}{\Gamma \vdash B, \Delta}\ \wedge_{eg} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}\ \wedge_i$$

implication

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B, \Delta \quad \Gamma' \vdash A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta'}\ \to_e \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to_i$$

négation

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A, \Delta \quad \Gamma' \vdash A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash\ , \Delta, \Delta'}\ \neg_e \qquad \frac{\Gamma, A \vdash\ , \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg_i$$

quantification universelle

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}\ \forall_e \qquad \frac{\Gamma \vdash A[y/x], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\ \forall_i\ (*)$$

$(*)$*Restriction* : y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, A, Δ.

Logique classique

$$\frac{\Gamma \vdash C, \Delta}{\Gamma \vdash\ , C, \Delta}\ \text{nommage} \qquad \frac{\Gamma \vdash\ , C, \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta}\ \mu$$

Règles structurelles

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ w_g \qquad \frac{\Gamma \vdash\ , \Delta}{\Gamma \vdash\ , A, \Delta}\ w_d$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ c_g \qquad \frac{\Gamma \vdash\ , A, A, \Delta}{\Gamma \vdash\ , A, \Delta}\ c_d$$

Tab. 1 – Règles de la déduction naturelle classique

$$\frac{\Gamma \vdash\ , C, \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta}\ \mu \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\Gamma, \neg\Delta, \neg C \vdash \bot}{\Gamma, \neg\Delta \vdash C}\ \bot_c$$

Remarquons que dans ce cas la preuve obtenue a essentiellement la même structure que la preuve originale.

Réciproquement, montrons par induction sur la preuve que pour tous multi-ensembles Γ et Δ, toute formule C, si $\Gamma, \neg\Delta \vdash C$ est dérivable avec $\bot_c$, alors $\Gamma \vdash C^\star, \Delta$ est dérivable avec plusieurs formules à droite, avec $C^\star = C$ si $C \neq \bot$, $C^\star$ le vide sinon. Les règles de la logique minimale se traduisent à l'identique. Une règle structurelle gauche se traduit par une règle structurelle gauche ou droite. La règle d'absurdité intuitionniste se traduit par la règle d'affaiblissement droit suivie de la règle de nommage. La règle d'absurdité classique se traduit par la règle μ. Il y a deux cas à considérer pour la règle axiome, suivant que la formule en jeu fait partie de Γ ou Δ. Si elle fait partie de Γ elle est traduite par la règle axiome. Sinon on la traduit ainsi :

$$\frac{}{\neg A \vdash \neg A}\ \text{Ax.} \qquad \rightsquigarrow \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A}\ \text{Ax.}}{A \vdash\ , A}\ \text{nommage}}{\vdash \neg A, A}\ \neg_i$$

■

La traduction d'une preuve de déduction naturelle avec $\bot_c$ en une preuve de déduction naturelle avec plusieurs formules à droite ne modifie pas essentiellement la structure : certaines règles axiomes sont modifiées comme indiqué ci-dessus. Au cours de la traduction dans chaque séquent certaines formules niées restent des négations et certaines formules niées deviennent des formules à droite – on pourrait appeller ceci une négation structurelle. Ceci se fait en fonction d'un choix arbitraire effectué pour le séquent conclusion et pour les affaiblissements éventuels. Pour la règle $\rightarrow_i$, la définition de la traduction par induction impose que la formule mutifiée soit à gauche, même si elle est niée.

La déduction naturelle avec plusieurs formules à droite apparaît donc comme une preuve de déduction naturelle avec règle $\bot_c$ dans laquelle on a fixé l'interprétation des formules niées : soit cette négation est structurelle (formule à droite), soit cette négation est un connecteur (la formule niée est à gauche).

2.2 Déduction de formules.

Comme pour la déduction naturelle intuitionniste, on peut chercher une version de la déduction naturelle avec plusieurs formules à droite comme une déduction de formules, qui correspond mieux à l'interprétation algorithmique. De la même façon que les règles structurelles gauche sont intégrées aux règles $\rightarrow_i$, les règles structurelles droite vont être intégrées aux règles sur l'absurde.

Parmi les deux nouvelles règles, la règle de nommage peut être vue comme un nommage du nœud de l'arbre de dérivation auquel elle correspond, de la même façon que la règle axiome peut-être vue comme un nommage d'une feuille de l'arbre de dérivation. La règle μ peut être vue comme une règle qui mutifie un certain nombre de formules introduites par nommage, et va donc lier un nœud μ de l'arbre a plusieurs nœuds (éventuellement aucun) de nommage pour la même formule. On peut choisir la représentation de la table 2 page suivante, où $\square$ désigne la place vide à droite (l'absurde "structurel"). La négation elle est définie avec $\bot$.

Axiome

A^x

Règles logiques

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\ \wedge_{eg} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\ \wedge_{eg} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ \wedge_i$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ A \to B & A\end{matrix}}{B}\ \to_e \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\![A^x]\!]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \to B}\ \to_{ix}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \forall x A\end{matrix}}{A[t/x]}\ \forall_e \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A[y/x]\end{matrix}}{\forall x A}\ \forall_i\ (*)$$

$(*)$*Restriction* : y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, A, Δ.

Logique classique

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix}}{\square}\ [\![C^\alpha]\!]\ \text{nommage} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix}}{\square}\ [\![C^\alpha]\!]\\ \vdots\\ \square\end{matrix}}{C}\ \mu_\alpha$$

règle $\to_i$: A^x peut avoir 0 ou plusieurs occurrences dans la dérivation
règle μ : C^α peut avoir 0 ou plusieurs occurrences dans la dérivation
règle de nommage : si $C = \perp$, $\perp$ disparaît de la conclusion (n'est pas utilisée par une règle μ)

Tab. 2 – Règles de la déduction naturelle classique

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \dfrac{B}{\square}\,[\![B^\alpha]\!]\\ \vdots\\ \square\end{array}}{B}\,\mu_\alpha \qquad \cdots}{C}\,R_e \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array} \qquad \cdots}{\dfrac{C}{\square}\,[\![C^\alpha]\!]}\,R_e\\ \vdots\\ \dfrac{\square}{C}\,\mu_\alpha\end{array}$$

TAB. 3 – Réduction structurelle

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \dfrac{}{\square}\,[\![C^\alpha]\!]\\ \vdots\\ \square\end{array}}{C}\,\mu_\alpha}{\square}\,[\![C^\beta]\!] \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \dfrac{}{\square}\,[\![C^\beta]\!]\\ \vdots\\ \square\end{array}$$

– *Renommage* –

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ C\end{array}}{\square}\,[\![C^\alpha]\!]}{C}\,\mu_\alpha \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\vdots\\ C\end{array}$$

où C^α n'a pas d'autre occurrence dans la preuve que celle indiquée.

– η_μ –

TAB. 4 – Simplifications

2.3 Réduction des preuves.

On conserve les réductions élémentaires intuitionnistes pour $\rightarrow, \wedge, \forall$. On ajoute une nouvelle notion de coupure qui est une règle μ dont la conclusion est prémisse principale d'une règle d'élimination. Dans ce cas on obtient la réduction suivante, qui consiste essentiellement en une succession de permutations de règles mais avec la possibilité de duplications ou d'effacements, et que l'on appellera *réduction structurelle* (voir table 3). On aura besoin également des règles de simplification des suites de règles [] et μ et qui sont décrites à la table 4.

Ces deux réductions font strictement décroître la taille de la preuve.

Remarque. Contrairement à ce que pourrait laisser croire le schéma de la table 3, il est tout à fait possible que la dernière règle au dessus de la règle μ_α soit une règle de nommage qui mutifie B^α. On aura ainsi comme cas particulier :

$$
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{B}{\Box}\,[\![B^\alpha]\!]\\
\vdots\\
\dfrac{\dfrac{\dfrac{B}{\Box}\,[\![B^\alpha]\!]}{B}\,\mu_\alpha \qquad \cdots}{C}\,R_e
\end{array}
\quad\rightsquigarrow\quad
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{\dfrac{B \qquad \cdots}{C}\,R_e}{\Box}\,[\![C^\alpha]\!]\\
\vdots\\
\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \qquad\qquad \cdots}{C}\,R_e}{\Box}\,[\![C^\alpha]\!]}{C}\,\mu_\alpha
\end{array}
$$

Notez que le dernier μ_α lie la dernière occurrence de C^α, ainsi que les occurrences de C^α indiquées au dessus. On ne pourra donc en général appliquer la règle de renommage.

3 Un langage de termes pour la déduction naturelle classique.

3.1 Le $\lambda\mu$-calcul pur.

On va enrichir le λ-calcul pour interpréter la déduction naturelle classique. Pour cela on a besoin pour la règle de nommage de nommer des sous-termes arbitraires du λ-terme (et non plus seulement les variables) – on notera $[\alpha]t$ la construction qui donne le nom α au terme t, et pour la règle μ d'un lieur pour y faire référence – on notera $\mu\alpha.t$ la construction qui lie les noms α dans le sous-terme t.

Définition 3.1 Le $\lambda\mu$-calcul possède deux types de variables : les λ-variables notées $x,\ y,\ z,\ldots$ et les μ-variables notées $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$. L'ensemble des termes contient des *termes nommés* et des termes *non nommés*. Il est défini inductivement par :
- x est un terme non nommé, si x est une λ-variable ;
- $\lambda x.u$ est un terme non nommé, si x est une λ-variable et u un terme non nommé ;
- $(u\ v)$ est un terme non nommé, si u et v sont des termes non nommés ;
- $\mu\alpha.e$ est un terme non nommé, si e est un terme nommé et α une μ-variable ;
- $[\alpha]u$ est un terme nommé, si u est un terme non nommé et α une μ-variable.

La réduction logique est la réduction usuelle du λ-calcul.

$$(\lambda x.u\ v) \rhd_1 u[v/x] \qquad \textit{(réduction logique)}$$

On définit la *réduction structurelle* qui est la version non typée de la réduction structurelle pour les preuves (voir table 3 page précédente).

$$(\mu\alpha.e\ v) \rhd_1 \mu\alpha.e\left[[\alpha](\centerdot\ v)/[\alpha]\centerdot\right] \qquad \textit{(réduction structurelle)}$$

Le terme $e\left[[\alpha](\centerdot\ v)/[\alpha]\centerdot\right]$ est obtenu à partir de e en substituant inductivement dans e chaque sous-terme de la forme $[\alpha]w$, où $[\alpha]$ est libre dans e et w est n'importe quel terme, par $[\alpha](w\ v)$.

La réduction en une étape $\rhd_1$ est définie par passage au contexte des réductions ci-dessus. La réduction $\rhd$ est la clôture réflexive et transitive de $\rhd_1$.

On peut ajouter des règles de simplification des successions de règles μ et règles de nommage, la règle de renommage :

$$[\alpha]\mu\beta.e \rhd_1 e[\alpha/\beta] \qquad \textit{(renommage)}$$

et une règle analogue à la η-réduction du λ :

$$\mu\alpha.[\alpha]u \rhd_1 u \quad \text{si } \alpha \text{ n'a pas d'occurrence libre dans } u \tag{η_μ}$$

La principale différence entre la réduction de l'opérateur μ et celle du λ réside dans le fait que l'opérateur μ n'est pas effacé par la réduction (il correspond à une commutation de règles), ce qui a pour conséquence que l'opérateur μ attend un nombre arbitrairement grand d'arguments. Par exemple si e est un terme nommé qui ne contient pas d'occurrence de δ, pour toute suite finie de termes $(t_1, \ldots, t_n)$:

$$(\mu\delta.e\ t_1\ \ldots\ t_n) \rhd \mu\delta.e$$

3.1.1 Propriété de Church-Rosser.

Le $\lambda\mu$-calcul a la propriété de Church-Rosser. La démonstration est analogue à celle du λ-calcul, il faut cependant tenir compte du nombre arbitraire d'arguments attendus pour μ. On définit une relation de réduction $\Rightarrow$ qui a la propriété de Church-Rosser et dont $\rhd$ est la clôture transitive. C'est une extension de la relation analogue pour le λ-calcul. De la même façon $\Rightarrow$ réduit tous les redex déjà apparents dans le terme, avec cependant une notion de redex apparent plus large que celle strictement syntaxique dans le cas du renommage et du μ. Généralisons la notation pour la "substitution" associée à la règle μ : on notera $e\left[[\alpha](\centerdot\ v_1\ \ldots\ v_n)/[\beta]\centerdot\right]$ le terme obtenu à partir de e en substituant inductivement dans e chaque sous-terme de la forme $[\beta]w$, où $[\beta]$ est libre dans e et w est n'importe quel terme, par $[\alpha](w\ v_1\ \ldots\ v_n)$. On appelera *$\mu$-substitutions* ces substitutions. L'exemple suivant explique pourquoi il faut étendre la notion de redex apparent :

$$\begin{array}{ccc}
t = (\mu\alpha.[\alpha]\mu\beta.e\ v) & \rhd_1 & (\mu\alpha.e[\alpha/\beta]\ v) \\
\underline{\triangledown} & & \underline{\triangledown} \\
\mu\alpha.[\alpha](\mu\beta.e\left[[\alpha](\centerdot\ v)/[\alpha]\centerdot\right]\ v) & \rhd_2 & \mu\alpha.e\left[[\alpha](\centerdot\ v)/[\beta]\centerdot\right]
\end{array}$$

La démonstration est faite tout d'abord sans η_μ, et donc temporairement $\rhd_1$ désigne la clôture par passage au contexte des ses trois relations logique, structurelle et de renommage, $\rhd$ leur clôture réflexive et transitive.

Définition 3.2 La relation $\Rightarrow$ est la plus petite relation qui vérifie les deux groupes de clauses suivants :
Passage au contexte.
var. Si x est une variable $x \Rightarrow x$;
λ. Si $u \Rightarrow u'$ alors $\lambda\alpha.u \Rightarrow \lambda\alpha.u'$;
app. Si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$ alors $(u\ v) \Rightarrow (u'\ v')$;
μ. Si $u \Rightarrow u'$ alors $\mu\alpha.u \Rightarrow \mu\alpha.u'$;
$[]$. Si $u \Rightarrow u'$ alors $[\alpha]u \Rightarrow [\alpha]u'$;
Réductions.
$\rhd_\lambda$. Si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$ alors $(\lambda x.u\ v) \Rightarrow u'[v'/x]$.
$\rhd_\mu$. Si $e \Rightarrow e'$ et $v \Rightarrow v'$ alors $(\mu\alpha.e\ v) \Rightarrow \mu\alpha.e'\left[[\alpha](\centerdot\ v')/[\alpha]\centerdot\right]$.
$\rhd_r$. Si $e \Rightarrow e'$ et $v_1 \Rightarrow v'_1, \ldots, v_n \Rightarrow v'_n$ alors $[\alpha](\mu\beta.e\ v_1\ \ldots\ v_n) \Rightarrow e'\left[[\alpha](\centerdot\ v'_1\ \ldots\ v'_n)/[\beta]\centerdot\right]$ (le cas particulier $n = 0$ donne $[\alpha]\mu\beta.e \Rightarrow e'[\alpha/\beta]$).

Lemme 3.3 *On a pour tous termes t et t' :*
- Si $t \triangleright_1 t'$ alors $t \Rightarrow t'$;
- si $t \Rightarrow t'$ alors $t \triangleright t'$;
- $\Rightarrow^* = \triangleright$.

Démonstration.
- La première assertion du lemme est évidente (la réduction par renommage est le cas particulier $n = 0$ dans $\triangleright_r$).
- La seconde assertion se prouve par une induction évidente sur la définition de la relation $\Rightarrow$. La clause $\triangleright_r$ est obtenue par renommage et n μ-réductions.
- La troisième assertion est une conséquence immédiate de la première. ■

Lemme 3.4 *Si $\Rightarrow$ a la propriété de Church-Rosser alors $\triangleright$ a la propriété de Church-Rosser.*

Démonstration. Si $t \triangleright t'$ et $t \triangleright t''$ alors il existe t^0 tel que $t \triangleright t^0$, par induction sur la structure de t (ce lemme est générique et ne dépend que du lemme précédent, il s'agit donc du même lemme qu'en λ-calcul). ■

Lemme 3.5 *La relation $\Rightarrow$ est compatible avec la substitution est la μ-substitution :*

subst. si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$ alors

$$u[v/x] \Rightarrow u'[v'/x] \ ;$$

subst$_\mu$. Si $u \Rightarrow u'$ et $v_1 \Rightarrow v_1', \ldots, v_n \Rightarrow v_n'$ alors

$$u\left[[\alpha](\centerdot\ v_1\ \ldots\ v_n)/[\beta]\centerdot\right] \Rightarrow u'\left[[\alpha](\centerdot\ v_1'\ \ldots\ v_n')/[\beta]\centerdot\right]$$

(le cas particulier $n = 0$ donne $u[\beta/\alpha] \Rightarrow u'[\beta/\alpha]$).

Démonstration (*subst).* Pour la substitution usuelle, la démonstration se fait par induction sur la définition de la relation $\Rightarrow$ essentiellement de la même façon qu'en λ-calcul, voyons le cas où la dernière règle utilisée est $\triangleright_r$:

$$\begin{array}{ll} & [\alpha](\mu\beta.u\ v_1\ \ldots\ v_n)[v/x] = [\alpha](\mu\beta.u[v/x]\ v_1[v/x]\ \ldots\ v_n[v/x]) \\ \Rightarrow & u'[v'/x]\left[[\alpha](\centerdot\ v_1'[v'/x]\ \ldots\ v_n'[v'/x])/[\beta]\centerdot\right] = u'\left[[\alpha](\centerdot\ v_1'\ \ldots\ v_n')/[\beta]\centerdot\right][v'/x] \quad \textit{(Hyp. d'ind.)} \end{array}$$

Démonstration (*subst$_\mu$).* Pour la μ-substitution, la démonstration se fait de façon analogue par induction sur la définition de la relation $\Rightarrow$. Si la dernière règle est une règle de passage au contexte *var*, λ, *app*, [] et μ le résultat est évident. Les cas où la dernière règle est une règle de réduction, $\triangleright_\lambda$ ou $\triangleright_\mu$ se traitent de la même façon que pour la substitution usuelle.

Voyons la règle $\triangleright_r$. On doit montrer :

$$[\eta](\mu\gamma.e\ u_1\ \ldots\ u_p)\left[[\alpha](\centerdot\ v_1\ \ldots\ v_n)/[\beta]\centerdot\right] \overset{?}{\Rightarrow} e'\left[[\eta](\centerdot\ u_1'\ \ldots\ u_p')/[\gamma]\centerdot\right]\left[[\alpha](\centerdot\ v_1'\ \ldots\ v_n')/[\beta]\centerdot\right]$$

Si $\eta \neq \beta$, cela fonctionne de façon identique aux cas précédents. Dans le cas $\eta = \beta$, on voit apparaître la raison pour laquelle il a fallu introduire un nombre arbitraire d'arguments pour la règle $\triangleright_r$ (on note parfois $\overline{v}$ pour $v_1\ \ldots\ v_n$) :

$$\begin{array}{lll} & [\beta](\mu\gamma.e\ u_1\ \ldots\ u_p)\left[[\alpha](\centerdot\ v_1\ \ldots\ v_n)/[\beta]\centerdot\right] & \\ = & [\alpha](\mu\gamma.e\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v})/[\alpha]\centerdot\right]\ u_1\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v})/[\alpha]\centerdot\right]\ldots\ u_p\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v})/[\alpha]\centerdot\right]\ v_1\ \ldots\ v_n) & \\ \Rightarrow & e'\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v'})/[\alpha]\centerdot\right]\left[[\alpha](\centerdot\ \ u_1'\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v'})/[\alpha]\centerdot\right]\ldots\ u_p'\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v'})/[\alpha]\centerdot\right]\ v_1'\ \ldots\ v_n')/[\gamma]\centerdot\right] & \textit{(hyp.} \\ = & e'\left[[\eta](\centerdot\ u_1'\ \ldots\ u_p')/[\gamma]\centerdot\right]\left[[\alpha](\centerdot\ v_1'\ \ldots\ v_n')/[\beta]\centerdot\right] & \textit{d'ind.)} \end{array}$$

(ci-dessus la règle $\triangleright_r$ a été utilisée pour $n + p$ arguments). ■

Lemme 3.6 *La relation $\Rightarrow$ a la propriété de Chuch-Rosser.*

Démonstration. On montre que si $t \Rightarrow t'$ et $t \Rightarrow t''$ alors il existe un terme t^0 tel que $t' \Rightarrow t^0$ et $t'' \Rightarrow t^0$, par induction sur la structure du terme t. On examine alors la façon dont ont été obtenues chacune des deux relations $t \Rightarrow t'$ et $t \Rightarrow t''$: Quand elles sont obtenues par règles de passage au contexte (*var*, λ, *app*, μ, []) le résultat suit immédiatement par hypothèse d'induction.

Supposons maintenant qu'au moins l'une des deux réductions, disons $t \Rightarrow t'$, a été obtenue par l'une des règles de réductions, distinguons chacun des cas.

- Il s'agit de $\triangleright_\lambda$, soit $t = (\lambda x.u\ v) \Rightarrow u'[v'/x] = t'$. L'autre réduction ne peut-être obtenue que par passage au contexte ou par $\triangleright_\lambda$.
  - Par passage au contexte on a $t'' = (t''_1\ v'')$, $\lambda x.u \Rightarrow t''_1$ et $v \Rightarrow v''$, et vu la définition de $\Rightarrow$, nécessairement $t''_1 = \lambda x.u''$ avec $u \Rightarrow u''$. par hypothèse d'induction il existe u^0 et v^0 tels que $u' \Rightarrow u^0$, $u'' \Rightarrow u^0$, $v' \Rightarrow v^0$, $v'' \Rightarrow v^0$. Par définition de $\Rightarrow$, $t'' = (\lambda x.u''\ v'') \Rightarrow u^0[v^0/x]$. D'autre part d'après la première partie du lemme 3.5, $u'[v'/x] \triangleright u^0[v^0/x]$, d'où le résultat.
  - Le cas où la réduction $t \Rightarrow t''$ est obtenue elle aussi par $\triangleright_\lambda$ se traite de façon analogue : $t = (\lambda x.u\ v) \Rightarrow u''[v''/x] = t''$, et on conclut par hypothèse d'induction et avec le lemme 3.5 dans les deux cas.
- Il s'agit de $\triangleright_\mu$, soit $t = (\mu\alpha.e\ v) \Rightarrow \mu\alpha.e'\left[[\alpha](\centerdot\ v')/[\alpha]\centerdot\right] = t'$. L'autre réduction est obtenue nécessairement par passage au contexte ou par la même règle $\triangleright_\mu$:
  - Par passage au contexte on a $t'' = (t''_1\ v'')$, avec $\mu\alpha.e \Rightarrow t''_1$ et $v \Rightarrow v''$, nécessairement t''_1 est obtenu par passage au contexte. On a $t'' = (\mu\alpha.e''\ v'')$, avec $e \Rightarrow e''$, $v \Rightarrow v''$, on a par hypothèse d'induction e^0 et v^0 tels que $e' \Rightarrow e^0$ et $e'' \Rightarrow e^0$, ainsi que $v' \Rightarrow v^0$ et $v'' \Rightarrow v^0$. Par définition de $\Rightarrow$, on obtient $t'' = (\mu\alpha.e''\ v'') \Rightarrow \mu\alpha.e^0\left[[\alpha](\centerdot\ v^0)/[\alpha]\centerdot\right]$. D'autre part d'après la seconde partie du lemme 3.5 (avec $n = 1$) on a $t' = \mu\alpha.e'\left[[\alpha](\centerdot\ v')/[\alpha]\centerdot\right] \Rightarrow \mu\alpha.e^0\left[[\alpha](\centerdot\ v^0)/[\alpha]\centerdot\right]$.[1]
  - Supposons que la réduction $t \Rightarrow t''$ soit également obtenue par la règle $\triangleright_\mu$: $t'' = \mu\alpha.e''\left[[\alpha](\centerdot\ v'')/[\alpha]\centerdot\right]$. Par hypothèse d'induction il existe e^0 et v^0 tels que $e' \Rightarrow e^0$ et $e'' \Rightarrow e^0$, ainsi que $v' \Rightarrow v^0$ et $v'' \Rightarrow v^0$ et t' et t'' se réduisent en $\mu\alpha.e^0\left[[\alpha](\centerdot\ v^0)/[\alpha]\centerdot\right]$ par définition de $\Rightarrow$.
- Il s'agit de $\triangleright_r$, soit $t = [\alpha](\mu\beta.e\ v_1\ \ldots\ v_n) \Rightarrow e'\left[[\alpha](\centerdot\ v'_1\ \ldots\ v'_n)/[\beta]\centerdot\right] = t'$. L'autre réduction est obtenue soit par passage au contexte à partir de réduction dans e et les v_i, soit par passage au contexte et réduction de $(\mu\beta.e\ v_1)$, soit également par renommage.
  - $t'' = [\alpha](\mu\beta.e''\ v''_1\ \ldots\ v''_n)$. Par hypothèse d'induction il existe $e^0, v^0_1, \ldots, v^0_n$ tels que $e' \Rightarrow e^0$, $e'' \Rightarrow e^0$, $v'_i \Rightarrow v^0_i$, $v''_i \Rightarrow v^0_i$. D'après la deuxième partie du lemme 3.5, $t' \Rightarrow e^0\left[[\alpha](\centerdot\ v^0_1\ \ldots\ v^0_n)/[\beta]\centerdot\right]$. Par définition de $\Rightarrow$, $t'' \Rightarrow e^0\left[[\alpha](\centerdot\ v^0_1\ \ldots\ v^0_n)/[\beta]\centerdot\right]$.
  - $t'' = [\alpha](\mu\beta.e''\left[[\beta](\centerdot\ v''_1)/[\beta]\centerdot\right]\ v''_2\ \ldots\ v''_n)$. On définit $e_0, v^0_1, \ldots, v^0_n$ comme au cas précédent. D'après la deuxième partie du lemme 3.5, $t' \Rightarrow e^0\left[[\alpha](\centerdot\ v^0_1\ \ldots\ v^0_n)/[\beta]\centerdot\right]$. Par définition de $\Rightarrow$,

$$t'' \Rightarrow e^0\left[[\beta](\centerdot\ v^0_1)/[\beta]\centerdot\right]\left[[\alpha](\centerdot\ v^0_2 \ldots\ v^0_n)/[\beta]\centerdot\right] = e^0\left[[\alpha](\centerdot\ v^0_1\ \ldots\ v^0_n)/[\beta]\centerdot\right]\ .$$

  - $t'' = e''\left[[\alpha](\centerdot\ v''_1\ \ldots\ v''_n)/[\beta]\centerdot\right]$. On définit $e_0, v^0_1, \ldots, v^0_n$ comme au cas précédent. Le résultat suit en appliquant deux fois le lemme 3.5 ∎

[1] Ce cas contient en particulier l'exemple qui justifie la clause $\triangleright_r$ donné au début du paragraphe 3.1.1 . La "difficulté" a été traitée dans la preuve du lemme 3.5.

On déduit des lemmes 3.3, 3.4 et 3.6 le théorème suivant.

Théorème 3.7 *La relation de réduction du $\lambda\mu$-calcul (obtenue par clôture transitive de la β-réduction, la réduction structurelle et le renommage) a la propriété de Church-Rosser.*

Propriété de Church-Rosser avec la règle η_μ. Dorénavant $\triangleright_1$ et $\triangleright$ désignent à nouveau les relations de réduction définies à partir des 4 réductions élémentaires (logique, structurelle, renommage et η_μ). La propriété reste vraie si l'on ajoute la η_μ réduction. La démonstration est essentiellement la même. Il faut modifier la définition de la relation $\Rightarrow$ en ajoutant la clause suivante à sa définition :

$\triangleright_{\eta_\mu}$. Si $u \Rightarrow u'$ alors $\mu\alpha[\alpha]u \Rightarrow u'$.

et en généralisant la clause $\triangleright_\mu$ de la façon suivante :

$\triangleright_\mu$. Si $e \Rightarrow e'$ et $v_1 \Rightarrow v_1', \ldots, v_n \Rightarrow v_n'$ alors $(\mu\alpha.e\, v_1\ \ldots\ v_n) \Rightarrow \mu\alpha.e'\left[[\alpha](\centerdot\ v_1'\ \ldots\ v_n')/[\alpha]\centerdot\right]$.

Les lemmes 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 s'énoncent de la même façon. Les démonstrations des lemmes 3.3 et 3.4 sont les mêmes. La démonstration du lemme 3.5 doit tenir compte des modifications, mais n'est pas essentiellement différente.

Démonstration (3.5). Il suffit de compléter la démonstration ci-dessus faite sans la règle η_μ. Il faut traiter les nouvelles réductions pour chacune des deux substitutions. La modification de la réduction $\triangleright_\mu$ n'altère pas essentiellement la démonstration. Pour la réduction η_λ, la substitution usuelle ne pose pas de problème particulier, pour la μ-substitution, on doit montrer que si $u \triangleright u'$, $\ldots v_i \triangleright v_i' \ldots$, et u ne contient pas d'occurrence libre de α alors $\mu\gamma[\gamma]u\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v})/[\beta]\centerdot\right] \Rightarrow u\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v})/[\beta]\centerdot\right]$. Si $\gamma \neq \beta$ c'est une conséquence immédiate de l'hypothèse d'induction et de la définition de $\Rightarrow$ (règle η_μ). Si $\gamma = \beta$, les termes sont inchangés par la μ-substitution. ■

Pour la démonstration du lemme 3.6 on doit traiter un peu plus de paires critiques.

Démonstration (lemme 3.6). La preuve se fait de la même façon : on montre par induction sur la structure d'un terme t tel que $t \Rightarrow t'$ et $t \Rightarrow t''$ l'existence d'un terme t^0 tel que $t' \Rightarrow t^0$ et $t'' \Rightarrow t^0$. De même les cas non évidents sont ceux ou l'une des deux réduction n'est pas obtenue par passage au contexte. Si c'est par règle $\triangleright_\lambda$ la preuve est identique. Si $t \Rightarrow t'$ est obtenue par la nouvelle règle $\triangleright_\mu$ généralisée, il faut compléter la preuve. Voyons les nouveaux cas.

– On écrit parfois $\overline{v}$ pour $v_1, \ldots, v_p$. En inspectant soigneusement la preuve sans la règle η_μ, on s'aperçoit que quand on a la réduction $t = (\mu\alpha.e\ \overline{v}) \Rightarrow \mu\alpha.e'\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v'})/[\alpha]\centerdot\right] = t'$, il est alors possible que t'' soit obtenu par passage au contexte suivie de la règle η_μ si $e = [\alpha]u$ et α n'apparaît pas dans u. Supposons donc que : $t = (\mu\alpha.[\alpha]u\ \overline{v}) \Rightarrow (u''\ \overline{v''})$ avec $u \Rightarrow u''$ et $v_i \Rightarrow v_i''$. On doit examiner comment a été obtenue $e \Rightarrow e'$: si c'est par passage au contexte, cela signifie que $e' = [\alpha]u'$, et on conclut par hypothèse d'induction sur u et $\overline{v}$, et d'après le lemme 3.5. Le seul autre cas possible pour $e \Rightarrow e'$ est la règle de renommage $\triangleright_r$. Cela signifie que

$$e = [\alpha]u = [\alpha](\mu\beta.f\ w_1\ \ldots\ w_n) \Rightarrow f'\left[[\alpha](\centerdot\ w_1'\ \ldots\ w_n')/[\beta]\centerdot\right] = e'$$

Rappelons que u ne contient pas α, donc f' et les w_i' non plus et alors

$$\mu\alpha.f'\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{w'})/[\beta]\centerdot\right]\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{v'})/[\alpha]\centerdot\right] = \mu\alpha.f'\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{w'}\ \overline{v'})/[\beta]\centerdot\right]\ .$$

Par ailleurs u'' est obtenu soit par passage au contexte à partir de réduction sur f et les w_i, soit par une règle $\triangleright_\mu$ pour k arguments ($k \leq n$) et passage au contexte. Si l'on suppose que $0 \leq k \leq n$, le schéma suivant résume la situation :

$$\begin{array}{ccc} (\mu\alpha.[\alpha](\mu\beta.f\ w_1\ \ldots\ w_n)\ \overline{v}) & \Rightarrow & \mu\alpha.f'\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{w'}\ \overline{v'})/[\beta]\centerdot\right] \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\mu\beta.f''\left[[\beta](\centerdot\ w''_1\ \ldots\ w''_k)/[\beta]\centerdot\right]\ w''_{k+1}\ \ldots\ w_n\ \overline{v''}) & \Rightarrow & ? \end{array}$$

Pour trouver le réduit commun on procède par hypothèse d'induction pour trouver des $f_0, \ldots w_i^0 \ldots, \ldots v_i^0 \ldots$convenables. On obtient comme réduit commun

$$t^0 = \mu\alpha.f^0\left[[\alpha](\centerdot\ \overline{w^0}\ \overline{v^0})/[\beta]\centerdot\right]$$

par passage au contexte pour $t' \Rightarrow t^0$ et par règle $\triangleright_\mu$ pour $t'' \Rightarrow t^0$.

– Si $t \Rightarrow t''$ est également obtenue par règle $\triangleright_\mu$, on doit maintenant envisager le cas où cela se fait pour un nombre différent d'arguments, par exemple plus petit, le schéma suivant indique la solution qui utilise l'hypothèse d'induction et le lemme 3.5 :

$$\begin{array}{ccc} t = (\mu\alpha.e\ v_1\ \ldots\ v_p) & \Rightarrow & \mu\alpha.e'\left[[\alpha](\centerdot\ v'_1\ \ldots\ v'_p)/[\alpha]\centerdot\right] = t' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ t'' = (\mu\alpha.e''\left[[\alpha](\centerdot\ v''_1\ \ldots\ v''_k)/[\alpha]\centerdot\right] v''_{k+1}\ \ldots\ v''_p) & \Rightarrow & \mu\alpha.e^0\left[[\alpha](\centerdot\ v^0_1\ \ldots\ v^0_p)/[\alpha]\centerdot\right] = t^0 \end{array}$$

Supposons maintenant que $t \Rightarrow t'$ est obtenu par règle $\triangleright_{\eta_\mu}$, c'est à dire $t = \mu\alpha.[\alpha]u \Rightarrow u'$, avec $u \Rightarrow u'$. Si $t \Rightarrow t''$ est obtenu également par règle η_μ, ou par passage au contexte à partir de $u \Rightarrow u''$ on conclut par hypothèse d'induction. La seule autre possibilité est que $u = (\mu\beta.e\ v_1\ \ldots\ v_p)$ et que $t \Rightarrow t''$ soit obtenu par renommage puis passage au contexte. La réduction $u \Rightarrow u'$ peut-être obtenue par passage au contexte à partir des réductions de e et des v_i ou par $\triangleright_\mu$ et éventuellement passages au contexte. On peut résumer ainsi la situation, en supposant $0 \leq k \leq p$:

$$\begin{array}{ccc} t = (\mu\alpha.[\alpha](\mu\beta.e\ v_1\ \ldots\ v_p) & \Rightarrow & (\mu\beta.e'\left[[\beta](\centerdot\ v'_1\ \ldots\ v'_k)/[\beta]\centerdot\right]\ v'_{k+1}\ \ldots\ v'_p) = t' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ t'' = \mu\alpha.e''\left[[\alpha](\centerdot\ v''_1\ \ldots\ v''_p)/[\beta]\centerdot\right] & \Rightarrow & \mu\beta.e^0\left[[\beta](\centerdot\ v^0_1\ \ldots\ v^0_p)/[\beta]\centerdot\right] = t^0 \end{array}$$

Et on conclut de façon analogue au cas précédent (il faut renommer une liaison μ). ■

3.1.2 Évaluation du $\lambda\mu$-calcul.

Si un $\lambda\mu$-term est exécuté par une machine à environnement pour la réduction gauche (machine de Krivine), on pourra interpréter le code $\mu\alpha$ par « sauver la pile (le contexte d'évaluation courant) dans α » et le code $[\alpha]$ par « restaurer la pile (le contexte d'évaluation courant) ».

[*à compléter*]

3.1.3 Extensions du $\lambda\mu$-calcul.

On peut de façon analogue au λ-calcul étendre le $\lambda\mu$-calcul avec des opérateurs pour la conjonction, les types de données avec paramètre...On doit alors ajouter en plus de la règle de réduction propre au type de donnée, la règle de réduction structurelle pour l'opérateur μ et la nouvelle règle d'élimination (en suivant le schéma de la table 3 page 6). Par exemple dans le cas des entiers (système T) on doit ajouter la réduction

$$(rec\ \mu\alpha.e\ t_0\ t_s) \triangleright_1 \mu\alpha.e\left[[\alpha](rec\ \centerdot\ t_0\ t_s)/[\alpha]\centerdot\right]$$

La propriété de Church-Rosser s'étend de la même façon que pour le λ-calcul.

3.2 $\lambda\mu$-calcul typé.

On donne à la table 5 une version de la déduction naturelle avec plusieurs formules à droite comme système d'assignation de type pour le $\lambda\mu$-calcul.

$$\frac{}{x : A \vdash x : A}\ \text{Ax.}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \to B, \Delta \quad \Gamma' \vdash v : A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash (u\ v) : B, \Delta, \Delta'} \to_e \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash u : B, \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x.u : A \to B, \Delta} \to_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : \forall x A, \Delta}{\Gamma \vdash u : A[t/x], \Delta}\ \forall_e \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A[y/x], \Delta}{\Gamma \vdash u : \forall x A, \Delta}\ \forall_i\ (*)$$

$(*)$*Restriction* : y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, A, Δ.

$$\frac{\Gamma \vdash u : C, \Delta}{\Gamma \vdash [\alpha]u : , \alpha : C, \Delta}\ \text{nommage} \qquad \frac{\Gamma \vdash e : , \alpha : C, \Delta}{\Gamma \vdash \mu\alpha.e : C, \Delta}\ \mu$$

TAB. 5 – $\lambda\mu$-calcul typé

On peut étendre les règles de typage , au raisonnement égalitaire et, avec de nouveaux opérateurs, aux entiers (système $TT1$) ou aux autres types de données.

On peut également étendre les règles de typage du $\lambda\mu$-calcul à la logique du second ordre (les règles sur la quantification ne sont pas interprétées au niveau des termes).

Dans le cas de l'absurde on obtient les règles suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash u : \bot, \Delta}{\Gamma \vdash [\gamma]u : , \Delta}\ \text{nommage} \qquad \frac{\Gamma \vdash e : , \Delta}{\Gamma \vdash \mu\delta.e : \bot, \Delta}\ \mu$$

δ n'a pas d'occurrences libres dans e

et les règles de la négation, définie avec $\bot$ sont donc :

$$\frac{\Gamma \vdash u : \neg A, \Delta \quad \Gamma' \vdash v : A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash [\gamma](u\ v) : , \Delta, \Delta'} \neg_e \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash e : , \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x.\mu\delta.e : \neg A, \Delta} \neg_i$$

Si l'on combine la règle d'élimination de la négation avec un affaiblissement droit pour obtenir une règle usuelle d'élimination de la négation intuitionniste, on obtient :

$$\frac{\Gamma \vdash u : \neg A, \Delta \quad \Gamma' \vdash v : A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \mu\delta.[\gamma](u\ v) : C, \Delta, \Delta'}\ \neg_e{}'$$

La version suivante en logique classique est une généralisation (α peut apparaître dans u et v) :

$$\frac{\Gamma \vdash u : \neg A, \alpha : C, \Delta \quad \Gamma' \vdash v : A, \alpha : C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \mu\alpha.[\gamma](u\ v) : C, \Delta, \Delta'}\ \neg_e{}'$$

On l'utilise pour dériver l'exemple suivant :
Exemple. $\neg\neg A \to A$

$$\dfrac{\dfrac{y : \neg\neg A \vdash y : \neg\neg A \quad \dfrac{x : A \vdash x : A}{\vdash \lambda x.\mu\delta.[\alpha]x : \neg A, \alpha : A}\ \text{nommage} + \neg_i}{y : \neg\neg A \vdash \mu\alpha.[\gamma](y\ \lambda x.\mu\delta.[\alpha]x) : A}\ \neg_e{}'}{\vdash \lambda y.\mu\alpha.[\gamma](y\ \lambda x.\mu\delta.[\alpha]x) : \neg\neg A \to A}\ \to_i$$

La dérivation de la loi de Peirce est analogue :
Exemple. $((A \to B) \to A) \to A$

$$\dfrac{\dfrac{y : (A \to B) \to A \vdash y : (A \to B) \to A \quad \dfrac{x : A \vdash x : A}{\vdash \lambda x.\mu\delta.[\alpha]x : A \to B, \alpha : A}\ \text{nommage} + \mu + \to_i}{y : (A \to B) \to A \vdash \mu\alpha.[\alpha](y\ \lambda x.\mu\delta.[\alpha]x) : A}\ \to_e + \text{nommage} + \mu}{\vdash \lambda y.\mu\alpha.[\alpha](y\ \lambda x.\mu\delta.[\alpha]x) : ((A \to B) \to A) \to A}\ \to_i$$

Les réductions du $\lambda\mu$-calcul correspondent à des réduction de preuve. Le type est donc conservé par réduction :

Proposition 3.8 *Si $\Gamma \vdash t : C, \Delta$ est dérivable et $t \triangleright t'$ alors $\Gamma \vdash t' : C, \Delta$ est dérivable.*

Démonstration. Comme en λ-calcul : on montre tout d'abord que si le séquent $\Gamma \vdash t : C, \Delta$ a une preuve, alors il a une preuve sans coupures sur les $\forall$ ni de règle μ suivie d'une règle $\forall_e$. On en déduit le résultat.

Ce résultat s'étend à la logique du second ordre, au système T classique, au système $TT1$ classique ...

3.3 Normalisation forte.

Proposition 3.9 *Si u est un $\lambda\mu$-terme typable en calcul propositionnel, u est fortement normalisable.*

Ce résultat s'étend à la logique du second ordre (voir [Parigot LICS93] ou [Parigot 94]), ou au système T classique...

[*à compléter*]

3.4 Les systèmes T et $TT1$ classique.

[*très incomplet*, quelques indications]

On ajoute les règles de la logique classique à celles du système $TT1$, les opérateurs [] et μ aux termes du système T. Les réductions sont celles du $\lambda\mu$-calcul, celles du système T et les μ-réduction pour les règles d'élimination $\wedge_e$ et N_e.

$$(rec\ \mu\alpha.e\ t_0\ t_s) \triangleright_1 \mu\alpha.e\left[[\alpha](rec\ \centerdot\ t_0\ t_s)/[\alpha]\centerdot\right]$$

Dans ce contexte la propriété de correction n'est plus valide dans les mêmes termes ; en effet il existe des preuves normales de $N\underline{s}^n\underline{0}$ qui ne sont pas intuitionnistes :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{0 : N\underline{0}}{(s\ x) : N\underline{s}\underline{0}}}{\mu\delta[\alpha](s\ x) : N\underline{0}, \alpha : N\underline{s}\underline{0}}}{(s\ \mu\delta[\alpha](s\ x)) : N\underline{s}\underline{0}, \alpha : N\underline{s}\underline{0}}}{\mu\alpha.[\alpha](s\ \mu\delta[\alpha](s\ x)) : N\underline{s}\underline{0}}$$

On va décrire l'ensemble des termes clos de type N. Pour démontrer ce résultat on le généralise légèrement

Lemme 3.10 *Un $\lambda\mu$-terme t est typable par :*

$$\vdash t : N, \alpha_1 : N, \ldots, \alpha_n : N$$

si et seulement si $t \in \mathcal{N}_c$, où $\mathcal{N}_c$ est le plus petit ensemble tel que :

i. $0 \in \mathcal{N}_c$ *;*

ii. *si α et β sont deux variables distinctes, alors $\mu\alpha[\beta].0 \in \mathcal{N}_c$;*

iii. *si $u \in \mathcal{N}_c$, alors $(s\ u) \in \mathcal{N}_c$;*

iv. *si α et β sont deux variables distinctes et si $u \in \mathcal{N}_c$, alors $\mu\alpha.[\beta](s\ u) \in \mathcal{N}_c$.*

Démonstration. On vérifie facilement par induction sur la construction de $\mathcal{N}_c$ que les termes de $\mathcal{N}_c$ sont typables de type N, dans le contexte qui déclare leurs μ-variables libres de type N.

On montre la réciproque par récurrence sur la hauteur d'une preuve normale de

$$\vdash t : N, \alpha_1 : N, \ldots, \alpha_n : N\ .$$

Un telle preuve normale ne peut se terminer que par une règle d'introduction de N ou par une μ. si c'est une règle d'introduction, ce ne peut être que N_{i_0}, et $t = 0$, ou N_{i_s} et $t = (s\ u)$ avec $\vdash u : N, \alpha_1 : N, \ldots, \alpha_n : N$. d'où le résultat par hypothèse d'induction.

Si c'est une règle μ, alors $t = \mu\alpha.e$ et e n'a pu être obtenu que par nommage ; la variable en jeu est distincte de α car la preuve est normale pour la réduction η_μ, il s'agit donc de l'un des α_i. On a donc $t = \mu\alpha.[\alpha_i]u$ avec

$$\vdash u : N, \alpha : N, \alpha_1 : N, \ldots, \alpha_n : N\ .$$

Par ailleurs u ne peut être obtenu par règle μ puisque la preuve est normale pour le renommage, u est donc obtenu par règle d'introduction pour N ce qui donne le résultat. ■

On déduit immédiatement de ce lemme la proposition suivante.

Proposition 3.11 *L'ensemble des $\lambda\mu$-termes normaux de type N dans le système T (avec les règle de réduction de renommage et η_μ) est l'ensemble des termes clos (sans λ ni μ-variables libres) de $\mathcal{N}_c$.*

Contrairement à ce qui se passe en logique intuitionniste, il y a des termes typés de type N dans le système T qui ne correspondent pas à des entiers : on peut "mélanger" dans une preuve de N des copies d'entiers distincts ce qui n'est pas possible en calcul des prédicats (système $TT1$).

Il existe des *opérateurs de sortie* pour les entiers qui transforment les termes t de type $N\underline{s}^n\underline{0}$ en $(s^n\ 0)$. Ce sont les *opérateurs de mise en mémoire* introduits par J.L. Krivine ([Krivine 90]). On les obtient comme des termes de type $\forall x(N^\circ x \to \neg_\circ\neg_\circ Nx)$ où $\circ$ est une constante propositionnelle, $\neg_\circ A$ désigne $A \to \circ$ et N° a les même règles d'introduction que le type entier et la même règle d'élimination, mais restreinte aux formules de la forme $\neg_\circ A$. Un exemple d'un tel terme est (on introduit quelques informations de type, mais Φ est un terme pur) :

$$\Phi = \lambda n.(rec\ n\ \lambda x^{\neg_\circ N\underline{0}}.(x\ 0)\ \lambda d\lambda g^{\neg_\circ\neg_\circ Nx}\lambda h^{\neg_\circ N\underline{s}x}.(g\ \lambda m^{Nx}.(h\ (s\ m))))$$

On montre alors l'analogue de la propriété de correction :

Proposition 3.12 *Si u est un $\lambda\mu$-terme de type $N\underline{s}^n\underline{0}$, et f un terme alors :*

$$(\Phi\ u\ f) \triangleright (f\ (s^n\ 0))$$

de plus cette réduction est une réduction de tête.

Références

[Krivine 90] Jean-Louis Krivine, opérateurs de mise en mémoire et traductions de Gödel. Archiv for Mathematical Logic 30, 1990, pp 241-267.

[Parigot 92] Michel Parigot, *$\lambda\mu$-calculus : an Algorithmic Interpretation of Classical Natural Deduction*, Proc. International Conference on Logic Programming and Automated Deduction, StPetersburg (Russia), 1992, Springer LNCS 624, pp 190-201.

[Parigot LICS93] Michel Parigot, *Strong Normalization for Second Order Classical Natural Deduction*, Proceedings LICS 1993, pp 39-47.

[Parigot 93] Michel Parigot, *Classical Proofs as Programs*, Proceedings Kurt Godel Colloquium 1993, LNCS 713, pp 263-276.

[Parigot 94] Michel Parigot, *Proofs of Strong Normalization for Second Order Classical Natural Deduction*, Journal of Symbolic Logic, (1994).

[*à compléter*]