Université PARIS VII

Thèse de Doctorat

Spécialité : Mathématiques

dirigée par Michel Parigot (Jean-Pierre Ressayre)

présentée par Paul Rozière

Sujet de thèse :

RÈGLES ADMISSIBLES EN CALCUL PROPOSITIONNEL INTUITIONNISTE.

soutenue le 13 mai 1992

Jury :

Gabriel Sabbagh	Président
Jean Gallier	Examinateurs
Jean-Yves Girard	
Michel Parigot	
Jean-Pierre Ressayre	
Thierry Coquand	Rapporteurs
Dirk Van Dalen	

Règles admissibles en calcul propositionnel intuitionniste.

Paul Rozière
Equipe de Logique, CNRS UA 753
Université Paris 7
2 place Jussieu, 75230 PARIS cedex 05
roziere@logique.jussieu.fr

Résumé

Le travail suivant tente d'éclaicir les liens entre admissibilité et dérivabilité en calcul propositionnel intuitionniste.

La première partie (sections 1, 2, 3) donne des conditions simples pour que ces deux notions soient identiques. On utilise en particulier une sorte particulière de substitutions (définie en section 2), dont on montrera dans la deuxième partie qu'elles caractérisent, en un certain sens, l'admissibilité.

La deuxième partie (sections 4, 5) réutilise certaines des méthodes introduites (les substitutions introduites dans la section 2), et des cas particuliers très simples des résultats montrés en section 3, pour obtenir une caractérisation de l'admissibilité par la "rétro-dérivation" en calcul des séquents. C'est le résultat central de la thèse. On obtient ainsi certains résultats de décidabilité, en particulier la décidabilité de l'admissibilité, ainsi que d'autres caractérisations.

La troisième partie (section 6, 7) illustre le résultat précédent et en donne des applications. On décrit complètement en section 6 le cas à une variable. On donne en section 7 une axiomatisation dénombrable de l'admissibilité, et l'on en déduit l'impossibilité d'une axiomatisation finie. On en déduit en section 8 que la logique classique n'est pas la plus petite logique au dessus de la logique intuitionniste telle que toutes les règles admissibles soient dérivables.

Un résumé plus conséquent est donné dans l'introduction.

Admissible rules in Intuitionistic Propositional Calculus.

Abstract

A rule is said admissible in a logic if the set of valid formulae of this logic is closed under this rule. In classical propositional calculus all admissible rules are derivable (provable inside the logic), but that is not the case in intuitionistic logic. In this thesis we study how admissibility is related with derivability in Intuitionistic propositional calculus.

The first part gives sufficient syntactic conditions for admissible rules to be derivable. We define a particular class of substitutions useful when dealing with admissibility.

The second part uses this class of substitution and simple particular cases of the first part to give characterization of admissibility using the intuitionistic sequent of calculus (precisely a kind of "retro-derivation" in sequent calculus). It is the central result of the thesis. It leads to decidable criteria for admissibility and other related notions.

The third part illustrates these results and gives applications of them. The one variable case is completely described. We give then a complete countable axiomatization of admissibility, and we infer that their is no finite one. We use this axiomatization to exhib the least super-intuitionistic Logic in which all intuitionistic admissible rules are derivable. In this logic every admissible rule is derivable, and this is not Classical Logic.

Table des matières

Introduction

L'intuitionnisme, tel qu'il est introduit par Brouwer au début de ce siècle, est une philosophie des mathématiques qui s'inscrit dans la controverse de l'époque sur les fondations. L'une de ses caractéristiques est de remettre en cause la logique classique. Les preuves doivent être constructives et en particulier, la loi du tiers-exclu, "$A \vee \neg A$" n'est pas valide a priori (voir [Du 77], [Tr vD 88], [vD 86], [Gi 87] en particulier le chapitre I).

La logique dite intuitionniste a été formalisée sous sa forme actuelle par Heyting en 1930.

Bien que diverses traditions plus ou moins proches de l'intuitionnisme soient toujours bien vivantes actuellement, elles semblent concerner et intéresser un nombre restreint de mathématiciens non logiciens ou informaticiens.

Cependant, indépendemment de tout point de vue sur les fondations, la programmation a donné de nouvelles motivations à l'étude et au développement de systèmes formels de logique intuitionniste. En effet une preuve en logique intuitionniste, formalisée en déduction naturelle, peut s'écrire comme un λ-terme typé, et le λ-terme extrait comme un programme qui réalise en un certain sens la spécification donnée par la proposition prouvée. Il est important du point de vue informatique que cette transformation soit très naturelle, et ne fasse pas intervenir de codages intermédiaires. C'est ce qui la différencie par exemple des notions de réalisabilité en terme de fonctions récursives (Kleene 45).

La logique intuitionniste de Heyting a d'autre part pour intérêt sa proximité avec la logique classique : le langage est le même, tout énoncé prouvable intuitionnistiquement est prouvable en logique classique, il existe une traduction de la logique classique en logique intuitionniste ($\neg\neg$-traduction de Gödel), les fonctions récursives prouvables dans les arithmétiques classiques et intuitionnistes sont les mêmes.

Un phénomène intervient souvent en logique intuitionniste. Choisissons une notion de "règle" très générale : si les formules $A_1, \ldots, A_n$, (moyennant éventuellement certaines restrictions syntaxiques sur ces formules) sont prouvables, alors il existe un terme t et une formule C_i tel que $C_i(t)$ est prouvable (dans le cas propositionnel, C_i). Par exemple on peut montrer dans l'arithmétique de Heyting la propriété de disjonction : si $A \vee B$ est prouvable A est prouvable ou B est prouvable, ou plus généralement, si H satisfait certaines hypothèses, $H \to A$ est prouvable ou $H \to B$ est prouvable. La propriété d'existence est analogue, si $\exists A$ est prouvable, il existe un terme t tel que $A(t)$ soit prouvable. Ces dernières propriétés sont éminemment liées au caractère constructif de la logique intuitionniste.

Les propriétés de disjonction et d'existence étant connues, on peut reformuler la notion de règle introduite ci-dessus sans perdre de généralité : si les formules $A_1, \ldots, A_n$, moyennant certaines restrictions sur ces formules, sont prouvables alors la formule C est prouvable (on pose C la disjonction des clôtures existentielles des C_i).

Ces propriétés de clôture sont souvent utiles. Par exemple, pour montrer que les fonctions récursives prouvables dans l'arithmétique classique sont les fonctions prouvables dans l'arithmétique intuitionniste, on est amené à montrer la clôture des théorèmes de l'arithmétique intuitionniste (HA) sous (un cas particulier de) la règle de Markov (voir [Fr 77]) : si $\vdash_{HA}$ $\forall n, m(\varphi(n,m) \vee \neg\varphi(m,n))$ et $\vdash_{HA}$ $\neg\neg\exists m\varphi(m,n))$ alors $\vdash_{HA}$ $\exists m\varphi(m,n))$. (voir également [Tr 73] pour cet exemple et d'autres). Remarquons qu'à la règle de Markov correspond un axiome, le principe de Markov, qui s'exprime dans le langage de l'arithmétique. Ce principe n'est pas intuitionnistiquement démontrable ([Tr 73, vD 86]).

Le but de cette thèse est d'étudier ce phénomène dans le cadre restreint du calcul propositionnel. Plus précisément, on s'interesse aux règles du type : si les formules $A_1, \ldots, A_n$ sont prouvables, alors la formule C est prouvable. Quand une de ces règles n'introduit pas de nouveaux théorèmes, elle sera dite admissible. Il peut arriver, comme pour le principe de Markov, que l'axiome correspondant $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to C$ ne soit pas prouvable, et on dit que la règle n'est pas dérivable. Ce phénomène est fortement lié à l'impossibilité de donner en calcul des séquents intuitionniste propositionnel (une seule formule à droite) les règles gauche de "$\to$" et droite du "$\vee$" de façon inversible. Une règle est inversible quand la conjonction des prémisses de la règle équivaut à la conclusion. On peut considérer que l'axiomatisation de l'admissibilité donnée en section 7 donne une formulation précise de ce que le phénomène des règles admissibles non dérivables se réduit à la non-inversibilité de ces deux règles. D'une façon plus générale ce phénomène est donc lié à ce qui fait la spécificité de la logique intuitionniste : interprétation fonctionnelle des preuves, propriété de disjonction.

Il est à remarquer que la non-inversibilité de ces règles est également liée en sémantique de Kripke ([Kr 63, Kr 65]) à "l'arborescence" des modèles. Plus précisément, la règle ($\to$ *gauche*) est liée à la longueur des branches, la règle ($\vee$*droite*) au branchement.

Cependant, l'apparition de règles admissibles non dérivables nécessite la présence *simultanée* de ces deux règles, comme le montrent les résultats de la première partie de cette thèse (on montre par exemple que dans le fragment sans le connecteur "$\to$", comme celui sans le connecteur "$\vee$" toute les règles admissibles sont dérivables, et d'autre résultats plus généraux qui vont dans le même sens).

Essayons de préciser. Un résultat central de la thèse est qu'une règle admissible s'obtient, soit par dérivation, soit par la recherche des preuves possibles d'éventuelles substituées des prémisses de cette règle en calcul des séquents (d'où le lien avec l'existence de règles non-inversibles), soit par composition de ces deux procédés. En particulier on ne peut rien dire des preuves possibles d'un séquent qui contient une variable propositionnelle, d'où la nécessité de la présence simultanée des deux règles non inversibles pour l'apparition de règles admissibles non dérivables.

Le calcul des séquents de Gentzen n'est utilisé ici que de façon "statique" et non "dynamique" : on utilise par exemple seulement l'existence d'une démonstration sans coupures, et non l'élimination des coupures. De ce point de vue, on pourrait également penser utiliser la méthode des tableaux sémantiques de Beth. Celle-ci correspond, (comme remarqué dans [Be 65]) à une formulation du calcul des séquents avec plusieurs formules à droite, et une restriction sur la règle droite de "$\rightarrow$", qui est alors la seule règle non inversible du calcul. Le phénomène des règles admissibles non dérivables s'analyserait alors d'une façon analogue.

Contenu de la thèse

Le point de départ de ce travail m'a été donné par la lecture du manuscript d'une conférence de W.Dekkers donné à Edinburgh, dans le cadre du Jumelage λ-calcul typé 89. W.Dekkers montre que pour les formules écrites seulement avec le connecteur "$\rightarrow$", règles admissibles et dérivables sont les mêmes. Son argument est astucieux mais très simple. Il suffit, pour une règle donnée de prémisse A et de conclusion C, de substituer à chaque variable α dans ces formules la formule $A \rightarrow \alpha$, et de remarquer que cette substitution "s'hérite" pour les formules dans le fragment considéré, à savoir que la substituée de A est prouvable, et que celle de C est équivalente à $A \rightarrow C$. On montre donc que si cette règle est admissible, elle est prouvable, et ceci en utilisant une seule instance de cette règle (voir pour des précisions la section 3.1). Il se trouve que G.E.Mints avait déja montré ce résultat et d'autres, en utilisant essentiellement le même argument ([Mi 72]).

Dans la première partie (sections 1 à 3) de cette thèse, on étend ce résultat dans deux directions. D'une part on montre que cet argument permet de caractériser une propriété plus forte que l'admissibilité (voir section 2 en particulier définition 2.2.3), d'autre part et surtout on donne des conditions syntaxiques plus générales sous lesquelles admissibilité égale dérivabilité.

La méthode est le suivante. Pour une formule A donnée, on montre que pour toute formule C, les règles "si A alors C" admissibles sont dérivables en exhibant un ensemble fini de substitutions caractéristique (par exemple dans le cas des formules écrites seulement avec le connecteur "$\rightarrow$",on a une seule substitution caractéristique, la substitution "$s(\alpha) = A \rightarrow \alpha$"). D'une part ces substitutions doivent valider A, d'autre part la conjonction des formules obtenues en appliquant ces substitutions à une formule quelconque C doit avoir pour conséquence $A \rightarrow C$ (par dérivation).

Cette méthode est générale. En effet, on montrera en section 5 (corollaire 5.5.5) la réciproque, à savoir que si une formule A vérifie pour toute formule C que les règles "si A alors C" admissibles sont dérivables, alors il existe un tel ensemble fini de substitutions caractéristique. On peut d'ailleurs voir a posteriori les résultats de la section 3, comme une illustration du corollaire 5.5.5.

Dans la deuxième partie (sections 4 et 5), on met en évidence une espèce de système de déduction pour l'admissibilité. On ajoute à la dérivation qui donne bien entendu des règles admissibles, un autre procédé que nous appelons rétro-dérivation (voir section 4) : c'est la formalisation d'une méthode souvent utilisée pour montrer qu'une règle est admissible. Il s'agit sommairement d'étudier comment peuvent se terminer toutes les preuves possibles en calcul des séquents d'une formule donnée. Tant que les séquents ainsi produits ne contiennent pas de variable propositionnelle, ils ne peuvent être conclusion que d'un nombre fini de règles (indiquées par les connecteurs principaux des formules du séquent).

Le résultat essentiel de la section 5 (proposition 5.5.3) est que la combinaison de la dérivation et de la rétro-dérivation engendrent toutes les règles admissibles. Il s'agit donc d'un résultat de complétude, et la preuve s'apparente à une preuve de complétude usuelle. La notion de sémantique est assurée par les substitutions, que l'on peut voir comme des valuations sur l'ensemble des formules (ou sur le quotient de de celui-ci par équivalence). Cependant des complications interviennent, du fait que pour pouvoir définir des substitutions on doit manipuler des ensembles finis de formules (par exemple à la notion de saturation utilisée usuelle dans les preuves de complétude correspond ici une saturation sur un ensemble fini). D'autre part la rétro-dérivation n'est pas une notion simple de déduction, ce qui induit également des perturbations.

On obtient également d'autres résultats comme le corollaire 5.5.5 déja mentionné ci-dessus, ou la caractérisation suivante de l'admissibilité : pour toute formule A il existe un ensemble fini de substitutions tel que la règle "si A, alors C" soit admissible si et seulement si ces substitutions valident la formule C. Comme par ailleurs un algorithme inspiré de la preuve de complétude fournit cet ensemble fini, et que la prouvabilité est décidable en calcul propositionnel intuitionniste, on montre ainsi que l'admissibilité est décidable.

La troisième partie (section 6 à 8) illustre ou donne des applications des résultats précédents. La section 6 traite complètement le calcul propositionnel à une variable du point de vue de l'admissibilité. Il s'agit donc d'un exercice assez anecdotique, mais où les diverses notions s'illustrent aisément.

La section 7 donne une axiomatisation infinie de l'admissibilité, et utilise fortement le résultat de complétude. Les règles utilisées pour l'axiomatisation sont exactement celles dont on a besoin, en plus de règles dérivables, pour exprimer les règles admissibles obtenues de la façon suivante :

> on se place dans le calcul des séquents intuitionniste, avec une seule formule à droite. Si un séquent qui ne contient que des formules gauche de connecteur principal "$\rightarrow$", et une formule droite de connecteur principal "$\vee$", est prouvable, alors la disjonction des prémisses des règles pouvant avoir ce séquent pour conclusion, est prouvable.

Comme ces règles sont clairement des instances des règles "($\rightarrow$ *gauche*)"et "($\vee$ *droite*)", cette axiomatisation lie d'une façon claire l'existence de règles admissibles avec la non inversibilité de ces deux règles. On obtient ainsi une formalisation plus manipulable que la rétro-dérivation, mais on perd a priori toute "maîtrise" sur les déductions qui utiliseraient ces règles. En particulier on ne voit pas comment utiliser l'ensemble infini de règles indiqué pour une procédure de décision.

La preuve de l'axiomatisation serait une conséquence simple du résultat de complétude, si la rétro-dérivation ne tenait compte des "redondances" (s'il existe une preuve en calcul des séquents d'une certaine formule, il existe une preuve de la même formule telle qu'aucune branche de la preuve ne comporte la répétition d'un même séquent). Il faut donc un procédé pour les éliminer. Celui-ci est analogue à celui utilisé pour donner une formulation du calcul propositionnel des séquents intuitionniste ne nécessitant pas le test de redondance pour décider de la prouvabilité (voir [Dy 91]).

On montre également que cette suite infinie de règles est strictement croissante pour la relation de conséquence, et on en déduit facilement qu'il n'y a pas d'axiomatisation finie de l'admissibilité.

La section 8 enfin donne une application immédiate des résultats de la section 5 et de la section 7. On définit une logique au dessus de la logique intuitionniste dans laquelle toutes les règles, admissibles en logique intuitionniste ainsi que dans cette logique même, sont dérivables.

Travaux précédents, comparaisons

Un certain nombre de résultats existent sur les règles admissibles.

G.E.Mints a montré, voir [Mi 72], qu'admissibilité et dérivabilité se confondaient dans le fragment de la logique intuitionniste sans le connecteur "$\rightarrow$" ainsi que dans le fragment sans le connecteur "$\vee$".

G.E.Mints utilise un argument qui est essentiellement le même que celui donné ici (section 3.1), pour les formules dans le fragment "$\wedge, \rightarrow$", et en quelque sorte réduit les autre cas à celui-ci.

Les principales différences entre [Mi 72] et la première partie de cette thèse sont que

- l'on montre que les restrictions n'ont à porter que sur les prémisses de la règle considérée,
- les résultats sont étendus également en ce qui concerne la forme des prémisses (par exemple formules de Harrop),
- l'argument est isolé (2), il est utilisé uniformément, pour tous les fragments considérés et non par des procédés de réduction (ce qui est une illustration des corollaires 5.5.2 et 5.5.5 de la deuxième partie).

D'autres travaux utilisent fortement la sémantique de la logique intuitionniste en terme d'algèbres de Heyting (ou algèbres pseudo-booléeennes) comme [Ci 77, Ci 78], ainsi que [Ry 84, Ry 85, Ry 86]. Les travaux de Rybakov utilisent de plus la traduction de la logique intuitionniste dans une logique modale adéquate (S4 ou de Grzegorczyk).

A.I.Citkin donne un ensemble infini de règles admissibles indépendantes [Ci 77], des caractérisations en termes d'algèbres et des exemples de logique plus forte que la logique intuitionniste où toutes les règles admissibles sont dérivables [Ci 77, Ci 78].

V.V.Rybakov démontre la décidabilité de l'admissibilité en calcul propositionnel intuitionniste par le biais de la logique S4 [Ry 84], par le biais de la logique de Grzegorczyk [Ry 86], résolvant ainsi un problème posé par H.Friedman (problème no 40 de [Fr 75]). Il montre également qu'il n'existe pas d'axiomatisation finie de l'admissibilité [Ry 85].

L'article [Ro 9 ?] est une version un peu condensée et en anglais des sections 2 et 3 de la présente thèse. Le préprint [Ro 91] est une version préliminaire de ses deux premières parties.

La majeure partie du présent travail a été réalisée dans l'ignorance de ces résultats. En particulier nous redémontrons les résultats de Rybakov d'une façon complètement différente. Aucun usage n'est fait ici de méthodes sémantiques, hormis pour des résultats très simples de non-prouvabilité, où l'on utilise la sémantique de Kripke qui donne un argument convainquant sous une forme compacte. Il pourrait d'ailleurs être interessant de lier les deux approches.

En conclusion,on présente dans ce qui suit des méthodes qui différent de celles utilisées dans les travaux antérieurs, principalement par :

l'utilisation explicite et systématique des substitutions définies en section 3,

l'utilisation particulière du calcul des séquents (formalisation de la rétro-dérivation).

Ces méthodes conduisent, d'une part, pour ce qui est de la rétro-dérivation à des preuves très différentes de résultats existant (comme la décidabilité de l'admissibilité) d'autre part à des résultats qui semblent nouveaux :

les résultats de la première partie qui étendent ceux de G.Mints ;

Les résultats de caractérisation de l'admissibilité, (complétude pour la rétro-dérivabilité plus la dérivabilité, caractérisation par un nombre fini de substitutions) ;

les caractérisations des formules ayant mêmes conséquences admissibles et dérivables,

l'axiomatisation explicite de l'admissibilité.

Remerciements

J'ai bénéficié pendant la majeure partie de ce travail d'une allocation de recherche M.R.T. Je remercie les enseignants du DEA de Logique de Paris VII, qui ont décidé de son attribution. Je remercie plus généralement tous les membres de l'équipe de Logique qui m'ont donné les moyens tant intellectuels que matériels de mener à bien cette thèse. Certaines remarques de Jean-Baptiste Joinet, plusieurs discussions avec Gilles Amiot m'ont été particulièrement utiles. Les compétences en traitement de texte, et autres matières informatiques, de Laurent Régnier, Christophe Raffalli, Vincent Danos et Pascal Manoury m'ont économisé beaucoup de temps et de peine. Jean-Pierre Ressayre a eu la gentillesse d'accepter d'être d'être mon directeur de thèse "en titre". Je dois beaucoup à Michel Parigot qui a effectivement dirigé cette thèse, trop pour le détailler ici.

Je remercie les membres du jury d'avoir accepté d'en faire partie.

Je remercie Wim Dekkers, que je ne connais pas, mais dont le manuscript est à l'origine de ce travail.

Première partie

Admissibilité, liens avec la dérivabilité

1 Préliminaires

1.1 Notations

Nous utiliserons, pour désigner les formules du calcul propositionnel, les abréviations $A \to B \to C$ ou $A, B, \to C$ voire s'il n'y a pas d'ambiguïté $A, B \to C$ pour $A \to (B \to C)$.
Si $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ est un ensemble fini de formules, nous utilisons les notations ambiguës suivantes :

- $\Gamma \to C$ pour la formule $A_1, \ldots, A_n \to C$, (C si $\Gamma = \emptyset$) ;
- $\wedge\Gamma$ pour la formule $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ ($\top$ si $\Gamma = \emptyset$) ;
- $A \wedge \Gamma$ pour la formule $A \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ (A si $\Gamma = \emptyset$).

En changeant l'ordre des A_i, on obtient des formules toutes équivalentes dans les logiques considérées, donc l'ambiguité de la notation ne pose pas vraiment de problèmes.

Les opérateurs unaires, $\neg$, le symbole $\wedge$ utilisé devant un ensemble comme ci-dessus sont prioritaires sur les opérateurs binaires.

La relation de déduction en logique classique est notée $\vdash_c$, en logique intuitionniste $\vdash$, on écrit $A \equiv B$ pour $A \vdash B$ *et* $B \vdash A$.

1.2 Définitions

On peut, de façon générale, définir une règle admissible dans une logique $\mathcal{L}$ de la façon suivante :

Définition 1.2.1 *Si $A_1, \ldots, A_n, C$ sont des formules de la logique $\mathcal{L}$, contenant des méta-variables, nous dirons que*

$$\frac{\vdash_{\mathcal{L}} A_1 \ldots \vdash_{\mathcal{L}} A_n}{\vdash_{\mathcal{L}} C}$$

est une règle admissible dans $\mathcal{L}$ et nous noterons :

$$A_1, \ldots, A_n \gg C,$$

pour exprimer que l'ensemble des théorèmes de $\mathcal{L}$ est clos par application de cette règle.

Dans ce qui suit nous nous restreignons à des calculs propositionnels. Nous considérerons que les variables propositionnelles jouent le rôle de méta-variables. Dans ce cas particulier, la définition suivante est alors équivalente à la précédente :

Définition 1.2.2 *Nous dirons que*

$$\frac{\vdash_{\mathcal{L}} A_1 \ldots \vdash_{\mathcal{L}} A_n}{\vdash_{\mathcal{L}} C}$$

est une règle admissible dans $\mathcal{L}$ si et seulement si pour toute substitution s de formules propositionnelles portant sur les variables propositionnelles :

$$\text{si } \vdash_{\mathcal{L}} s(A_1), \ldots, \vdash_{\mathcal{L}} s(A_n), \text{ alors } \vdash_{\mathcal{L}} s(C).$$

L'un des buts de ce qui suit est de comparer la notion de règle admissible à la notion de règle dérivable.

Définition 1.2.3 *Nous dirons que*

$$\frac{\vdash_{\mathcal{L}} A_1 \ldots \vdash_{\mathcal{L}} A_n}{\vdash_{\mathcal{L}} C},$$

est une règle dérivable dans $\mathcal{L}$ ssi :

$$\vdash_{\mathcal{L}} A_1, \ldots, A_n, \rightarrow C.$$

La proposition suivante est évidemment vraie.

Proposition 1.2.4 *Toute règle dérivable dans une logique avec Modus Ponens est admissible.*

En calcul propositionnel classique, la réciproque est vraie.

Proposition 1.2.5 *En calcul propositionnel classique toute règle admissible est dérivable.*

Preuve : par complétude. On pose $\top = A \vee \neg A, \bot = A \wedge \neg A$, si ces constantes ne sont pas prédéfinies. On associe à chaque valuation v sur 0,1 la substitution s_v définie sur chaque variable prositionnelle α par :
si $v(\alpha) = 0$, alors $s_v(\alpha) = \bot$;
si $v(\alpha) = 1$, alors $s_v(\alpha) = \top$.
Il est immédiat que, pour toute formule A, $\vdash s_v(A)$ si et seulement si $v(A) = 1$.

Soit maintenant une règle admissible $A_1, \ldots, A_n \gg C$. Toute substitution qui valide les prémisses A_i valide la conclusion. C'est en particulier le cas des substitutions s_v, et ce pour toute valuation v. On on déduit que toute valuation qui valide les A_i valide C, et donc que $\vdash A_1, \ldots, A_n \rightarrow C$. ■

Dans la suite on désignera également les valeurs de vérité par $\bot$ et $\top$.

Le but de ce qui suit est d'étudier les rapports entre dérivabilité et admissibilité en logique intuitionniste.

Des règles admissibles non dérivables apparaissent également dans d'autres logiques, par exemple certaines logiques modales.

1.3 Calcul propositionnel intuitionniste

Les variables propositionnelles sont représentées par les lettres minuscules de l'alphabet grec. Les connecteurs sont $\vee, \wedge, \rightarrow, \perp$. Le connecteur 0-aire $\perp$ est une constante propositionnelle pour l'absurde. On choisit donc de définir $\neg A$ comme abréviation pour $A \rightarrow \perp$. Ce choix n'a pas d'influence sur les résultats qui suivent. On aurait les mêmes résultats avec une négation primitive, et l'absurde défini par $\perp = A \wedge \neg A$.
Il existe en logique intuitionniste des règles admissibles non dérivables.

les exemples suivants sont bien connus.

- $\neg\alpha \rightarrow \beta \vee \gamma \gg (\neg\alpha \rightarrow \beta) \vee (\neg\alpha \rightarrow \gamma)$
  $\neg\alpha \rightarrow \beta \vee \gamma \nvdash (\neg\alpha \rightarrow \beta) \vee (\neg\alpha \rightarrow \gamma)$.
- $(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \beta \vee \gamma \gg ((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \beta) \vee ((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma) \vee ((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha)$
  $(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \beta \vee \gamma \nvdash ((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \beta) \vee ((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma) \vee ((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha)$.

Les preuves sont très simples. Nous les donnons aux paragraphes 4.3 et 7.3.

Dans tout ce qui suit, nous nous restreignons au calcul propositionnel intuitionniste.

1.4 Présupposés

Nous utiliserons la version suivante du théorème de Glivenko.

Proposition 1.4.1 (Théorème de Glivenko) *Une formule qui commence par une négation est démontrable intuitionnistiquement si et seulement si elle est démontrable classiquement. Par conséquent pour Γ un ensemble fini de formules :*

$$\vdash \Gamma \rightarrow \perp \ \ ssi \ \ \vdash_c \Gamma \rightarrow \perp .$$

En effet $\Gamma \rightarrow \perp \equiv \neg(\wedge\Gamma)$.
Pour la preuve, voir par exemple [Tr vD 88].

Nous utiliserons également la propriété de disjonction en logique intuitionniste :

Proposition 1.4.2 (propriété de disjonction) *Soient C et D deux formules :*

$$\vdash C \vee D \ \ ssi \ \ \vdash C \ ou \ \vdash D.$$

Il existe différentes méthodes qui conduisent à ce résultat. L'une des plus élémentaire est d'utiliser le “slash” de Kleene ou l'une de ses variantes (voir par exemple [Tr vD 88]). Une autre est d'utiliser l'existence d'une preuve sans coupures en calcul des séquents intuitionniste (voir par exemple [Du 77]).

1.5 Quelques propriétés immédiates de l'admissibilité

On peut remarquer que, en dehors de la règle droite de l'implication, toutes les règles du calcul des séquents intuitionniste (formulation avec au plus une seule formule à droite), y compris règles structurelles et coupure, sont valides pour l'admissibilité, i.e. en remplaçant le symbole $\vdash$ par le symbole $\gg$. En fait, si on interprète les "," de droite par des $\vee$, il en est de même pour les règles du calcul des séquents classique excepté toujours la règle droite de l'implication. Ces règles sont d'ailleurs valides intuitionnistiquement. On peut même remarquer que, les règles "inversibles" du calcul des séquents intuitionniste (la conjonction des prémisses de la règle équivaut à la conclusion cf 4.1), sont également inversibles pour l'admissibilité. Nous détaillons certains cas dans les paragraphes suivants.

1.5.1 Conjonction

$$\Gamma \gg C \wedge C' \;\; ssi \;\; \Gamma \gg C \; et \; \Gamma \gg C' \; ;$$
$$A \wedge A', \Gamma \gg C \;\; ssi \;\; A, A', \Gamma \gg C \; .$$

1.5.2 Affaiblissement

$$Si \;\; \Gamma \gg C \;\; alors \;\; \Gamma, B \gg C \; .$$

1.5.3 Disjonction

$$\Gamma, B \vee B' \gg C \;\; ssi \;\; \Gamma, B \gg C \; et \; \Gamma, B' \gg C \; .$$

Il est évident par affaiblissement que si $\Gamma, B \vee B' \gg C$, alors $\Gamma, B \gg C$ et $\Gamma, B' \gg C$. La réciproque est une conséquence de la propriété de disjonction. En effet, supposons que $\Gamma, B \gg C$ et $\Gamma, B' \gg C$. Supposons que s est une substitution telle que pour toute formule A de Γ, $s(A)$ soit prouvable et telle que $s(B \vee B')$ soit prouvable. On en déduit par la propriété de disjonction que $s(B)$ est prouvable ou $s(B')$ est prouvable. On peut dans chacun des cas appliquer l'une des deux règles supposées admissibles ci-dessus. On conclut que $s(C)$ est prouvable.

1.5.4 Implication

$$Si \;\; \Gamma \gg B \to C \;\; alors \;\; \Gamma, B \gg C \; .$$

Par contre il n'y a pas d'équivalent du lemme de déduction pour l'admissibilité, puisqu'il existe des règles admissibles non dérivables et que " $\gg C$ " si et seulement si " $\vdash C$ ". On a cependant la propriété suivante :

$$\Gamma \gg C \;\; ssi \;\; \Gamma \gg \Gamma \to C \; .$$

1.5.5 Négation

Nous utiliserons plus loin ceci :

Lemme 1.5.1 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\Gamma \gg \bot$,
(ii) $\Gamma \vdash_c \bot$,
(iii) $\Gamma \vdash \bot$.

Preuve : (iii) équivaut à (ii) par le théorème de Glivenko (section 1.4). Il est évident que (iii) implique (i). Il nous suffit donc de montrer que (i) implique (ii).

Si $\Gamma \gg \bot$, il n'existe aucune substitution par $\bot$ ou $\top$ qui valide Γ, donc aucune valuation classique qui valide Γ. On en déduit, par complétude de la logique classique, que $\Gamma \vdash_c \bot$. ∎

Conséquence : *les propositions suivantes sont équivalentes :*
- $\Gamma \gg \neg C$,
- $\Gamma \vdash_c \neg C$,
- $\Gamma \vdash \neg C$.

1.5.6 Admissibilité et substitutions

La propriété suivante est évidente, mais utile.
Pour toute substitution s , si $\Gamma \gg C$ alors $s(\Gamma) \gg s(C)$.

1.5.7 Conséquences admissibles et dérivables

Nous allons commencer par étudier plus particulièrement les ensembles de formules ayant la propriété suivante :

Définition 1.5.2 *Nous dirons qu'une formule A (respectivement qu'un ensemble fini de formules Γ) a* mêmes conséquences admissibles et dérivables *pour exprimer que :*

$$A \gg C \; ssi \; A \vdash C \quad (respectivement \;\; \Gamma \gg C \; ssi \; \Gamma \vdash C) \; .$$

On peut déduire de la propriété énoncée au paragraphe 1.5.3 que :

Lemme 1.5.3 *L'ensemble des formules ayant mêmes conséquences admissibles et dérivables est stable par disjonctions.*

2 Substitutions

Il s'avère que, pour étudier l'admissibilité, on peut se limiter à une classe restreinte de substitutions, que nous étudions dans ce paragraphe.

2.1 Notations

Les substitutions sont des applications définies des variables dans les formules propositionnelles, et étendues naturellement aux formules propositionnelles. On note

$$[A_1/\alpha_1, \ldots, A_n/\alpha_n]$$

la substitution définie par

$$s(\alpha_1) = A_1, \ldots, s(\alpha_n) = A_n \textit{ et } s(\beta) = \beta \textit{ pour } \beta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

$s(C)$ est alors notée $C[A_1/\alpha_1, \ldots, A_n/\alpha_n]$.

2.2 Définitions

Définition 2.2.1 *Si Γ est un ensemble de formules nous dirons que la substitution s est une Γ-identité si pour toute variable propositionnelle α :*

$$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow s(\alpha) \ ,$$

ou encore, si Γ est fini :

$$\Gamma \to \alpha \equiv \Gamma \to s(\alpha).$$

Proposition 2.2.2

(i) *La substitution s est une Γ-identité ssi pour toute formule C :*

$$\Gamma \vdash C \leftrightarrow s(C) \ ,$$

ou encore, si Γ est fini :

$$\Gamma \to C \equiv \Gamma \to s(C) \ .$$

(ii) *L'ensemble des Γ-identités est stable par composition.*

(iii) *Si Γ est fini, C une formule propositionnelle et s une Γ-identité, alors :*

$$\Gamma \gg C \ \textit{ ssi } \ s(\Gamma) \gg s(C) \ .$$

Preuve : induction évidente sur la complexité de C pour le (i), évident pour le (ii). Pour le (iii) un sens est évident (voir 1.5.6), voyons la réciproque. On suppose $s(\Gamma) \gg s(C)$ et l'on veut montrer $\Gamma \gg C$. Soit donc σ une substitution validant Γ, c'est à dire telle que $\vdash \wedge\sigma(\Gamma)$. Comme s est une Γ-identité, on déduit du (i) que $\Gamma \vdash \wedge s(\Gamma)$, donc $\sigma(\Gamma) \vdash \wedge\sigma(s(\Gamma))$, et par hypothèse sur σ on obtient $\vdash \wedge\sigma(s(\Gamma))$. Or $s(\Gamma) \gg s(C)$, donc par définition de l'admissibilité $\vdash \sigma(s(C))$.

On utilise à nouveau le (i) qui donne $\Gamma \vdash C \leftrightarrow s(C)$, donc $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(C) \leftrightarrow \sigma(s(C))$. On utilise l'hypothèse sur σ et le précédent résultat pour conclure que $\vdash \sigma(C)$, ce qui est le résultat cherché. ∎

Définition 2.2.3 *Si Γ est un ensemble de formules, nous dirons qu'une substitution s est* Γ-validante *si pour toute formule C de Γ la formule $s(C)$ est démontrable. Nous dirons une* Γ-identité validante *pour une Γ-identité Γ-validante.*

Nous dirons que Γ a la propriété de disjonction pour l'admissibilité, *quand pour toutes formules C et D,*

$$\textit{si } \Gamma \gg C \vee D \textit{ alors } \Gamma \vdash C \textit{ ou } \Gamma \vdash D\,.$$

Ces définitions sont introduites à cause du résultat suivant :

Lemme 2.2.4 *Soit Γ un ensemble fini de formules.*

(i) *S'il existe une Γ-identité validante, alors Γ a la propriété de disjonction pour l'admissibilité.*

(ii) *Si Γ a la propriété de disjonction pour l'admissibilité, alors Γ a mêmes conséquences admissibles et dérivables.*

Preuve ((i)) : soit s la Γ-identité validante considérée, de :

$$\Gamma \gg C \vee D \ \textit{ et } \ \vdash \wedge s(\Gamma)\ ,$$

on déduit par définition de l'admissibilité que :

$$\vdash s(C) \vee s(D)\ ,$$

et par la propriété de disjonction :

$$\vdash s(C) \textit{ ou } \vdash s(D)\ .$$

En affaiblissant on obtient :

$$\vdash \Gamma \rightarrow s(C) \textit{ ou } \vdash \Gamma \rightarrow s(D)\ ,$$

et par définition d'une Γ-identité on a donc :

$$\vdash \Gamma \rightarrow C \textit{ ou } \vdash \Gamma \rightarrow D\ ,$$

c'est à dire :

$$\Gamma \vdash C \textit{ ou } \Gamma \vdash D\ .$$

Preuve ((ii)) : si $\Gamma \gg C$, alors $\Gamma \gg C \vee C$, donc $\Gamma \vdash C$ ou $\Gamma \vdash C$. ■

Nous montrerons la réciproque du (i) au paragraphe 5 .

Le corollaire suivant ne sera pas utilisé dans la suite. Il "explique" cependant d'une certaine façon par exemple le fait que l'on retrouve au paragraphe 3.4 les formules de Harrop.

Corollaire 2.2.5 *Si Γ a la propriété de disjonction pour l'admissibilité, en particulier s'il existe une Γ-identité validante, alors Γ a la propriété de disjonction, i.e.*

$$\textit{si } \Gamma \vdash C \vee D \textit{ alors } \Gamma \vdash C \textit{ ou } \Gamma \vdash D.$$

Preuve : si $\Gamma \vdash C \vee D$, alors $\Gamma \gg C \vee D$, d'où le résultat. ■

Remarquons que la réciproque est fausse. Ainsi la formule $\neg\alpha \to (\beta \vee \gamma)$ n'a pas la propriété de disjonction pour l'admissibilité, mais on peut facilement vérifier qu'elle a la propriété de disjonction. En effet une preuve en calcul des séquents (voir 4.1) d'un séquent $\neg\alpha \to (\beta \vee \gamma) \vdash (C \vee D)$ ne peut se terminer que par une règle droite sur le $\vee$. En effet $(\neg\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \vdash \neg\alpha$, qui équivaut à $\vdash \neg\alpha$, n'est pas prouvable.

Donnons une première application de ce qui précède.

2.3 Un exemple simple

Si α est une variable propositionnelle , alors $[\top/\alpha]$ est une α-identité validante, $[\bot/\alpha]$ est une $\neg\alpha$-identité validante, et donc α et $\neg\alpha$ ont la propriété de disjonction pour l'admissibilité.

En généralisant $[\top/\alpha_1, \dots, \top/\alpha_n, \bot/\beta_1, \dots, \bot/\beta_p]$ est une $\{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta_1 \wedge \dots \wedge \neg\beta_p\}$-identité. On en déduit par le lemme 1.5.3 que les formules construites avec $\wedge, \vee$ sur des variables et des variables niées ont mêmes conséquences admissibles et dérivables (sur ce fragment les formes normales conjonctives et disjonctives existent).

Remarquons que, comme une conjonction de formules niées (commençant par $\neg$) est une formule niée, il suffit pour généraliser le résultat à tout le fragment "$\wedge, \vee, \neg$", de trouver pour toute formule A,toutes variables α_i, une $\{\neg A, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$-identité validante. Il suffit pour cela de trouver une $\neg A[\top/\alpha_1, \dots, \top/\alpha_n]$-identité validante, que l'on pourra prolonger.. Finalement, il suffit donc, pour généraliser le résultat au fragment "$\wedge, \vee, \neg$", de trouver pour toute formule A une $\neg A$-identité validante.

Ceci sera fait dans la suite.

On va, dans la section suivante, utiliser les substitutions introduites pour donner des caractérisations d'ensembles de formules ayant mêmes conséquences admissibles et dérivables.

Ces substitutions interviennent à nouveau dans la deuxième partie. L'une des principales étapes de la démonstration de complétude pour la rétro-dérivation est la suivante. On construit une Γ-identité validante pour un ensemble Γ de formules clos sous une propriété de saturation particulière, qui est en l'occurence une restriction de la propriété de disjonction pour l'admissibilité sur un ensemble fini.

3 Quand admissibilité égale dérivabilité

Le premier résultat est un cas particulier du suivant mais sa preuve est particulièrement simple.

3.1 Le fragment "$\wedge, \to$"

Lemme 3.1.1 *Soient Γ un ensemble fini de formules, Var_Γ l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans les formules de Γ, s la substitution, identité en dehors de Var_Γ, définie pour α dans Var_Γ par :*

$$s(\alpha) = \Gamma \to \alpha \ \ pour \ \ \alpha \ \ dans \, Var_\Gamma \ ,$$

alors

(i) *pour toute formule C dans le fragment "$Var_\Gamma, \wedge, \to$" :*

$$s(C) \equiv \Gamma \to C \ ,$$

(ii) *s est une Γ-identité, donc pour toute formule C (sans restrictions)*

$$\Gamma \to s(C) \equiv \Gamma \to C \ .$$

Preuve ((i)) : par induction sur la structure de C.
Le résultat vient de la définition pour les variables propositionnelles.
Pour les pas d'induction on utilise les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} (\top \to \top) & : & (\Gamma \to A) \to (\Gamma \to B) \equiv \Gamma \to (A \to B) \ ; \\ (\top \wedge \top) & : & (\Gamma \to A) \wedge (\Gamma \to B) \equiv \Gamma \to (A \wedge B) \ ; \end{array}$$

qui se montrent sans difficulté.

Preuve ((ii)) : la définition 2.2.1 est évidemment satisfaite :

$$\Gamma \to \Gamma \to \alpha \equiv \Gamma \to \alpha \ . \qquad \blacksquare$$

Proposition 3.1.2

- *Si Γ est un ensemble fini de formules dans le fragment "$\wedge, \to$", alors la substitution s définie au lemme ci-dessus est une Γ-identité validante.*
- *Les formules du fragment "$\wedge, \to$" ont la propriété de disjonction pour l'admissibilité.*
- *Les formules du fragment "$\wedge, \to$" et les disjonctions de telles formules ont mêmes conséquences admissibles et dérivables.*

PREUVE : d'après le lemme 2.2.4, et le lemme 1.5.3, il suffit de montrer la première clause. On sait que que s est une Γ-identité d'après le lemme 3.1.1 (ii). Du (i) on déduit que pour toute formule A de Γ :

$$s(A) \equiv \Gamma \to A \equiv \top \ ,$$

donc s valide bien Γ. ∎

3.2 Le fragment "$\wedge, \to, \bot$" ou " $\wedge, \to, \neg$"

Lemme 3.2.1 *Soient Γ un ensemble fini de formules, Var_Γ l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans Γ.*
Soient v une valuation classique sur le fragment engendré par Var_Γ et s_v la substitution, identité en dehors de Var_Γ, et définie pour α dans Var_Γ par :
- *Si $v(\alpha) = \top$ alors $s_v(\alpha) = \Gamma \to \alpha$,*
- *Si $v(\alpha) = \bot$ alors $s_v(\alpha) = \neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to \alpha)$.*

Alors

(i) *pour toute formule C dans le fragment "$Var_\Gamma, \wedge, \to, \bot$" :*
- *Si $v(C) = \top$ alors $s_v(C) \equiv \Gamma \to C$,*
- *Si $v(C) = \bot$ alors $s_v(C) \equiv \neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to C)$.*

(ii) *s_v est une Γ-identité , donc pour toute formule C (sans restrictions)*

$$\Gamma \to s_v(C) \equiv \Gamma \to C \ .$$

PREUVE ((i)) : par induction sur la structure de C.
Le résultat vient de la définition pour les variables propositionnelles. Pour $\bot$ on remarque que :

$$\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to \bot) \equiv \bot \ .$$

Pour les pas d'induction on utilise, outre les équivalences $(\top \to \top)$ et $(\top \wedge \top)$ énoncées en section 3.1, les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
(\bot \to \top) & : & [\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to A)] \to (\Gamma \to B) \equiv \Gamma \to (A \to B) \ ; \\
(\bot \to \bot) & : & [\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to A)] \to [\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to B)] \equiv \Gamma \to (A \to B) \ ; \\
(\top \to \bot) & : & (\Gamma \to A) \to [\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to B)] \equiv \neg\neg\Gamma \wedge [\Gamma \to (A \to B)] \ ; \\
(\bot \wedge \top) & : & [\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to A)] \wedge (\Gamma \to B) \equiv \neg\neg\Gamma \wedge [\Gamma \to (A \wedge B)] \ ; \\
(\bot \wedge \bot) & : & [\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to A)] \wedge [\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to B)] \equiv \neg\neg\Gamma \wedge [\Gamma \to (A \wedge B)] \ .
\end{array}$$

Ces équivalences se prouvent sans difficultés. Remarquons que seule la troisième (cas $(\top \to \bot)$) utilise de façon indispensable l'absurdité intuitionniste afin de montrer :

$$(\Gamma \to A) \to \neg\neg\Gamma \equiv \neg\neg\Gamma \ .$$

Voyons un pas d'induction. Supposons que $C = A \to B$ et $v(C) = \bot$. Cela entraine que $v(A) = \top$ et $v(B) = \bot$. On en déduit par hypothèse d'induction que

$$s_v(A) \equiv \Gamma \to A \;\; et \;\; s_v(B) \equiv \neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to B)\,.$$

On utilise l'équivalence $(\top \to \bot)$ qui permet de conclure que

$$s_v(C) = s_v(A \to B) \equiv \neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to (A \to B)) = \neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to C)\,. \qquad \blacksquare$$

Preuve ((ii)) : l'équivalence est une égalité pour les variables propositionnelles hors de Var_Γ et pour $\bot$.
Elle se vérifie facilement pour les variables α de Var_Γ telles que $v(\alpha) = \top$.
Pour les variables α de Var_Γ telles que $v(\alpha) = \bot$, on remarque que :

$$\Gamma \to s_v(\alpha) = \Gamma \to [\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to \alpha)] \equiv \Gamma \to \alpha\,. \qquad \blacksquare$$

Proposition 3.2.2

(i) *Supposons que Γ soit un ensemble fini de formules dans le fragment "$\wedge, \to, \bot$" tel qu'il existe une valuation classique v vérifiant $v(\wedge\Gamma) = \top$, alors la substitution associée s_v définie au lemme 3.2.1 est une Γ-identité validante.*

(ii) *Les formules du fragment "$\wedge, \to, \bot$" ont la propriété de disjonction pour l'admissibilité.*

(iii) *Les formules du fragment "$\wedge, \to, \bot$" et les disjonctions de telles formules ont mêmes conséquences admissibles et dérivables.*

Preuve ((i)) : on sait que, pour toute valuation classique v convenable, s_v est une Γ-identité d'après le (ii) du lemme 3.2.1. la valuation particulière considérée v vérifie que $v(\wedge\Gamma) = \top$,et donc pour toute formule A de Γ, $v(A) = \top$. On déduit de ceci et du (i) du lemme 3.2.1 que

$$s_v(A) \equiv \Gamma \to A \equiv \top\,,$$

donc s_v est bien une substitution Γ-validante.

Preuve ((ii)) : dans le cas où il existe une valuation classique validant Γ, c'est une conséquence du (i).
Dans le cas où il n'en existe aucune, d'après le lemme 1.5.1 :

$$\Gamma \vdash \bot\,,$$

et donc pour toute formule C :

$$\Gamma \vdash C \;\; et \;\; \Gamma \gg C\,.$$

Preuve ((iii)) : conséquence de (ii), d'après le lemme 2.2.4 (ii). ■

Mints dans [Mi 72] démontre le (iii) de la proposition précédente dans le cas particulier où la formule conclusion de la règle admissible est aussi dans le fragment"$\wedge, \rightarrow, \perp$". Le (i) du lemme 3.2.1 suffit alors pour conclure.

On peut remarquer que toute formule qui commence par une négation est équivalente à une formule dans le fragment "$\wedge, \rightarrow, \perp$". Ceci se montre par induction en utilisant les équivalences suivantes :

$$\neg A \equiv \neg\neg\neg A \ ;$$

$$\neg\neg(A \rightarrow B) \equiv \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B \ ;$$

$$\neg\neg(A \wedge B) \equiv \neg\neg A \wedge \neg\neg B \ ;$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \ .$$

On déduit donc de ce qui précède le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.3 *Sous les hypothèses du lemme 3.2.1 la conclusion se généralise à une formule C qui commence par une négation i.e.*

- *Si* $v(C) = \top$ *alors* $s_v(C) \equiv \Gamma \rightarrow C$,
- *Si* $v(C) = \perp$ *alors* $s_v(C) \equiv \neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \rightarrow C)$.

3.3 Le fragment "$\wedge, \vee, \neg$"

On considère, uniquement dans ce paragraphe dont nous n'utiliserons pas les résultats dans la suite, que le "$\neg$" est primitif.

Les conclusions de la proposition 3.2.2 sont également valides pour les formules commençant par une négation. Ceci permet donc de montrer (voir 2.3), que les formules du fragment "$\wedge, \vee, \neg$" ont mêmes conséquences admissibles et dérivables. Cependant cette méthode n'est pas très satisfaisante puisque la Γ-identité validante employée comporte le connecteur $\rightarrow$. On aimerait une Γ-identité validante qui n'utilise que des formules dans le même fragment, la négation étant considérée comme primitive. Ceci est possible pour les formules niées. En effet, quand on remplace une sous-formule propre d'une formule niée, par une formule qui lui est classiquement équivalente, on obtient une formule niée intuitionnistiquement équivalente (c'est une conséquence du théorème de Glivenko). Or :

$$\Gamma \rightarrow \alpha \equiv_c \neg\Gamma \vee \alpha$$

$$\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \rightarrow \alpha) \equiv_c \Gamma \wedge \alpha \ .$$

On a donc le lemme suivant, que l'on peut d'ailleurs montrer directement sans grande difficulté.

Lemme 3.3.1 *Soient* Γ *un ensemble fini de formules,* Var_Γ *l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans* Γ.
Soient v *une valuation classique sur le fragment engendré par* Var_Γ *et* s'_v *la substitution, identité en dehors de* Var_Γ*, et définie pour* α *dans* Var_Γ *par :*

- *Si* $v(\alpha) = \top$ *alors* $s'_v(\alpha) = \neg\neg(\neg\Gamma \vee \alpha)$,
- *Si* $v(\alpha) = \bot$ *alors* $s'_v(\alpha) = \Gamma \wedge \alpha$.

Alors

(i) *pour toute conjonction* C *de variables propositionnelles et de formules niées :*
  - *Si* $v(C) = \top$ *alors* $s'_v(C) \equiv \neg\neg(\neg\Gamma \vee C)$,
  - *Si* $v(C) = \bot$ *alors* $s'_v(C) \equiv \Gamma \wedge C$.

(ii) s'_v *est une* Γ*-identité , en particulier pour toute formule* C *(sans restrictions)*

$$\Gamma \vdash s'_v(C) \leftrightarrow C \ .$$

(iii) *Si* Γ *est un ensemble fini non contradictoire de formules niées et de variables propositionnelles, et* v *est une valuation classique validant* Γ*, la substitution* s'_v *est une* Γ*-identité validante.*

Remarque : dans le cas particulier envisagé au paragraphe 2.3, on retrouve, à équivalence près, les substitutions indiquées alors.

Proposition 3.3.2

- *Si* Γ *est un ensemble fini non contradictoire de formules niées et de variables propositionnelles, et* v *est une valuation classique validant* Γ*, la substitution* s'_v *définie ci-dessus est une* Γ*-identité validante.*
- *Les conjonctions de variables propositionnelles et de formules niées ont la propriété de disjonction pour l'admissibilité.*
- *Les formules du fragment "*$\wedge, \vee, \neg$*" sont équivalentes à des disjonctions de conjonctions de variables propositionnelles et de formules niées. Elles ont mêmes conséquences admissibles et dérivables.*

Mints ([Mi 72]) montre le (iii) de la proposition dans le cas particulier où la conclusion de la règle est dans le même fragment. Dans ce cas le (i) du lemme précédent suffit.

Nous allons maintenant donner des classes de formules plus générales, dont les conséquences admissibles sont les conséquences dérivables.

3.4 Formules de Harrop

Les formules de Harrop (Rasiowa-Harrop) ont été introduites parce qu'elles possèdent la propriété de disjonction et ont une caractérisation syntaxique simple. Nous rappelons leur définition, dans le contexte restreint qui est le nôtre du calcul propositionnel.

Définition 3.4.1 *Les formules de Harrop sont les formules propositionnelles qui ne contiennent pas de disjonction en position strictement positive. On peut définir inductivement l'ensemble* $\mathbf{H}$ *des formules de Harrop de la façon suivante :*

- *pour toute formule atomique* α *(variable propositionnelle ou* $\perp$ *)* $\alpha \in \mathbf{H}$ *;*
- *si* A *est une formule quelconque, si* $B \in \mathbf{H}$*, alors* $A \to B \in \mathbf{H}$ *;*
- *si* $A \in \mathbf{H}$*, si* $B \in \mathbf{H}$*, alors* $A \wedge B \in \mathbf{H}$.

Par exemple $A_1 \to \ldots \to A_n \to \alpha$ est une formule de Harrop.

Définition 3.4.2 *les formules*

$$A_1 \to \ldots \to A_n \to \alpha\,,$$

où α *est atomique (soit* $\perp$*, soit une variable propositionnelle), sont appelées* formules de Harrop primitives*.*

Lemme 3.4.3 *Toute formule de Harrop est équivalente à une de conjonction de formules de Harrop primitives.*

PREUVE : par induction sur la définition de $\mathbf{H}$. On utilise pour le pas d'induction l'équivalence :

$$A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C)\ . \qquad \blacksquare$$

Nous allons utiliser la substitution s_v définie au paragraphe 3.2. Le lemme suivant permet d'étendre les résultats du lemme 3.2.1.

Lemme 3.4.4 *Sous les hypothèses du lemme 3.2.1, la conclusion (i) de ce même lemme s'étend aux formules de Harrop, i.e. pour toute formule de Harrop* C *:*

- *Si* $v(C) = \top$ *alors* $s_v(C) \equiv \Gamma \to C$ *,*
- *Si* $v(C) = \perp$ *alors* $s_v(C) \equiv \neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to C)$ *.*

PREUVE : d'après le lemme 3.4.3, on peut se limiter à C une conjonction de formules de Harrop primitives, et en appliquant les équivalences $(\top \wedge \top)$ de la section 3.1, $(\top \wedge \perp)$ et $(\perp \wedge \perp)$ de la section 3.2, on peut se limiter à C une formule primitive de Harrop. Posons donc :

$C = \Delta \to \alpha$ où α est atomique et $\Delta = \{B_1, \ldots, B_n\}$.

- Supposons tout d'abord que $v(\alpha) = \top$, et donc $v(C) = \top$.

$$s_v(\alpha) = \Gamma \to \alpha\ ,$$

donc :

$$\begin{aligned} s_v(C) &= s_v(\Delta \to \alpha) \\ &\equiv s_v(\Delta) \to \Gamma \to \alpha \\ &\equiv \Gamma \to s_v(\Delta) \to \alpha\ , \end{aligned}$$

or d'après le lemme 3.2.1, s_v est une Γ-identité donc :

$$s_v(C) \equiv \Gamma \to \Delta \to \alpha = \Gamma \to C \ .$$

- Supposons maintenant que $v(\alpha) = \bot$. On a donc :

$$s_v(\alpha) \equiv \neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to \alpha) \ ,$$

(c'est une égalité si α est une variable propositionnelle, l'équivalence est évidente si $\alpha = \bot$). On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} s_v(C) & = & s_v(\Delta \to \alpha) \\ & \equiv & s_v(\Delta) \to [\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to \alpha)] \\ & \equiv & [s_v(\Delta) \to \neg\neg\Gamma] \wedge [s_v(\Delta) \to \Gamma \to \alpha] \ . \quad (\star) \end{array}$$

Considérons le deuxième membre de la conjonction $(\star)$ ci-dessus. De même qu'au cas précédent on déduit de ce que s_v est une Γ-identité que :

$$[s_v(\Delta) \to \Gamma \to \alpha] \equiv \Gamma \to C \ .$$

Considérons le premier membre de la conjonction $(\star)$. De l'équivalence :

$$A \to \neg B \equiv \neg\neg A \to \neg B \ ,$$

on déduit que :

$$\begin{array}{rcl} s_v(\Delta) \to \neg\neg\Gamma & \equiv & \neg\neg s_v(\Delta) \to \neg\neg\Gamma \\ & \equiv & s_v(\neg\neg\Delta) \to \neg\neg\Gamma \ . \end{array}$$

Or $\neg\neg\Delta$ est une formule qui commence par une négation, donc d'après le corollaire 3.2.3 ($\neg\neg\Delta \equiv \neg\neg \wedge \Delta \equiv_c \wedge\Delta$) :
- soit $v(\wedge\Delta) = \top$ et alors $s_v(\neg\neg\Delta) \equiv \Gamma \to \neg\neg \wedge \Delta$,
- soit $v(\wedge\Delta) = \bot$ et alors $s_v(\neg\neg\Delta) \equiv \neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to \neg\neg \wedge \Delta)$.

Distinguons à nouveau deux cas, suivant la valeur de $v(\wedge\Delta)$.

Si $v(\wedge\Delta) = \top$, alors, comme $v(\alpha) = \bot$ et $C = \Delta \to \alpha$, $v(C) = \bot$. On a :

$$\begin{array}{rcl} s_v(\Delta) \to \neg\neg\Gamma & \equiv & (\Gamma \to \neg\neg\Delta) \to \neg\neg\Gamma \\ & \equiv & \neg\neg\Gamma \ . \end{array}$$

Reprenons $(\star)$. On a montré finalement dans ce cas le résultat voulu, c'est à dire que, si $v(C) = \bot$:

$$s_v(C) \equiv \neg\neg\Gamma \wedge \Gamma \to C \ .$$

Supposons maintenant $v(\wedge\Delta) = \perp$, alors, comme $v(\alpha) = \perp$ et $C = \Delta \to \alpha$, on a $v(C) = \top$. On a aussi :

$$\begin{aligned} s_v(\neg\neg\Delta) \to \neg\neg\Gamma &\equiv (\neg\neg\Gamma \wedge (\Gamma \to \neg\neg \wedge \Delta)) \to \neg\neg\Gamma \\ &\equiv \top . \end{aligned}$$

et donc, en reprenant $(\star)$:

$$s_v(C) \equiv \Gamma \to C \ ,$$

ce qui est le résultat voulu sachant que $v(C) = \top$. ∎

On peut remarquer que la preuve de ce lemme utilise les résultats du paragraphe 3.2 précédent seulement dans le cadre restreint des formules du fragment "$\wedge, \to, \perp$" commençant par une négation, mais qu'il contient strictement le lemme 3.2.1.

Nous pouvons maintenant, exactement de la même façon que ci-dessus, énoncer la proposition suivante qui généralise la proposition 3.2.2 :

Proposition 3.4.5

- *Supposons que Γ soit un ensemble fini de formules de Harrop tel qu'il existe une valuation classique v vérifiant $v(\wedge\Gamma) = \top$, alors la substitution associée s_v définie au lemme 3.2.1 est une Γ-identité validante,*
- *les formules de Harrop ont la propriété de disjonction pour l'admissibilité,*
- *les formules de Harrop et les disjonctions de telles formules ont mêmes conséquences admissibles et dérivables.*

Dans le paragraphe suivant, nous donnons un autre ensemble de formules ayant la propriété de disjonction pour l'admissibilité, mais utilisant un type différent de substitutions.

3.5 Formules anti-Harrop

Définition 3.5.1 *Les formules* anti-Harrop *sont les formules propositionnelles qui contiennent au moins une variable en position strictement négative. On peut définir inductivement l'ensemble* **aH** *des formules anti-Harrop de la façon suivante :*

- *Pour toute variable propositionnelle α, si A est une formule quelconque, alors $\alpha \to A \in$* **aH** *;*
- *si A est une formule quelconque, si $B \in$* **aH***, alors $A \to B \in$* **aH** *;*
- *si $A \in$* **aH***, si $B \in$* **aH***, alors $A \wedge B \in$* **aH***.*

Nous appellerons formules anti-Harrop primitives *les formules de la forme*

$$\alpha \to B \ ,$$

où α est une variable propositionnelle.

Lemme 3.5.2 *Toute formule anti-Harrop est équivalente à une conjonction de formules formules anti-Harrop primitives.*

Preuve : induction immédiate sur la définition de **aH**. ■

Lemme 3.5.3 *Soient Γ un ensemble fini de formules, Var_Γ l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans Γ, s la substitution, identité en dehors de Var_Γ, définie pour α dans Var_Γ par :*

$$s(\alpha) = \Gamma \wedge \alpha \ ,$$

alors

(i) *s est une Γ-identité, et donc pour toute formule C (sans restrictions)*

$$\Gamma \to s(C) \equiv \Gamma \to C \ ,$$

(ii) *pour toute formule anti-Harrop C :*

$$s(C) \equiv \Gamma \to C \ .$$

Preuve ((i)) : s est une Γ-identité (définition 2.2.1) car $\Gamma \to (\Gamma \wedge \alpha) \equiv \Gamma \to \alpha$.

Preuve ((ii)) : d'après le lemme 3.5.2 et l'équivalence $(\top \wedge \top)$ du paragraphe 3.1, il suffit de démontrer le résultat pour $C = \alpha \to B$, où α est une variable propositionnelle. Dans ce cas :

$$s(C) = s(\alpha) \to s(B) \equiv (\Gamma \wedge \alpha) \to s(B) \equiv \alpha \to \Gamma \to s(B) \ ,$$

et donc d'après (i) :

$$s(C) \equiv \alpha \to \Gamma \to B \equiv \Gamma \to \alpha \to B = \Gamma \to C \ .$$ ■

On déduit de ce lemme de façon analogue aux cas précédents la proposition :

Proposition 3.5.4

- *Si Γ est un ensemble fini de formules anti-Harrop, alors la substitution s définie au lemme ci-dessus est une Γ-identité validante ;*
- *les formules anti-Harrop ont la propriété de disjonction pour l'admissibilité ;*
- *les formules anti-Harrop et les disjonctions de formules Harrop et anti-Harrop ont mêmes conséquences admissibles et dérivables.*

Deuxième partie

Admissibilité et rétro-dérivabilité

4 Rétro-dérivation

4.1 Calcul des séquents

Nous considérerons que le séquent $\Gamma \vdash C$ est un couple constitué d'un ensemble de formules Γ et d'une formule C. La notation Γ, A signifie $\Gamma \cup \{A\}$, en particulier elle ne suppose pas que $A \notin \Gamma$. On peut donner la version suivante du calcul des séquents sans coupures de Gentzen, qui est peu différente de celle énoncée par M.Dummet ([Du 77] page 133, et remarque sur la dérivabilité de l'affaiblissement gauche page 134), modifiée pour tenir compte du fait que le symbole "$\perp$", (et non"$\neg$") est primitif. Les règles structurelles, affaiblissement gauche et contraction, deviennent inutiles pour les raisons suivantes :
la contraction est éliminée car la partie gauche du séquent est un ensemble de formules ;
la formulation particulière des règles internalise l'affaiblissement gauche, et le "remonte" au niveau des axiomes.
On peut même demander que la formule active A dans l'axiome $\Gamma, A \vdash A$ soit un atome (variable propositionnelle ou $\perp$).

axiomes	$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}$	$\dfrac{}{\Gamma, \perp \vdash A}$
règles	gauche	droite
$\to$	$\dfrac{\Gamma, A \to B \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$

Remarquons que ce calcul des séquents a la propriété de *croissance logique des parties gauches*, c'est à dire que la partie gauche du séquent conclusion d'une règle non axiome, est conséquence de la partie gauche de chacune des prémisses de cette règle. On préfère, pour faciliter les preuves qui vont suivre, utiliser un calcul des séquents ayant la propriété de croissance des parties gauches au sens ensembliste. On utilisera donc la version suivante, qui est très proche de la précédente, et qui s'apparente fortement à une méthode des tableaux sémantiques.

$$
\begin{array}{lcc}
\text{axiomes} & \overline{\Gamma, A \vdash A} & \overline{\Gamma, \bot \vdash A} \\[2ex]
\text{règles} & \text{gauche} & \text{droite} \\[2ex]
\to & \dfrac{\Gamma, A \to B \vdash A \qquad \Gamma, B, \boldsymbol{A \to B} \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C} & \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \\[3ex]
\wedge & \dfrac{\Gamma, A, B, \boldsymbol{A \wedge B} \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} & \dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \\[3ex]
\vee & \dfrac{\Gamma, A, \boldsymbol{A \vee B} \vdash C \qquad \Gamma, B, \boldsymbol{A \vee B} \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} & \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}
\end{array}
$$

Remarquons que dans la recherche d'une preuve, il est inutile d'appliquer une règle aux formules ajoutées (marquées en gras), car ceci conduirait à une redondance triviale (l'une des prémisses de la règle égale la conclusion). D'autre part, la partie gauche d'un séquent avec une formule marquée en gras est équivalente au même ensemble sans cette formule.

Lemme 4.1.1 (croissance des parties gauches) *Pour toute règle non axiome du calcul des séquents juste ci-dessus, la partie gauche du séquent conclusion est contenue dans la partie gauche de chacun des séquents prémisses.*

4.2 Sous-formules

On définit la notion de sous-formule positive ou négative de la façon habituelle, à un détail près qui se justifiera par la suite : on considère que $\bot$ est une sous-formule de toute formule.

Définition 4.2.1 *On définit par induction l'ensemble des sous-formules positives d'une formule A, soit $\mathcal{F}^+(A)$ et l'ensemble des sous-formules négatives de A, soit $\mathcal{F}^-(A)$:*

- $A \in \mathcal{F}^+(A)$, $\bot \in \mathcal{F}^+(A)$ *et* $\bot \in \mathcal{F}^-(A)$;
- *si* $C \in \mathcal{F}^-(A)$ *ou* $C \in \mathcal{F}^+(B)$, *alors* $C \in \mathcal{F}^+(A \to B)$;
- *si* $C \in \mathcal{F}^+(A)$ *ou* $C \in \mathcal{F}^-(B)$, *alors* $C \in \mathcal{F}^-(A \to B)$;
- *si* $C \in \mathcal{F}^+(A)$ *ou* $C \in \mathcal{F}^+(B)$, *alors* $C \in \mathcal{F}^+(A \wedge B)$;
- *si* $C \in \mathcal{F}^-(A)$ *ou* $C \in \mathcal{F}^-(B)$, *alors* $C \in \mathcal{F}^-(A \wedge B)$;
- *si* $C \in \mathcal{F}^+(A)$ *ou* $C \in \mathcal{F}^+(B)$, *alors* $C \in \mathcal{F}^+(A \vee B)$;

– *si* $C \in \mathcal{F}^-(A)$ *ou* $C \in \mathcal{F}^-(B)$*, alors* $C \in \mathcal{F}^-(A \vee B)$*.*
L'ensemble des sous-formules de A*, soit* $\mathcal{F}(A)$*, peut être défini par :*

$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}^-(A) \cup \mathcal{F}^+(A) \; .$$

Si Γ *est un ensemble de formules, on note :*

$$\mathcal{F}(\Gamma) =_d \bigcup_{A \in \Gamma} \mathcal{F}(A) \; .$$

Bien-sûr on peut définir directement et plus simplement la notion de sous-formule.

Lemme 4.2.2 *L'ensemble des sous-formules d'une formule donnée est fini.*

Lemme 4.2.3 (Propriété de la sous-formule) *Dans une preuve du séquent* $\Gamma \vdash C$*, toute formule qui apparait est une sous-formule de* $\Gamma \cup C$*. Si cette formule apparait dans un séquent à droite du signe thèse, c'est une sous-formule positive de* C *ou une sous-formule négative de* Γ*. Si cette formule apparait à gauche du signe thèse, c'est une sous-formule négative de* C *ou une sous-formule positive de* Γ*.*

PREUVE : par induction sur la hauteur de la preuve. Pour chacun des calculs des séquents définis ci-dessus, toute formule qui apparait dans les séquents prémisses d'une règle est sous-formule d'une des formules du séquent conclusion, avec le "signe" indiqué. ■

Ces deux derniers lemmes permettent de prouver la décidabilité du calcul propositionnel intuitionniste. En effet , si une formule est prouvable, elle possède une preuve dans l'un des systèmes précédents, et il en existe une non redondante, c'est à dire sans la répétition de séquents identiques dans une même branche de la preuve. D'après les deux lemmes précédents, on peut donc borner la hauteur des preuves possibles.

4.3 Introduction à la rétro-dérivabilité

Par la rétro-dérivabilité on veut associer à un séquent des ensembles de séquents tels que l'un de ces ensembles ait du être prouvé afin de prouver un substitué du séquent originel. Il s'agit sommairement de décrire l'algorithme de recherche d'une preuve en calcul des séquents. La recherche s'arrête sur un axiome, ou quand un séquent contient une variable propositionnelle, en effet dans ce dernier cas on ignore la formule substituée à cette variable. La règle qui permet de prouver le séquent peut porter sur le connecteur principal de la formule substituée.

Par exemple, pour la substitution : $s(\alpha) = \beta \vee \gamma, s(\beta) = \beta, s(\gamma) = \gamma$, le séquent $s(\alpha) \vdash s(\beta) \vee s(\gamma)$ est prouvable, mais sa preuve ne peut se terminer pas par une règle ($\vee$ *droite*).

Dans le cas d'un séquent ne contenant pas de variable propositionnelle, on peut décrire les règles pouvant être appliquées, et pour chacune d'entre elles, l'ensemble de ses prémisses. L'un de ces ensembles de prémisses a nécessairement été prouvé. La rétro-dérivabilité est donc un moyen d'obtenir des règles admissibles.

Pour que ces règles admissibles ne soient pas dérivables, il faut bien-sûr utiliser des règles non-inversibles.

Voyons l'exemple annoncé au paragraphe 1.3. Posons $s(\alpha) = A,\ s(\beta) = B,\ s(\gamma) = C,\ s(\delta) = D$. L'arbre suivant décrit les prémisses possibles d'une preuve de $(A \to B) \to (C \vee D)$.

$$\dfrac{\dfrac{A \to B \vdash A \quad A \to B, B \vdash C \vee D}{} \qquad \dfrac{A \to B \vdash C}{} \qquad \dfrac{A \to B \vdash D}{}}{A \to B \vdash C \vee D}$$

On a donc, après une simplification immédiate :

$$(\alpha \to \beta) \to \gamma \vee \delta \gg [((\alpha \to \beta) \to \alpha) \wedge (\beta \to (\gamma \vee \delta))] \vee ((\alpha \to \beta) \to \gamma) \vee ((\alpha \to \beta) \to \delta)\ ;$$

et donc, en développant, puis en projetant :

$$(\alpha \to \beta) \to \gamma \vee \delta \gg ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \vee ((\alpha \to \beta) \to \gamma) \vee ((\alpha \to \beta) \to \delta)\ .$$

Remarquons que, comme

$$(\alpha \to \beta) \to (\gamma \vee \delta) \vdash \beta \to (\gamma \vee \delta)\,,$$

il n'est pas utile de conserver la partie de la règle qui concerne la formule $\beta \to (\gamma \vee \delta)$.

Si l'on prend $A = C \vee D$, on voit que le séquent

$$(C \vee D) \to B \vdash C \vee D$$

doit se prouver autrement qu'en terminant par la règle gauche sur la flèche, puisque cette règle produit comme prémisse le même séquent et que donc la preuve obtenue serait *redondante*. Il n'y a donc que deux façons de prouver ce séquent sans redondance.

$$\dfrac{\dfrac{(C \vee D) \to B \vdash C}{} \qquad \dfrac{(C \vee D) \to B \vdash D}{}}{(C \vee D) \to B \vdash C \vee D}$$

et l'on obtient :

$$((\gamma \vee \delta) \to \beta) \to (\gamma \vee \delta) \gg [((\gamma \vee \delta) \to \beta) \to \gamma] \vee [((\gamma \vee \delta) \to \beta) \to \delta]\ . \qquad (ad'_1)$$

L'autre exemple annoncé au paragraphe 1.3 s'obtient simplement à partir du premier (ad_1) en substituant $\perp$ à β :

$$\neg\alpha \to (\gamma \vee \delta) \gg (\neg\alpha \to \gamma) \vee (\neg\alpha \to \delta) \ .$$

On remarque que, dès qu'il est possible d'appliquer une règle inversible à un séquent, le pas de rétro-dérivation est dérivable.

Les séquents qui contiennent une variable propositionnelle à gauche ou à droite du signe thèse, correspondent à des formules respectivement anti-Harrop et de Harrop (primitives). Nous voulons montrer maintenant que la rétro-dérivabilité plus la dérivabilité capturent complètement l'admissibilité. La méthode utilisée sera analogue à une démonstration de complétude, le rôle sémantique étant ici assuré par l'interprétation sur le modèle des termes, c'est à dire les substitutions. On voit assez facilement que, par rétro-dérivation, on peut se ramener à des disjonctions de conjonctions de formules de Harrop et anti-Harrop. Nous avons étudier dans la première partie le cas "homogène" : les conjonctions doivent être de formules toutes Harrop, ou toutes anti-Harrop, et alors admissibilité égale dérivabilité. L'exemple suivant montre que, si la conjonction n'est pas homogène, on ne peut espérer le même genre de résultats.

$$\neg\alpha \to \beta, \beta \to (\gamma \vee \delta) \gg (\neg\alpha \to \gamma) \vee (\neg\alpha \to \delta) \ ;$$

$$\neg\alpha \to \beta, \beta \to (\gamma \vee \delta) \nvdash (\neg\alpha \to \gamma) \vee (\neg\alpha \to \delta) \ .$$

Définissons maintenant maintenant formellement la rétro-dérivation.

4.4 Définition de la rétro-dérivabilité

D'abord quelques notations.

4.4.1 Définition des conditions

Définition 4.4.1 *Les conditions sont des combinaisons booléennes positives de séquents, c'est à dire des expressions construites à partir des séquents et des seuls connecteurs "$\wedge, \vee$".*
Une formule associée au séquent $S = \Gamma \vdash C$, notée $S^{\to}$, est une des formules $\Gamma \to C$ (nous rappelons que la notation est ambiguë).
Une formule associée à la condition $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}^{\to}$, est une formule propositionnelle obtenue en remplaçant chacun des séquents de $\mathcal{C}$ par une de ses formules associées.
L'équivalence entre deux conditions désigne l'équivalence entre les formules associées. On note :

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{D} \text{ si et seulement si } \mathcal{C}^{\to} \equiv \mathcal{D}^{\to}.$$

La prouvabilité d'une condition désigne la prouvabilité de la formule associée.

Il est bien-sûr immédiat que la prouvabilité d'un séquent au sens habituel coïncide avec la définition ci-dessus (règle ($\rightarrow$ *gauche*)).

On préfère introduire une nouvelle notation,plutôt que de manipuler directement des ensembles d'ensembles de séquents.

On a besoin d'une définition de la forme normale disjonctive un peu particulière, qui en assure l'unicité, et dont l'interêt apparaîtra ensuite.

Définition 4.4.2 *Nous appelerons la forme normale disjonctive d'une condition, la condition disjonction de toutes les formules dont l'arbre syntaxique est un sous-arbre de la condition originale de même racine, tel que tous les nœuds $\wedge$ soient complets, et que les nœuds $\vee$ n'aient qu'un seul fils.*

Le lemme suivant est évident pour toute combinaison booléenne.

Lemme 4.4.3 *Chaque condition est équivalente à sa forme normale disjonctive.*

On utilisera ensuite la relation entre deux occurrences de séquents de $\mathcal{C}$ définie par "ces deux occurrences font partie d'une même conjonction de la forme normale disjonctive".

On peut remarquer que cette relation n'est pas une relation d'équivalence (pas transitive).

Soient deux conditions $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$. Soit S une occurrence de séquent dans $\mathcal{C} = \mathcal{C}[S]$. On désigne par $\mathcal{C}[\mathcal{E}/S]$ la formule obtenue en remplaçant cette unique occurrence de S par la condition $\mathcal{E}$. Par ailleurs les substitutions définies sur les formules sont étendues naturellement aux séquents et aux conditions.

4.4.2 Définition des rétro-dérivations

Les rétro-dérivations seront définies comme des sous-arbres de l'arbre de toutes les preuves possibles d'un séquent. Ce dernier est clairement un arbre infini, sauf à se donner des restrictions sur les preuves possibles, comme par exemple celles sans redondances. Donnons une définition informelle de cet arbre.

Ses nœuds sont étiquetés par :
des séquents $\Gamma \vdash C$,
des séquents comportant une unique formule pointée $\Gamma, A^{\cdot} \vdash C$, dit *séquents pointés* (le point désigne la formule principale d'une règle de conclusion ce séquent).

L'arbre des preuves possibles d'un séquent S est l'arbre maximal de racine étiquetée par S, et tel que chaque nœud de cet arbre corresponde à l'une des règles énoncées ci-après. Ces règles sont de deux sortes :

– les règles disjonctives correspondant aux nœuds de hauteur paire, qui sont une famille de règles à nombre fini quelconque de prémisses, et sont notées par une barre horizontale discontinue ;
– des règles conjonctives correspondant aux nœuds de hauteur impaire, qui sont les règles non-axiomes du calcul des séquents donné ci-dessus, mais restreintes aux formules pointées, et sont notées comme d'habitude par une barre horizontale continue ;
– deux règles supplémentaires qui signifient en quelque sorte qu'il n'y a pas de règle conjonctive dont la formule principale est un atome (variable ou $\bot$). On aurait pu plus naturellement ne pas pointer les atomes, ce qui est équivalent, mais complique l'énoncé des règles disjonctives. D'autre part ces deux dernières règles n'interviendrons pas dans la restriction utile pour l'étude de l'admissibilité.

Règles disjonctives :

$$\frac{A_1^{\cdot},\ldots,A_n \vdash C \ \ \ldots\ \ A_1,\ldots,A_i^{\cdot},\ldots,A_n \vdash C \ \ \ldots\ \ A_1,\ldots,A_n^{\cdot} \vdash C \ \ \ldots\ \ A_1,\ldots,A_n \vdash C^{\cdot}}{A_1,\ldots,A_n \vdash C}$$

Règles conjonctives :

règles	gauche	droite
$\to$	$\dfrac{\Gamma,(A\to B)\vdash A \qquad \Gamma,B,A\to B\vdash C}{\Gamma,(A\to B)^{\cdot}\vdash C}$	$\dfrac{\Gamma,A\vdash B}{\Gamma\vdash(A\to B)^{\cdot}}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma,A,B,A\wedge B\vdash C}{\Gamma,(A\wedge B)^{\cdot}\vdash C}$	$\dfrac{\Gamma\vdash A \qquad \Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash(A\wedge B)^{\cdot}}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma,A,A\vee B\vdash C \qquad \Gamma,B,A\vee B\vdash C}{\Gamma,(A\vee B)^{\cdot}\vdash C}$	$\dfrac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash(A\vee B)^{\cdot}} \qquad \dfrac{\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash(A\vee B)^{\cdot}}$

Règles atomes : (α atome)

$$\frac{\vdash\bot}{\alpha^{\cdot},\Gamma\vdash C} \qquad\qquad \frac{\vdash\bot}{\Gamma\vdash\alpha^{\cdot}}$$

Il est clair qu'un séquent ou séquent pointé donné ne peut être conclusion que d'une seule instance de règle, une règle disjonctive si c'est un séquent usuel, une règle conjonctive si c'est un séquent pointé. L'arbre des preuves possibles est donc entièrement déterminé par son séquent racine.

Nous n'aurons cependant à traiter que de sous-arbres complets finis de ces arbres des preuves possibles (on dira qu'un sous-arbre est complet si tous les nœuds de ce sous-arbre ont autant de fils que l'arbre d'origine ou n'en ont aucun).

Appellons arbres tronqués des preuves possibles de S les sous-arbres complets finis de racine S de l'arbre des preuves possibles de S et dont toutes les feuilles sont des séquents non pointés, et définissons formellement ceux-ci, ainsi que quelques notions utiles s'y rapportant.

Définition 4.4.4 *L'ensemble des* arbres tronqués de preuves possibles *est le plus petit ensemble contenant les séquents et clos par les règles de formation précédentes.*

On appelle sous-dérivation *d'un arbre tronqué des preuves possibles d'un séquent un sous-arbre de celui-ci de racine identique, tel que chaque nœud disjonctif possède un seul fils et chaque nœud conjonctif est complet.*

On dira que la branche d'un arbre tronqué de preuves possibles est redondante *si elle possède deux occurrences non pointées d'un même séquent. Une* redondance *désigne cette répétition.*

Un arbre tronqué de preuves possibles est dit non-redondant *quand il ne possède pas de redondances autre que sur un séquent feuille.*

A une sous-dérivation correspond trivialement un arbre de preuve tronqué dans le calcul des séquents, un arbre de preuve si toutes les feuilles de la rétro-dérivation sont des axiomes.

Il est clair que l'arbre des preuves possibles est une notion plus ou moins explicite mais centrale dans les preuves de complétude par la méthode des tableaux, que ce soit pour la sémantique de Kripke ou de Beth (voir [Be 65, Be Ma 1977] ...). L'arborescence des modèles de Kripke ou de Beth correspond alors à l'arborescence des sous-arbres obtenus de façon duale vis à vis des sous-dérivations (un seul fils pour les nœuds conjonctifs, complets pour les nœuds disjonctifs).

On aurait pu faire un autre choix pour les règles disjonctives que le nôtre qui est simple mais très brutal. Une règle disjonctive est correcte quand son séquent conclusion est prouvable si et seulement s'il est prouvable par une règle portant sur une formule pointée de l'une des prémisses. On pourrait tirer partie de l'inversibilité de certaines règles, ce qui est fait usuellement dans les méthodes des tableaux (voir [Be 65]).

Venons en maintenant au cas particulier utile pour traiter de l'admissibilité.

Définition 4.4.5 *Une rétro-dérivation de conclusion un séquent (non pointé) S est la donnée*

> *d'un arbre tronqué des preuves possibles de S tel qu'aucune règle n'a pour conclusion un séquent contenant une variable propositionnelle,*
>
> *d'un marquage des séquents feuilles de cet arbre tel que seules des feuilles correspondant à des redondances soient marquées. On dira que ces séquents sont* barrés, *et on les notera entre crochets $[\![\Gamma \vdash C]\!]$.*

Quand aucun séquent feuille n'est barré, on dira qu'il s'agit d'une rétro-dérivation simple, *qui est donc définie uniquement par l'arbre tronqué de preuves associée.*

La sous-dérivation d'une rétro-dérivation est la donnée d'une sous-dérivation de l'arbre tronqué des preuves possibles associé plus la restriction du marquage des séquents feuilles à celle-ci.

La rétro-dérivation simple associée à une rétro-dérivation est celle obtenue en oubliant les marques sur les séquents feuilles.

On n'impose ni que l'arbre tronqué des preuves possibles associé soit non-redondant, ni que toutes les feuilles correspondant à des redondances soient barrées. On veut en effet que la notion de rétro-dérivation soit stable par substitution. Ce n'est pas le cas si toutes les feuiles redondantes doivent être barrées. On veut également que cette notion soit stable par "composition" (remplacer une feuille non barrée de rétro-dérivation par une rétro-dérivation). Or la composition ajoute éventuellement des redondances "internes".

L'arbre associé à une rétro-dérivation est de hauteur nécessairement paire. On parlera d'un pas ou d'une étape de rétro-dérivation pour un sous-arbre complet de la rétro-dérivation considérée, de hauteur 2, de conclusion un séquent non pointé. A cause des séquents barrés qui tiennent compte des redondances il n'est en général pas possible de décomposer une rétro-dérivation non simple en sous-arbres avec feuilles barrées, qui soient des rétro-dérivations (on ne pourra éventuellement plus barrer les séquents feuilles barrés originellement).

On constate qu'avec la restriction imposée, les règles atomes ne peuvent intervenir dans une rétro-dérivation. Ceci est naturel pour traiter de l'admissibilité, puisque ces règles ne sont pas stables par substitution sur les variables propositionnelles.

Lemme 4.4.6 *La notion de rétro-dérivation est stable par substitution, c'est à dire que ssi l'on applique uniformément la même substitution s aux formules de tous les séquents d'une rétro-dérivation de conclusion S, on obtient une rétro-dérivation de conclusion $s(S)$.*

PREUVE : la restriction adoptée pour les rétro-dérivations impose qu'aucune règle n'a pour conclusion un séquent contenant une variable propositionnelle.

Toutes les règles d'un arbre tronqué de preuves possibles restent valides après substitution sauf les règles atomes. Si l'une de ces deux dernières était présente, c'est que l'on aurait un séquent contenant une variable pointée, c'est à dire qu'une règle disjonctive aurait pour conclusion un séquent contenant une variable. Cela contredit la définition d'une rétro-dérivation. Les redondances restent valides après substitution. ∎

Dans la pratique, on choisira le plus souvent de ne pas écrire les étiquettes des nœuds disjonctifs (séquents pointés), comme cela a été fait dans le paragraphe, 4.3. On choisira également de ne pas écrire les sous-dérivations contenant des séquents redondants.

On associe naturellement à une rétro-dérivation, une condition, d'arbre syntaxique de même structure que cette rétro-dérivation :
ses feuilles sont étiquetées par les mêmes séquents, s'il ne sont pas barrés, par le séquent $\vdash \perp$ si ce sont des séquents barrés ;
ses nœuds non terminaux d'étiquette un séquent pointé, et correspondant donc à une règle conjonctive, sont étiquetés par "$\wedge$" ;
ses nœuds non terminaux d'étiquette un séquent non pointé, et correspondant donc à une règle disjonctive, sont étiquetés par "$\vee$".

On peut procéder plus formellement :

Définition 4.4.7 *La condition associée à une rétro-dérivation se définit par induction de la façon suivante :*

(i) *la condition associée au séquent $\Gamma \vdash C$ est le même séquent $\Gamma \vdash C$, la condition associée au séquent barré $[\![\Gamma \vdash C]\!]$ est le séquent $\vdash \perp$;*

(ii) *si la rétro-dérivation $\mathcal{RD}$est obtenue par règle conjonctive unaire, ou par règle axiome, à partir de la rétro-dérivation $\mathcal{RD}$', la condition associée à $\mathcal{RD}$est la condition associée à $\mathcal{RD}$';*

(iii) *si la rétro-dérivation $\mathcal{RD}$est obtenue par règle conjonctive binaire à partir des rétro-dérivations $\mathcal{RD}_1$ et $\mathcal{RD}_2$ de conditions associées $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, alors la condition associée à $\mathcal{RD}$est $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$;*

(iv) *si la rétro-dérivation $\mathcal{RD}$est obtenue par règle disjonctive n-aire à partir des rétro-dérivations $\mathcal{RD}_1, \ldots, \mathcal{RD}_n$ de conditions associées $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$, alors la condition associée à $\mathcal{RD}$est $\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n$.*

On vérifie par une induction immédiate que rétro-dérivation et arbre syntaxique de sa condition associée sont bien les mêmes, au changement d'étiquettes des nœuds intérieur et des séquents barrés près. Le lemme suivant devient alors évident.

Lemme 4.4.8 *A chaque sous-dérivation d'une rétro-dérivation correspond exactement une et une seule conjonction de la forme normale disjonctive de la condition associée, qui est la conjonction des feuilles de la sous-dérivation.*

Définition 4.4.9 *On dit que le séquent S se rétro-dérive en la condition $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe une rétro-dérivation de conclusion le séquent S, associé à la condition $\mathcal{C}$. On note S **rd** $\mathcal{C}$.*

*On dit que la condition $\mathcal{D}$ se rétro-dérive en la condition $\mathcal{D}'$ si et seulement s'il existe un séquent S qui se rétro-dérive en la condition $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}[\mathcal{C}/S]$ (on substitue une seule occurrence). On note $\mathcal{D}$ **rd** $\mathcal{D}'$.*

On dit que le séquent S se rétro-dérive simplement en la condition $\mathcal{C}$ si la rétro-dérivation en jeu est simple.

Lemme 4.4.10 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux conditions telles que $\mathcal{D}$ $\boldsymbol{rd}$ $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}^{\rightarrow} \vdash \mathcal{D}^{\rightarrow}$, et $\mathcal{D}^{\rightarrow} \gg \mathcal{C}^{\rightarrow}$.*

PREUVE : par une récurrence immédiate on se ramène au cas S $\boldsymbol{rd}$ $\mathcal{C}$.

- On montre $\mathcal{C}^{\rightarrow} \vdash S^{\rightarrow}$ par induction sur la structure des rétro-dérivation. L'induction se ramène à vérifier la correction des règles conjonctives et axiomes.
- On montre maintenant que $\mathcal{D}^{\rightarrow} \gg \mathcal{C}^{\rightarrow}$. On montre tout d'abord le résultat pour une rétrodérivation simple.

On montre que, pour toute substitution s, pour toute rétro-dérivation simple $\mathcal{RD}$ de S, toute preuve de $s(S)$ est le prolongement d'une sous-dérivation de $s(\mathcal{RD})$. On procède par induction sur la hauteur des sous arbres complets de la rétro-dérivation de S, de racine un séquent non pointé. On associe à chacun de ces sous-arbres une rétro-dérivations simple (en ne barrant aucun séquent).

Soit un tel arbre de racine T. La règle appliquée à T est nécessairement disjonctive. Tous les sous-arbres obtenus sont de hauteur au moins 2, puisque les séquents pointés ne sont pas des rétro-dérivations. On applique l'hypothèse d'induction à chacun des sous-arbres de conclusion les séquents de niveau 2 dans l'arbre, donc non pointés. Ces séquents non pointés énumèrent toutes les règles du calcul des séquents qui peuvent s'appliquer à T, et donc à n'importe quel substitué de T. En effet comme T ne contient aucune variable propositionnelle, tous les connecteurs principaux des formules d'un substitué de T sont ceux des formules de T.

Maintenant, montrons le résultat pour une rétro-dérivation $\mathcal{RD}$quelconque.

Si la preuve de $s(S)$ est non redondante (sans répétition de séquents sur une branche), le résultat précédent, qui est vrai pour la rétro-dérivation simple associée à n'importe quelle rétro-dérivation $\mathcal{RD}$, est encore vrai pour cette rétro-dérivation $\mathcal{RD}$, dans laquelle n'ont été barrées que des occurrences de séquents redondantes, donc non dans la sous-dérivation S considérée.

Puisque les séquents barrés sont traduits par l'absurde dans la condition $\mathcal{C}$ associée à $\mathcal{RD}$, celle-ci est équivalente à la disjonction des conjonctions des feuilles des sous-dérivations ne contenant pas les séquents barrés ($A \wedge \bot \equiv \bot$, $A \vee \bot \equiv A$). On en déduit par définition de l'admissibilité que $S^{\rightarrow} \gg \mathcal{C}^{\rightarrow}$. ∎

Définition 4.4.11 *Un séquent est dit* maximal*, s'il contient une variable propositionnelle à gauche ou à droite, on dira alors* maximal gauche *et* maximal droit*, ou si c'est le séquent $\vdash \bot$.*

Une condition est dite maximale si elle n'est composée que de séquents maximaux. Une rétro-dérivation est dite maximale si sa condition associée est maximale.

Lemme 4.4.12 *Tout séquent possède une rétro-dérivation non redondante et maximale.*

Preuve : d'après les lemmes 4.2.2 et 4.2.3 (propriété de la sous-formule, l'ensemble des sous-formules est fini), un séquent a un nombre fini de rétro-dérivations non redondantes, et donc l'une d'entre elle est maximale. ■

Remarque : cette rétro-dérivation maximale est clairement unique (cela n'intervient pas dans la suite).

4.4.3 Rétro-dérivabilité en calcul propositionnel

Définissons maintenant la rétro-dérivabilité entre formules propositionnelles.

Définition 4.4.13 *Nous dirons que la formule propositionnelle A se rétro-dérive en la formule propositionnelle B, ce que nous noterons A **rd** B, si et seulement si il existe une condition $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}^{\rightarrow} = B$ et $(\vdash A)$ **rd** $\mathcal{B}$.*

La dérivabilité aller-retour entre formules, notée " $>$" est la clôture transitive de la relation de conséquence et de la relation de rétro-dérivation.

Nous noterons $A \dashv\!> B$, pour $B \vdash A$ et $A > B$.

Une première remarque : la relation " $>$" n'est pas évidemment décidable à priori, en particulier, si $A > B$, on n'a pour le moment aucune contrainte sur les formules intervenant dans la suite de déductions et de rétro-dérivations intermédiaires, comme la propriété de la sous-formule par exemple pour la déductibilité en calcul des séquents.

Lemme 4.4.14 *Si A **rd** B, alors $B \vdash A$ et $A \gg B$.*

Preuve : par définition de la rétro-dérivation, et d'après le lemme 4.4.10. ■

Lemme 4.4.15 (fidélité) *Si $A > B$ alors $A \gg B$.*

Preuve : conséquence du lemme 4.4.14 et de la définition de la rétro-dérivation aller-retour. ■

Le chapitre suivant est consacré principalement à la preuve d'un résultat de complétude (dont on donnera un énoncé plus précis à la proposition 5) :

Théorème 4.4.16 (complétude) *La dérivabilité aller-retour "$>$" capture complètement l'admissibilité "$\gg$", c'est à dire que pour toutes formules A et B,*

$$A \gg B \text{ ssi } A > B .$$

Pour montrer ce résultat, nous allons associer à chaque formule propositionnelle une formule équivalente par dérivation aller-retour, et ayant mêmes conséquences admissibles et dérivables.

5 Complétude

5.1 Préliminaires

On utilise dans ce qui suit les définitions et lemmes élémentaires de la section 2, et un cas particulier très simple des résultats montrés en section 3, concernant une classe restreinte de formules de Harrop correspondant aux séquents maximaux droits. Enonçons le lemme que nous utiliserons, cas particulier des lemme et proposition de la section 3.5, mais de démonstration nettement plus simple.

Définition 5.1.1 *Les formules de Harrop primitives du type* $\Delta \rightarrow \alpha$ *où* α *est une variable propositionnelle, sont appelées* formules de Harrop simples.

Il est très facile de montrer que ces formules de Harrop particulières ont mêmes conséquences admissibles et dérivables.

Lemme 5.1.2 *Soit* Γ *un ensemble fini de formules de Harrop simples. Soit* s *la substitution (définie au lemme 3.1.1), définie par :*
$s(\alpha) = \Gamma \rightarrow \alpha$ *, si* $\alpha \in Var_\Gamma$ *;*
$s(\alpha) = \alpha$ *, sinon.*
Alors s *est une* Γ*-identité validante.*

Preuve : on a déja montré que s est une Γ-identité au lemme 3.1.1. Il est évident que s est Γ-validante. ■

5.2 Sous-formules (suite)

On reprend les notations introduites au paragraphe 4.2.

Il est bien connu que la clôture par le connecteur $\rightarrow$ d'un ensemble fini de formules n'est pas en général fini même à équivalence près. On est amené à poser la définition suivante.

Définition 5.2.1 *L'ensemble des* sous-séquents *d'une formule A, noté* $\mathcal{S}(A)$*, est l'ensemble des séquents dont la partie gauche ne contient que des sous-formules négatives de A, et dont la conclusion est une sous-formule positive de A.*
L'ensemble des sous-formules *d'ordre 1 de A, noté* $\mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$*, est l'ensemble des formules associées aux sous-séquents de A.*
On note $\mathcal{F}^{\rightarrow,\wedge,\vee}$*, l'ensemble obtenu en prenant des disjonctions de conjonctions distinctes de sous-formules d'ordre 1 de A elles mêmes distinctes à l'intérieur d'une même conjonction (c'est à dire une représentation finie de la clôture par conjonctions et disjonctions de* $\mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$*, quotientée par la relation d'équivalence "* $\equiv$ *").*

On étend ces définitions à un ensemble de formules par réunion.

Un lemme technique :

Lemme 5.2.2

(i) *Les ensembles* $\mathcal{S}(A)$ *des sous-séquents de A,* $\mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$ *des sous-formules d'ordre 1 de A,* $\mathcal{F}^{\rightarrow,\wedge,\vee}(A)$*, sont finis.*

(ii) *Si* $B \in \mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$*, alors toute formule de* $\mathcal{F}^{\rightarrow}(B)$ *est équivalente à une formule de* $\mathcal{F}^{\rightarrow}(B) \cap \mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$
(Autrement dit $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma))/_{\equiv} = \mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)/_{\equiv}$*).*

PREUVE (i) : l'ensemble $\mathcal{F}(A)$ est fini, les ensembles $\mathcal{F}^{-}(A)$ et $\mathcal{F}^{+}(A)$ sont donc finis, et donc l'ensemble des parties de $\mathcal{F}^{-}(A)$ également, ce qui assure que $\mathcal{S}(A)$ est fini (on rappelle que la partie gauche d'un séquent est un ensemble de formules). Il suit immédiatement que $\mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$ est fini, et donc que l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$ est fini ce qui assure que $\mathcal{F}^{\rightarrow,\wedge,\vee}(A)$ est fini. ∎

PREUVE (ii) : soit $B = A_1, \ldots, A_n, \rightarrow C$, où $A_1, \ldots, A_n$ sont des sous-formules négatives de A, et C une sous-formule positive de A. Les sous-formules négatives de B sont les sous-formules positives de $A_1, \ldots, A_n$ et négatives de C, c'est à dire des sous-formules négatives de A. Les sous-formules positives de B sont les sous-formules négatives de $A_1, \ldots, A_n$, positives de C (dans ces deux cas ce sont des sous-formules positives de A), plus les formules :

$$A_i, \ldots, A_n, \rightarrow C \;\; avec \;\; i \in \{1, \ldots, n\} \; .$$

Un sous-séquent de B, soit S, a donc pour partie gauche un ensemble de sous-formules négatives de A. Deux cas se présentent. Soit la formule droite de S est une sous-formule de A et alors S est un sous-séquent de A. Soit la formule droite de S est l'une des formules $A_i, \ldots, A_n, \rightarrow C$, soit $S = \Gamma \vdash A_i, \ldots, A_n, \rightarrow C$. Dans ce cas S a même formule associée que le sous-séquent de A, $\Gamma, A_i, \ldots, A_n, \vdash C$. ∎

Remarque : sans la restriction sur la position des sous-formules dans A (signe) dans la définition de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$, on perdrait le (ii) du lemme, qui assure une certaine stabilité pour cette extension de la notion de sous-formule.

Les définitions précédentes ont été introduites à cause du lemme suivant qui est un avatar de la propriété de la sous-formule.

Lemme 5.2.3 *Tout séquent apparaissant dans une rétro-dérivation de* $\vdash A$ *est un sous-séquent de A. On en déduit que, si* A **rd** B *, alors B appartient à la clôture par conjonctions et disjonctions de* $\mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$*, et donc, à équivalence près,* $B \in \mathcal{F}^{\rightarrow,\wedge,\vee}(A)$ *.*

PREUVE : induction évidente sur la hauteur de la rétro-dérivation. ∎

5.3 Saturation

Définition 5.3.1 *Soit Θ un ensemble de formules. Nous dirons qu'un ensemble fini Γ de formules, est Θ-saturé quand on a pour toutes formules C et D dans $\mathcal{F}^{\rightarrow,\wedge,\vee}(\Theta)$:*

$$\textit{si } \Gamma > C \vee D, \ \ \textit{alors } \ \Gamma \vdash C \textit{ ou } \Gamma \vdash D \ .$$

Nous dirons que Γ est saturé si Γ est Γ-saturé.

Lemme 5.3.2 *Soit Γ un sous-ensemble fini de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Theta)$. Si Γ est Θ-saturé, alors Γ est saturé.*

Preuve : on déduit du lemme 5.2.2 (ii) que toute formule de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$, est équivalente à une formule de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Theta)$, d'où le résultat. ∎

Lemme 5.3.3 *Pour toute proposition A, il existe une formule A^h, qui est, soit $\vdash \perp$, soit une disjonction de conjonctions de formules de Harrop simples et anti-Harrop primitives, toutes dans $\mathcal{F}^{\rightarrow}(A)$, et qui vérifie A **rd** A^h.*

Preuve : si S est un séquent maximal, $S^{\rightarrow}$ est soit prouvable, soit $\vdash \perp$, soit une formule de Harrop simple, soit une formule anti-Harrop primitive. On déduit le résultat des lemme 4.4.12 et lemme 5.2.3. ∎

On remarque que, si $\wedge\Gamma$ a la propriété de disjonction pour l'admissibilité, Γ est saturé (la réciproque sera une conséquence de ce qui suit). On a donc comme exemples d'ensembles saturés, les sous-ensembles de **H** (formules de Harrop) et les sous-ensembles de **aH** (formules anti-Harrop). On a même :

Lemme 5.3.4 *Tout ensemble fini de formules saturé Γ est équivalent à un ensemble saturé qui ne contient que des formules de Harrop et anti-Harrop primitives, toutes dans $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$.*

Preuve : par le lemme de décomposition 5.3.3, on sait qu'il existe une disjonction de conjonctions de formules de Harrop et anti-Harrop primitives A_j toutes dans $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$, soit $\bigvee_{i=1}^{p}(\bigwedge_{j=1}^{q_i} A_{i,j})$, qui vérifie :

$$\wedge\Gamma \ \boldsymbol{rd} \ \bigvee_{i=1}^{p}(\bigwedge_{j=1}^{q_i} A_j) \ .$$

Par définition de la saturation, il existe donc i_0 tel que :

$$\Gamma \vdash \bigwedge_{j=1}^{q_{i_0}} A_j \ ,$$

et donc :

$$\Gamma \equiv \bigwedge_{j=1}^{q_{i_0}} A_j \ .$$

L'ensemble $\{A_j\}_{0<j\leq q_{i_0}}$ est Γ-saturé. Il est inclu dans $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$. Il est donc saturé d'après le lemme 5.3.2. ■

Lemme 5.3.5 *Pour tout ensemble* Γ*, il existe* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ *sous-ensembles saturés de* $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma) \cap (\mathbf{H} \cup \mathbf{aH})$*, tel que :*

$$\wedge\Gamma \dashv> (\wedge\Gamma_1) \vee \ldots \vee (\wedge\Gamma_n) \ .$$

Preuve : il suffit, en vertu du lemme 5.3.4 précédent, de montrer le résultat pour des sous-ensembles saturés de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que, pour tout ensemble $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ de sous-ensembles de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$, vérifiant :

$$\wedge\Gamma \dashv> (\wedge\Gamma_1) \vee \ldots \vee (\wedge\Gamma_n) \ ,$$

il existe un $0 < k \leq n$ tel que Γ_k ne soit pas saturé. On va en déduire par récurrence qu'il existe une suite infinie de sous-ensembles de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$, ayant la même propriété, et strictement croissante pour la relation de conséquence, ce qui contredira le fait que $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$ est fini.

On construit par récurrence sur i une suite $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

pour tout i, pour tout ensemble $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ de sous-ensembles de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$, vérifiant : $\wedge\Delta_i \dashv> (\wedge\Gamma_1) \vee \ldots \vee (\wedge\Gamma_n)$, il existe un $0 < k \leq n$ tel que Γ_k ne soit pas saturé ;

pour $i \in \mathbb{N}$, $\Delta_{i+1} \vdash \Delta_i$ et $\Delta_i \nvdash \Delta_{i+1}$.

On pose $\Gamma = \Delta_0$ qui satisfait évidemment l'hypothèse de récurrence.
Considérons que $\Delta_0, \ldots, \Delta_i$, sont déja construit, et vérifient l'hypothèse ci-dessus.

Soit Δ'_i la clôture de Δ_i par toutes ses conséquences par la relation $>$ dans $\mathcal{F}^{\rightarrow\wedge\vee}(\Gamma)$, on a $\wedge\Delta_i \dashv> \wedge\Delta'_i$. Toute formule A de Δ'_i est une disjonction de conjonction de formules A_{rs} de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$, soit :

$$A = \bigvee_{r=1}^{p_A} \bigwedge_{s=1}^{q_A} A_{rs}.$$

On forme la conjonction

$$\bigwedge_{A\in\Delta'_i} \bigvee_{r=1}^{p_A} \bigwedge_{s=1}^{q_A} A_{rs}$$

que l'on met sous la forme de la disjonction pour $(r_A)_{A\in\Delta'_i} \in \prod_{A\in\Delta'_i}\{1,\ldots,p_A\}$ de toutes les conjonctions :

$$\bigwedge_{A\in\Delta'_i}\bigwedge_{s=1}^{q_A} A_{r_A s} \ .$$

On pose $\Delta_{i,1},\ldots,\Delta_{i,n}$, tous les sous-ensembles de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$ correspondant aux conjonctions ci-dessus :

$$\bigcup_{A\in\Delta'_i}\{A_{r_A 1},\ldots,A_{r_A q_A}\} \ .$$

Ils vérifient :

(1) $\wedge\Delta_i \dashv> (\wedge\Delta_{i,1}) \vee \ldots \vee (\Delta_{i,n})$;

(2) si $\Delta_i > C \vee D$, avec $C, D \in \mathcal{F}^{\rightarrow\wedge\vee}(\Gamma)$, alors pour tout j, $\Delta_{i,j} \vdash C$ ou $\Delta_{i,j} \vdash D$.

En effet $C \vee D \in \Delta'_i$, et d'autre part, si $C = \bigvee_{r=1}^{p_C}\bigwedge_{s=1}^{q_C} C_{rs}$ et $D = \bigvee_{r=1}^{p_D}\bigwedge_{s=1}^{q_D} D_{rs}$, l'une des conjonctions est conséquence de l'un des ensembles $\Delta_{i,j}$ par construction de ceux-ci.

D'après (1), pour tout j, $\Delta_{i,j} \vdash \Delta_i$.

Par contre aucun des $\Delta_{i,j}$ n'est conséquence de Δ_i. En effet, si Δ_{i,j_0} était conséquence de Δ_i, on déduirait de (1) que $\Delta_i \equiv \Delta_{i,j_0}$, et donc d'après (2) Δ_i serait saturé, ce qui contredirait l'hypothèse de récurrence.

Chacune des formules de $\Delta_{i,j}$ est une formule de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$.

Supposons qu'il existe des sous-ensembles saturés $\{\Gamma_{j,1},\ldots,\Gamma_{j,m}\}$ de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$, vérifiant pour chacun des $\Delta_{i,j}$:

$$\Delta_{i,j} \dashv> (\wedge\Gamma_{j,1}) \vee \ldots \vee (\wedge\Gamma_{j,n}) \ .$$

L'hypothèse de récurrence sur Δ_i, est contredite pour l'ensemble de sous-ensembles de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$:

$$\bigcup_{j=1}^{m}\{\Gamma_{j,1},\ldots,\Gamma_{j,m}\} \ .$$

Il existe donc au moins un j tel que pour tout ensemble $\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n\}$ de sous-ensembles de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$, vérifiant :

$$\wedge\Delta_{i,j} \dashv> (\wedge\Gamma_1) \vee \ldots \vee (\wedge\Gamma_n) \ ,$$

il existe un $0 < i \leq n$ tel que Γ_i ne soit pas saturé.
Comme on a : $\Delta_{i,j} \vdash \Delta_i$ et $\Delta_i \nvdash \Delta_{i,j}$, comme $\Delta_{i,j}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}^{\rightarrow}(\Gamma)$, on peut poser $\Delta_{i+1} = \Delta_{i,j}$, qui satisfait bien à toutes les conditions requises. ■

On notera A^{ad} la formule $(\wedge\Gamma_1) \vee \ldots \vee (\wedge\Gamma_n)$ où $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ sont les ensembles saturés fournis par la preuve ci-dessus, et satisfaisant donc à la conclusion du lemme.

Il est à remarquer que la preuve ci-dessus ne peut, en l'état, pas se formuler de façon constructive, car la détermination de toutes les conséquences d'une formule par $>$, même dans un ensemble fini, n'est pas a priori récursive (voir paragraphe 4.4.3). Nous montrerons au paragraphe 5.6 que la détermination de A^{ad} est en fait récursive.

Notre but est maintenant de montrer que, si $A \gg C$, alors $A^{ad} \vdash C$, ce qui permettra de conclure que la rétro-dérivabilité plus la dérivabilité capturent l'admissibilité. Pour cela il suffit de montrer qu'un ensemble saturé a mêmes conséquences admissibles et dérivables. Nous allons pour cela montrer qu'un ensemble saturé Γ a la propriété de disjonction pour l'admissibilité, en exhibant une Γ-identité validante, (voir paragraphes 2.2 et suivants) . En inspectant la preuve on pourra même donner une caractérisation récursive de A^{ad}, et donc conclure que l'admissibilité est décidable.

Nous allons tout d'abord, pour un ensemble saturé donné, exhiber une substitution qui "élimine" les formules anti-Harrop. C'est une composée des substitutions définies au paragraphe 3.5.

5.4 Elimination des anti-Harrop

Dans tout ce paragraphe nous fixons une formule G (ce qui suit est valable pour un ensemble fini de formules en posant $G = \wedge\Gamma$). On ajoute au langage une infinité de constantes vraies, $\top_\alpha$, pour chaque variable propositionnelle α. L'interprétation logique de $\top_\alpha$ est $\top = \bot \to \bot$, en particulier $\top_\alpha$ est stable par substitution. Pour α une variable propositionnelle et A une proposition, on pose $A^{-\alpha} = A[\top_\alpha/\alpha]$.

L'introduction des constantes $\top_\alpha$ simplifie un peu, d'une part parce qu'ainsi cette substitution conserve la structure des sous-formules (constantes), d'autre part parce qu'ainsi sa "réciproque"s'obtient trivialement. Il est clair que cela n'a rien de fondamental, $A^{-\alpha} = A[\bot \to \bot/\alpha]$ conviendrait, ainsi d'ailleurs que toute définition uniforme des $A^{-\alpha}$ vérifiant que $\alpha \vdash A^{-\alpha} \leftrightarrow A$ et $A^{-\alpha}$ ne contient pas α.

Remarquons également que $A^{-\alpha}$ est stable par toute substitution ne portant que sur α. On note $A^{+\alpha} = A[\alpha/\top_\alpha]$, attention, contrairement à $A^{-\alpha}$, $A^{+\alpha}$ n'est pas l'image de A par une substitution telle que nous les avons défini plus haut, puisque l'on substitue des constantes. Il s'agit donc seulement d'une notation. Le lemme suivant est évident.

Lemme 5.4.1 *Pour toute formule A sans occurrence de $\top_\alpha$, $A^{-\alpha+\alpha} = A$.*
Pour toute formule A sans occurrence de α, $A = A^{+\alpha-\alpha}$.
Pour toute formule A sans occurrence de $\top_\alpha$, pour toute sous-formule B' de $A^{-\alpha}$, il existe une sous-formule B de A, soit $B = B^{+\alpha}$ telle que $B' = B^{-\alpha}$.

On note $Var_G = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, l'ensemble des variables de G sur lesquelles on a fixé un ordre arbitraire donné par l'indexation.

5.4.1 Définition des substitutions "σ_i"

On définit maintenant les substitutions σ_i qui permettront en quelque sorte d'éliminer les formules anti-Harrop "potentiellement" dans G . Elles dépendent de ce qui précède, en particulier de la façon d'ordonner les variables. Ce sont des composées de substitutions telles que celles définies au paragraphe 3.5.

Définition 5.4.2 *On définit les substitutions s_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, par induction sur i. On note $\sigma_i = s_i \circ \ldots \circ s_1 \circ s_0$. On pose :*
- $s_0 = Id$,
- $s_{i+1} = [\sigma_i(G)^{-\alpha_{i+1}} \wedge \alpha_{i+1}/\alpha_{i+1}]$.

Une conséquence immédiate de la définition :

$$\begin{array}{lcl}
\textit{Pour } i > k \ , \ \ \sigma_k(\alpha_i) & = & \alpha_i \ ; \\
\textit{Pour } 0 < i \leq k \ , \ \ \sigma_k(\alpha_i) & = & s_k \circ \ldots \circ s_i(\alpha_i) \\
& = & s_k \circ \ldots \circ s_{i+1}(\sigma_{i-1}(G)^{-\alpha_i} \wedge \alpha_i) \\
& \equiv & s_k \circ \ldots \circ s_i(\sigma_{i-1}(G)^{-\alpha_i} \wedge \alpha_i) \ .
\end{array}$$

Lemme 5.4.3 *Les s_i et les σ_i sont des G-identités.*

Preuve : on procède par induction sur i. Supposons que s_i et σ_i sont des G-identités. On déduit de σ_i est une G-identité que

$$G \vdash G \leftrightarrow \sigma_i(G) \, .$$

On a donc

$$G \vdash \sigma_i(G) \, .$$

Comme d'autre part

$$\sigma_i(G)^{-\alpha_{i+1}} \wedge \alpha_{i+1} \equiv \sigma_i(G) \wedge \alpha_{i+1} \, ,$$

on a :

$$G \vdash (\sigma_i(G)^{-\alpha_{i+1}} \wedge \alpha_{i+1}) \leftrightarrow \alpha_{i+1},$$

c'est à dire que s_{i+1} est une G-identité.
Comme l'ensemble des G-identités est stable par composition (voir proposition 2.2.2), on conclut que σ_{i+1} est également une G-identité. ■

5.4.2 Sous-formules des substituées par les "σ_i"

On sera amené ensuite à étudier des rétro-dérivations de substitués par les σ_i. Il y a peu d'espoir d'obtenir comme sous-formules d'une substituée des substituées des sous-formules. On peut cependant décrire ces sous-formules, c'est le but des lemmes et notations qui suivent.

Lemme 5.4.4 *Soit s une substitution, alors une sous-formule de $s(A)$ est, soit $s(B)$ ou B est une sous-formule de A, soit une sous-formule propre de $s(\alpha)$ où α est une variable propositionnelle apparaissant dans A.*

PREUVE : induction évidente sur la complexité de A. ∎

Décrivons maintenant les sous-formules des substituées par les σ_i.

Définition 5.4.5 *Soit $1 \leq i_1 < \ldots < i_l$, on notera $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}$ la substitution définie pour toute formule C par récurrence sur q :*
- $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;0}(C) = \sigma_0(C) = C$;
- *Si $q+1 \notin \{i_1,\ldots,i_l\}$, alors $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(C) = s_{q+1}(\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(C))$;*
- *Si $q+1 \in \{i_1,\ldots,i_l\}$, alors $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(C) = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(C)^{-\alpha_{q+1}}$.*

REMARQUE : Si $i_l > q$ et i_j est le plus grand parmi les entiers $\{i_1,\ldots,i_l\}$ qui soit inférieur ou égal à q, alors :

$$\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q} = \sigma_{i_1,\ldots,i_j;q} \; .$$

On a bien entendu $\sigma_{\emptyset;q} = \sigma_q$.

Lemme 5.4.6 *Pour toute suite croissante $1 \leq i_1 < \ldots < i_l$, on a :*

$$\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_l},\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p}(G) \vdash \sigma_p(G) \; .$$

PREUVE : par induction sur p.
Si $p = 0$, c'est évident par définition de σ_0.
Supposons la propriété vraie pour p.

Si $p+1 \in \{i_1,\ldots,i_l\}$, alors $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p+1}(G) = (\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p}(G))^{-\alpha_{p+1}}$, donc, on déduit de l'hypothèse de récurrence ($\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_l},\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p}(G) \vdash \sigma_p(G)$) que :

$$\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_l},\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p+1}(G) \vdash \sigma_p(G) \; ,$$

d'où,

$$\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_l},\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p+1}(G) \vdash \sigma_p(G)^{-\alpha_{p+1}} \; .$$

On en déduit que pour toute formule C,

$$\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_l},\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p+1}(G) \vdash s_{p+1}(C) \leftrightarrow C \, ,$$

d'où le résultat souhaité :

$$\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_l},\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p+1}(G) \vdash \sigma_{p+1}(G) \; .$$

Si $p+1 \notin \{i_1,\ldots,i_l\}$, alors $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p+1}(G) = s_{p+1}(\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p}(G))$. On applique la substitution s_{p+1} à l'hypothèse de récurrence, ce qui donne directement le résultat. ∎

Définition 5.4.7 *A toute occurrence de sous-formule B de $\sigma_q(G)$, on associe une suite de $q+1$ formules notée $B^0, \dots, B^q$, et telle que $B^q = B$, que l'on appelle* suite associée *à B. A toute occurrence de sous-formule B de $\sigma_q(G)$, qui n'est pas une variable α_i pour $i \leq q$, on associe une suite croissante d'entiers entre 1 et q que l'on appelle* le type *de B dans $\sigma_q(G)$.*

On définit simultanément le type et la suite associée d'une occurrence de sous-formule B de $\sigma_q(G)$ par récurrence sur q.

- *Si $q = 0$ le type associé à toute occurrence de sous-formule est la suite vide. La suite associée à toute occurrence de sous-formule est cette sous-formule.*
- *Supposons que pour toute occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$ la suite associée est définie, ainsi que le type s'il ne s'agit pas d'une variable α_i pour $i \leq q$. Une occurrence de sous-formule B de $\sigma_{q+1}(G)$, est :*

  (i) *soit l'image par s_{q+1} d'une occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$ qui n'est pas une variable α_i pour $i \leq q$, auquel cas on pose que*
  B^q est cette sous-formule,
  la suite associée à B est la suite associée à B^q, prolongée par B,
  le type de B est celui de B^q ;

  (ii) *soit l'image par la substitution $[\top_{\alpha_{q+1}}/\alpha_{q+1}]$ d'une occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$ qui n'est pas une variable α_i, $i \leq q$, auquel cas on pose que*
  B^q est cette sous-formule,
  la suite associée à B est la suite associée à B^q, prolongée par B,
  et le type de B est celui de B^q prolongé par $q+1$.

  (iii) *soit une variable α_i, $i \leq q+1$, auquel cas le type n'est pas défini, et la suite associée est la suite constante de longueur $q+1$ égale à cette variable.*

On étend la notation $B^0, \dots, B^q$ à des ensembles de sous-formules de $\sigma_q(G)$ (de types éventuellement différents), à des séquents et à des conditions constitués de sous-formules de $\sigma_q(G)$.

Un cas particulier utile : $\sigma_q(G)$ est, en temps qu'occurrence de sous-formule d'elle même, de type vide, de suite associée $\sigma_q(G)^0 = G, \dots, \sigma_q(G)^i = \sigma_i(G), \dots, \sigma_q(G)^q = \sigma_q(G)$.

On a défini type et suite associée pour une occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$. Il n'y a aucune raison que deux occurrences distinctes d'une même sous-formule aient même type et même suite associée. De plus il faut assurer que la définition ci-dessus est correcte. Le lemme 5.4.4 et le lemme 5.4.1 assurent que l'on est toujours dans un des trois cas envisagés, et que ces cas sont exclusifs. Le (i) du lemme suivant assure que ceci s'hérite convenablement au cours de l'induction.

Lemme 5.4.8

(i) *Si B est une occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$ alors pour tout $j < q$, B^j est une occurrence de sous-formule de $\sigma_j(G)$ (en particulier B^0 est une sous-formule de G).*

De plus si B n'est pas une variable α_i pour $i \leq q$, alors B^j n'est pas une variable α_i pour $i \leq j$. Par conséquent les seules sous-formules de $\sigma_q(G)$ pour lesquelles le type n'est pas défini sont bien les variables α_i pour $i \leq q$.

(ii) *Si $i_1, \ldots, i_l$, une suite croissante d'entiers entre 1 et q, est le type d'une occurrence B de sous-formule de $\sigma_q(G)$ (B n'est donc pas une variable α_i pour $i \leq q$), alors pour tout $j \leq q$,*

$$B^j = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;j}(B^0)\ ,$$

(en particulier $B = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(B^0)$).

Par conséquent les sous-formules de $\sigma_q(G)$ sont, soit des variables α_i pour $i \leq q$, soit des images par les substitutions $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq q$ des sous-formules de G.

Preuve (i) : par récurrence sur q.
Pour $q = 0$ c'est évident (la numérotation des variables commence à 1).
Supposons le résultat pour q. Soit B une occurrence de sous-formule de $\sigma_{q+1}(G)$. D'après le lemme 5.4.4 et la définition 5.4.7, B^q est une occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$. Supposons que B n'est pas une variable α_i, $i \leq q+1$. Si B^q était une variable α_i pour $i \leq q$, ce serait également le cas de B ($B = s_{q+1}(B^q)$ ou $B = B^{q-\alpha_{q+1}}$), ce qui est exclu. On a donc le résultat souhaité pour B^q. Mais alors, les conditions de l'hypothèse de récurrence sont satisfaites pour B^q, et l'on obtient ainsi également le résultat souhaité pour B^j, $j < q$ (voir définition 5.4.7).

Preuve (ii) : par récurrence sur q.
Pour $q = O$, $B = B^0$, et le type associé est la suite vide, donc $B = \sigma_{\emptyset;0}(B^0)$.
Supposons le résultat pour q et montrons le pour $q+1$. Soit B, l'occurrence d'une sous-formule de $\sigma_{q+1}(G)$. On déduit immédiatement de la définition 5.4.7 que, pour $j \leq q$, $B^i = (B^q)^i$, et donc, si $i_1, \ldots, i_l$ est le type de B^q, on a $B^j = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;j}(B^0)$.

Le type de B est soit $i_1, \ldots, i_l$, soit $i_1, \ldots, i_l, q+1$. Pour $j \leq q$, on a,

$$B^j = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;j}(B^0) = \sigma_{i_1,\ldots,i_l,q+1;j}(B^0)$$

(voir la remarque qui suit la définition 5.4.5), on a donc dans les deux cas le résultat escompté pour $j \leq q$. Reste le cas $j = q+1$.

L'occurrence de sous-formule B de $\sigma_{q+1}(G)$ est soit l'image par $s_q + 1$ (5.4.7 (i)), soit l'image par $[\top_{\alpha_{q+1}}/\alpha_{q+1}]$ (définition 5.4.7 (ii)), de la sous-formule B^q de $\sigma_q(G)$. Dans les deux cas on obtient, d'après la définition 5.4.5), que

$$B = B^{q+1} = \sigma_{i_1,\ldots,i_l,q+1;q+1}(B^0)\,. \qquad \blacksquare$$

Quelques propriétés immédiates, mais indispensables :

Lemme 5.4.9

(i) *Si B est une occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$ et $B^0 = E' \, c \, F'$ pour un connecteur c, alors $B = E \, c \, F$, et pour tout $j < q$, $B^j = E^j \, c \, F^j$, en particulier $E' = E^0$ et $F' = F^0$.*

(ii) *Soit B est une occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$ de type $i_1, \ldots, i_l$ (qui n'est donc pas une variable α_i, $i \leq q$). Supposons que B^0 est une variable α_j.*

a. Si $j \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$ et $j \leq q$, alors

a.1. soit $j < i_1$, et

$$B = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(\alpha_j) = \alpha_j \wedge \sigma_{j,i_1,\ldots,i_l;q}(G)\,;$$

a.2. soit il existe k, $1 \leq k < l$ tel que $i_k < j < i_{k+1}$, et

$$B = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(\alpha_j) = \alpha_j \wedge \sigma_{j,i_{k+1},\ldots,i_l;q}(G)\,;$$

a.3. soit $i_l < j$, et

$$B = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(\alpha_j) = \alpha_j \wedge \sigma_{j;q}(G)\,.$$

b. Si $j > q$, alors

$$B = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(\alpha_j) = \alpha_j\,.$$

c. Si $j \in \{i_1, \ldots, i_l\}$, alors

$$B = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(\alpha_j) \equiv \top_{\alpha_j}\,.$$

(iii) *Soit une occurrence de la variable α_i dans $\sigma_q(G)$ avec $i \leq q$. Alors il existe une suite non vide d'entiers entre 1 et q, soit $i_1 < \ldots < i_l$, telle que $i = i_1$, et telle que cette occurrence de α_i apparaisse dans une occurrence de la sous-formule suivante de $\sigma_q(G)$:*

$$\alpha_i \wedge \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)\,,$$

où $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)$ est une occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$ de type $i_1, \ldots, i_l$, telle que $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)^0 = G$.

Preuve (i) : par induction sur q, c'est une conséquence directe de la définition 5.4.7.

Preuve (ii) : on sait que $B = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(\alpha_j)$. On montre par induction sur q, pour les formules $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(\alpha_j)$, le résultat énoncé ci-dessus modifié par l'ajout de la condition supplémentaire $j \leq q$ dans le cas c. Cette condition est conséquence de $j \in \{i_1, \ldots, i_l\}$ dans le cas où $i_1, \ldots, i_l$ est le type de la formule considérée.
Pour $q = 0$ c'est évident, car le type de B est la suite vide, on est dans le cas b, et la

substitution envisagée σ_0 est l'identité.
Supposons le résultat vrai pour q.
Si $j > q+1$, on est forcément dans le cas b pour q et $q+1$, et comme s_{q+1} ne modifie pas α_j le résultat suit par hypothèse d'induction.
Si $j < q+1$, on est forcément dans le cas a pour q et $q+1$. On obtient le résultat par hypothèse d'induction, en utilisant directement la définition 5.4.5. Voyons par exemple le cas $q+1 = i_1$. Par hypothèse d'induction,

$$\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(\alpha_j) = \alpha_j \wedge \sigma_{j,i_1,\ldots,i_l;q}(G)\,.$$

D'après la définition 5.4.5,

$$\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(\alpha_j) = (\alpha_j \wedge \sigma_{j,i_1,\ldots,i_l;q}(G))[\top_{\alpha_{q+1}}/\alpha_{q+1}] = \alpha_j \wedge \sigma_{j,i_1,\ldots,i_l;q+1}(G)\,.$$

Si $j = q+1$, alors soit $j \in \{i_1,\ldots,i_l\}$, et l'on passe du cas b au cas c, soit $j \notin \{i_1,\ldots,i_l\}$, et l'on passe du cas b au cas a, voyons par exemple $j < i_1$:

$$\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(\alpha_{q+1}) = \alpha_{q+1} \wedge \sigma_{q+1;q+1}(G) = \alpha_{q+1} \wedge \sigma_{q+1;q+1,i_1,\ldots,i_l}(G)\,.$$

Preuve (iii) : par induction sur q.
Si $q = 0$, il n'y a pas de variables α_i avec $i \leq 0$, c'est donc évident.
Supposons la propriété vraie pour q.

La variable α_{q+1} n'apparait dans $\sigma_{q+1}(G) = s_{q+1}(\sigma_q(G))$, que comme sous-formule de $s_{q+1}(\alpha_{q+1})$, par définition de cette substitution. On a :

$$s_{q+1}(\alpha_{q+1}) = \alpha_{q+1} \wedge \sigma_q(G)^{-\alpha_q} = \alpha_{q+1} \wedge \sigma_{q+1;q+1}(G)\,.$$

Comme $\sigma_q(G)$ est de type vide et $\sigma_q(G)^0 = G$, $\sigma_{q+1;q+1}(G)$ est une occurrence de sous-formule de $\sigma_{q+1}(G)$ de type $q+1$ et $\sigma_{q+1}(G)^0 = G$ (5.4.7 (ii)). Le résultat est donc démontré pour cette variable.

Voyons maintenant une variable α_i, avec $i \leq q$. Ces variables ne sont pas changées par s_{q+1}. Une occurrence de la variable α_i dans $\sigma_{q+1}(G) = s_{q+1}(\sigma_q(G))$ est donc, soit l'image par s_{q+1} d'une occurrence de α_i dans la formule $\sigma_q(G)$, soit une occurrence de α_i dans $\sigma_q(G)^{-\alpha_{q+1}}$. On applique l'hypothèse de récurrence dans les deux cas.
On obtient dans le premier cas que l'occurrence considérée de α_i apparait dans une sous-formule de la forme

$$s_{q+1}(\alpha_i \wedge \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)) = \alpha_i \wedge \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G)\,.$$

On obtient dans le second cas que l'occurrence considérée de α_i apparait dans une sous-formule de la forme

$$(\alpha_i \wedge \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G))^{-\alpha_{q+1}} = \alpha_i \wedge \sigma_{i_1,\ldots,i_l,q+1;q+1}(G)\,.$$

Dans les deux cas $i_1, \ldots, i_l$ est le type de $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)$, comme occurrence de sous-formule de $\sigma_q(G)$, et $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)^0 = G$.

Dans le premier cas, par définition (5.4.7 (i)), le type de $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G)$ égale celui de $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)$, et $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G)^0 = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)^0 = G$.

Dans le second cas par définition (5.4.7 (ii)), le type de $\sigma_{i_1,\ldots,i_l,q+1;q+1}(G)$ égale celui de $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)$ prolongé par $q+1$, et $\sigma_{i_1,\ldots,i_l,q+1;q+1}(G)^0 = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)^0 = G$.

On a donc dans chacun des deux cas le résultat voulu. ■

5.4.3 Etude d'une rétro-dérivation d'une formule "$\sigma_p(G)$"

Dans ce paragraphe, l'entier p est fixé. On va considérer une rétro-dérivation du séquent $\vdash \sigma_p(G)$. Voyons d'abord un lemme décrivant une telle rétro-dérivation.

Lemme 5.4.10 *On considère une rétro-dérivation $(\vdash \sigma_p(G))$ **rd** $\mathcal{C}$. Soit S un séquent de $\mathcal{C}$. On associe à S l'ensemble I_S de tous les indices qui interviennent dans les types des formules de S, excepté k, si S est maximal gauche et $S = \alpha_k, \Gamma \vdash C$. On considère la branche de la rétro-dérivation de feuille S, que l'on note $b(S)$. On a les résultats suivants.*

(i) *Pour chaque variable α_j dans I_S, il existe un séquent non pointé*

$$S'_j = \Sigma_j \vdash \sigma_{i_1,\ldots,i_l;p}(G) \ , \quad \textit{avec } 1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq p \textit{ et } j \in \{i_1, \ldots, i_l\} \, ,$$

qui apparait dans $b(S)$, comme prémisse d'une règle ($\wedge$droite), dont l'autre prémisse est $\Sigma_j \vdash \alpha_j$. On désignera cette dernière par $S_j = \Sigma_j \vdash \alpha_j$. De plus, aucun des séquents de $b(S)$ qui apparaissent entre la racine et S'_j, ne contient de formules de type $k_1, \ldots, k_m; p$ avec $j \in \{k_1, \ldots, k_m\}$ (en particulier, l'ensemble Σ_j a cette propriété).

(ii) *Tous les séquents S_j ont leur partie gauche incluse dans celle de S, de plus il est possible d'ordonner I_S, soit $I_S = \{\alpha_{s_1}, \ldots, \alpha_{s_t}\}$, de façon que, si $e < f$, alors $\Sigma_{s_e} \subset \Sigma_{s_f}$.*

(iii) *Enfin tous les séquents S_j, $j \in I_S$ définis ci-dessus font partie de toute sous-dérivation contenant S, donc de toute conjonction de la forme normale disjonctive de $\mathcal{C}$ contenant S.*

Preuve (i) : considérons dans la branche $b(S)$, la première occurrence à partir de la racine d'un séquent comportant une formule E de type $(k_1, \ldots, k_m; p)$ avec $j \in \{k_1, \ldots, k_m\}$. Considérons la formule principale de la règle dont ce séquent est une prémisse. Si elle était égale à $\sigma_{g_1,\ldots,g_q;p}(E \ c \ F)$, on aurait $(k_1, \ldots, k_m) = (g_1, \ldots, g_q)$ (lemme 5.4.9 (i)), et donc $j \in \{g_1, \ldots, g_q\}$ ce qui contredirait les hypothèses. Donc c'est une formule atomique. Ce n'est pas $\perp$ qui ne peut être formule principale d'une règle. Donc c'est une variable. Comme $j \notin \{g_1, \ldots, g_q\}$,mais doit apparaître dans le type de E, ce ne peut être que α_j. On a d'après le lemme 5.4.9 (ii) :

$$\sigma_{g_1,\ldots,g_q;p}(\alpha_j) = \sigma_{k_1,\ldots,k_m;p}(G) \wedge \alpha_j \ \ \textit{avec} \ \ E = \sigma_{k_1,\ldots,k_m;p}(G).$$

Si cette formule était située à gauche du signe thèse, l'unique prémisse de la règle ($\wedge gauche$) serait un séquent maximal gauche donc la feuille de la branche, soit S, ce qui contredit l'hypothèse $j \notin I_S$. Cette formule est donc située à droite du signe thèse, et on obtient le résultat cherché.

PREUVE (ii) : en ordonnant maintenant I_s selon l'ordre d'apparition des séquents S'_j, on obtient par croissance des parties gauches le résultat énoncé.

PREUVE (iii) : les séquents S_j sont maximaux, donc obligatoirement présents dans $\mathcal{C}$. Ils sont par construction dans une même sous-dérivation contenant la branche $b(S)$. ∎

Le lemme suivant permet de se ramener à des formules de $\mathcal{F}^{\rightarrow,\wedge,\vee}(G)$, ce afin d'utiliser le fait que G est saturée.

Lemme 5.4.11 *Soit $\mathcal{C}$ une condition telle que $(\vdash \sigma_p(G))$ **rd** $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_d$ sa forme normale disjonctive (celle de la définition 4.4.2). Soient $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}_1^0, \ldots, \mathcal{C}_d^0$ définies telles que ci-dessus, à la définition 5.4.7 (composées de séquents composés de sous-formules de G). On a pour tout $r \in \{1, \ldots, d\}$: $G \vdash \mathcal{C}_r^{\rightarrow} \leftrightarrow \mathcal{C}_r^{0\rightarrow}$, et donc $G \vdash \mathcal{C}^{\rightarrow} \leftrightarrow \mathcal{C}^{0\rightarrow}$.*

PREUVE : on prouve par récurrence sur q, $q \leq p$ que :

$$G \vdash \mathcal{C}_r^{q\rightarrow} \leftrightarrow \mathcal{C}_r^{0\rightarrow} .$$

Cela permettra de conclure puisque pour toute sous-formule A de $\sigma_p(G)$, $A^p = A$.
Le résultat est évident pour $q = 0$.
Supposons le résultat pour $q < p$ et montrons le pour $q + 1$. Pour cela il nous suffit de montrer que $G \vdash \mathcal{C}_r^{q\rightarrow} \leftrightarrow \mathcal{C}_r^{q+1\rightarrow}$. Pour une sous-formule donnée A de type $(i_1, \ldots, i_l; p)$ qui apparait dans $\mathcal{C}_r$ deux cas se présentent. Si $q + 1 \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$, alors :

$$A^{q+1} = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(A^0) = s_{q+1}(\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(A^0)) = s_{q+1}(A^q) ,$$

et donc, comme s_{q+1} est une G-identité on a, en substituant A^{q+1} à un certain nombre d'occurrences de A^q :

$$G \vdash \mathcal{C}_r^{q\rightarrow} \leftrightarrow \mathcal{C}_r^{q\rightarrow}[A^{q+1}/A^q] .$$

On suppose que l'on réalise d'abord les substitutions $[A^{q+1}/A^q]$ pour toutes les formules A de type $(i_1, \ldots, i_l; p)$, avec $q + 1 \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$ dans $\mathcal{C}_r$. Soit $\mathcal{C}_r^{q,q+1}$ la condition intermédiaire, équivalente à $\mathcal{C}_r$ obtenue.
Considérons maintenant les formules A de type $(i_1, \ldots, i_l; p)$, telles que $q+1 \in \{i_1, \ldots, i_l\}$, on a :

$$A^{q+1} = \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(A^0) = (\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(A^0))^{-\alpha_{q+1}} = A^{q-\alpha_{q+1}} .$$

Deux cas sont possibles, d'après le lemme 5.4.10.
Soit A apparait dans un séquent de $\mathcal{C}_r$ de la forme $\alpha_{q+1}, A, \Delta \vdash C$. On rappelle que pour tout $i \leq q+1$, $(\alpha_{q+1})^i = \alpha_{q+1}$. Il est clair qu'un tel séquent est transformé en un séquent équivalent par la substitution $[A^{q-\alpha_{q+1}}/A^q]$;
soit A apparait dans un séquent de $\mathcal{C}_r$ de la forme $\Sigma \cup \Delta \vdash C$, avec $A \in \Delta \cup \{C\}$, $\mathcal{C}_r$ contient un séquent maximal $\Sigma \vdash \alpha_{q+1}$ distinct, et Σ ne contient pas de formules de type $(k_1, \ldots, k_m; p)$ avec $q+1 \in \{k_1, \ldots, k_m\}$.

Dans le cadre du précédent cas, ont été "traduits" le séquent $\Sigma \vdash \alpha_{q+1}$, et dans l'autre séquent les formules de Σ, et une partie éventuellement de $\Delta \cup \{C\}$. On rappelle que $\mathcal{C}_r$, est une conjonction de séquents, et donc les $\mathcal{C}_r^i$ et $\mathcal{C}_r^{q,q+1}$ également. On a donc comme éléments de la conjonction $\mathcal{C}_r^{q,q+1}$ les séquents :

$$(\Sigma \vdash \alpha_{q+1})^{q+1} \ \ \textit{et} \ \ \Sigma^{q+1} \cup \Delta_1^{q+1} \cup \Delta_2^q \vdash C^k, \ \ \textit{avec} \ \ k = q \ \textit{ou} \ k = q+1 \ .$$

Remarquons que :

$$(\Sigma \vdash \alpha_{q+1})^{q+1} = \Sigma^{q+1} \vdash \alpha_{q+1} \ ,$$

or :

$$\begin{array}{rl} & (\Sigma^{q+1} \to \alpha_{q+1}) \wedge (\Sigma^{q+1} \cup \Delta_1^{q+1} \cup \Delta_2^q \to C^k) \\ \equiv & (\Sigma^{q+1} \to \alpha_{q+1}) \wedge (\Sigma^{q+1} \cup \Delta_1^{q+1} \cup (\Delta_2^q)^{-\alpha_{q+1}} \to C^{q+1}) \\ = & (\Sigma^{q+1} \to \alpha_{q+1}) \wedge (\Sigma^{q+1} \cup \Delta_1^{q+1} \cup \Delta_2^{q+1} \to C^{q+1}) \ . \end{array}$$

On obtient donc en appliquant successivement cette transformation pour chaque séquent :

$$\mathcal{C}_r^{q,q+1\to} \equiv \mathcal{C}_r^{q+1\to}$$

et donc finalement :

$$G \vdash \mathcal{C}_r^{q\to} \leftrightarrow \mathcal{C}_r^{q+1\to} \ ,$$

ce qui achève l'induction. ■

5.4.4 Lorsque "G" est saturée

On donne deux lemmes, conséquences du lemme 5.4.11, qui permettent de conclure quand G est saturée.

Lemme 5.4.12 *On reprend les notations du lemme 5.4.11. On suppose de plus que G est saturée. Soit $\mathcal{C}$ une condition telle que $(\vdash \sigma_p(G))$ $\boldsymbol{rd}$ $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_d$ sa forme normale disjonctive, alors il existe $r \in \{1, \ldots, d\}$ tel que :*

$$G \vdash \mathcal{C}_r^{\to} \vdash \sigma_p(G) \ .$$

PREUVE : on sait que $G \vdash \sigma_p(G)$, car σ_p est une G-identité. On sait que par définition de la rétro-dérivation :

$$\sigma_p(G) > \mathcal{C}_1^{\rightarrow} \vee \ldots \vee \mathcal{C}_d^{\rightarrow} \ ,$$

donc :

$$G > \mathcal{C}_1^{\rightarrow} \vee \ldots \vee \mathcal{C}_d^{\rightarrow} \ ,$$

on applique maintenant le lemme 5.4.11 :

$$G > \mathcal{C}_1^{0\rightarrow} \vee \ldots \vee \mathcal{C}_d^{0\rightarrow} \ .$$

Or les conditions $\mathcal{C}_i^0$ sont des conjonctions de séquents formés de sous-formules de G, et donc les formules $\mathcal{C}_i^{0\rightarrow}$ appartiennent à $\mathcal{F}^{\rightarrow,\wedge}(G)$. on peut donc appliquer la définition de la saturation (voir paragraphe 5.3). Il existe r tel que $G \vdash \mathcal{C}_r^{0\rightarrow}$. On applique à nouveau le lemme 5.4.11 et on obtient

$$G \vdash \mathcal{C}_r^{\rightarrow} \ .$$

Le fait que $\mathcal{C}_r^{\rightarrow} \vdash \sigma_p(G)$ est une conséquence de la définition de la relation "***rd***" (lemme 4.4.10). ■

Le lemme suivant a un double but : fournir une G-identité validante dans le cas où G est saturée en se ramenant à un ensemble de formules de Harrop, donner une caractérisation récursive de la saturation. Il utilise dans sa preuve le lemme 5.4.11

Lemme 5.4.13 *On reprend les notations du lemme 5.4.11. Soit $\mathcal{C}$ est une condition telle que $(\vdash \sigma_p(G))$ **rd** $\mathcal{C}$. On suppose que l'une des conjonctions de la forme normale disjonctive de $\mathcal{C}$, soit $\mathcal{C}_r$, vérifie :*

$$G \vdash \mathcal{C}_r^{\rightarrow} \vdash \sigma_p(G) \ .$$

Alors tout séquent maximal gauche S de $\mathcal{C}_r$ (correspondant à une formule anti-Harrop) est conséquence de la conjonction $\mathcal{C}_{r,\mathbf{d}}$ des séquents maximaux droits de $\mathcal{C}_r$ (correspondant à des formules de Harrop) :

$$\mathcal{C}_{r,\mathbf{d}}^{\rightarrow} \vdash S^{\rightarrow} \ .$$

PREUVE : soit S un séquent maximal gauche de $\mathcal{C}_r$. On remarque tout d'abord que S n'a pu être obtenu que comme prémisse d'une règle dont la formule principale est du type $\alpha_i \ c \ A$ ou $A \ c \ \alpha_i$, ce par définition de la rétro-dérivation. Mais d'après le lemme 5.4.9(iii) on sait que cette formule est du type $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p}(G) \wedge \alpha_i$ avec $i \in \{i_1, \ldots, i_l\}$. La dernière règle appliquée est donc un ($\wedge$*gauche*). S s'écrit donc :

$$S = \alpha_i, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;p}(G), \Delta \vdash C \ .$$

Toujours d'après 5.4.9(iii), cette occurrence de $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p}(G)$ est effectivement de type $i_1,\ldots,i_l$, et vérifie $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;p}(G)^0 = G$. On peut donc déduire du lemme 5.4.8 (ii) :

$$S^q = \alpha_i, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G), \Delta^q \vdash C^q \ .$$

On associe maintenant (comme au lemme 5.4.10) à S l'ensemble I_S de tous les indices qui interviennent dans les types des formules de S, y compris $i_1,\ldots,i_l$, excepté i, et pour chaque $\alpha_j \in I_S$ les séquents maximaux droits $S_j = \Sigma_j \vdash \alpha_j$ correspondant. D'après le lemme 5.4.10 (iii), les S_j sont dans toute conjonction de la forme normale disjonctive de $\mathcal{C}$ dans laquelle S apparait, donc tous dans $\mathcal{C}_r$. D'après le lemme 5.4.10 (ii), leurs parties gauches sont totalement ordonnées par inclusion, et inclues dans celle de S, donc dans Δ (5.4.10 (i)). En particulier, une formule de Σ_j a un type $k_1,\ldots,k_m;p$ vérifiant $\{k_1,\ldots,k_m\} \subset I_S$.

On va, de façon analogue au lemme 5.4.11, prouver par induction sur q où $q \leq p$ et p fixé, que :

$$\{\Sigma_j^q \to \alpha_j \ , \ \ j \in I_s\}, \alpha_i, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G), \Delta^q \vdash C^q \ . \qquad (P_q)$$

Pour $q = 0$, on sait, d'après le lemme 5.4.11, que $G \vdash \mathcal{C}_r^{0\to}$, $S^0 = \alpha_i, G, \Delta^0 \vdash C^0$ est donc prouvable.
Supposons maintenant le résultat vrai pour $q < p$ et montrons le pour $q+1$. Rappelons que I_S contient tous les indices qui interviennent dans les types des formules de (P_q) excepté i.

Supposons tout d'abord que $q+1 \notin I_S$, et $q+1 \neq i$.
En appliquant la substitution s_{q+1} à (P_q) on obtient(P_{q+1}), d'où le résultat.

Supposons que $q+1 = i$ (donc $q+1 \notin I_S$ et $q+1 \in \{i_1,\ldots,i_l\}$).
Comme α_{q+1} est une formule gauche du séquent, on conserve la prouvabilité de celui-ci en remplaçant dans (P_q) toutes les formules A^q , avec A de type $k_1,\ldots,k_m;p$ et $q+1 \in \{k_1,\ldots,k_m\}$, par $A^{q+1} = A^{q-\alpha_{q+1}}$. Soit (P'_q) le résultat obtenu. On applique s_{q+1} à (P'_q). On obtient, comme les formules $A^{q-\alpha_{q+1}}$ ne sont pas transformées, que le séquent suivant est prouvable :

$$\{\Sigma_j^{q+1} \to \alpha_j \ , \ \ j \in I_s\}, \alpha_{q+1}, \sigma_q(G)^{-\alpha_{q+1}}, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G), \Delta^{q+1} \vdash C^{q+1} \, .$$

Rappelons que $q+1 \in \{i_1,\ldots,i_l\}$, et donc $\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G) = (\sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G))^{-\alpha_{q+1}}$.

D'après le lemme 5.4.10, les Σ_j sont tous inclus dans Δ, et donc pour tout $j \in I_s$:

$$\{\Sigma_j^{q+1} \to \alpha_j \ , \ \ j \in I_s\}, \alpha_{q+1}, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G), \Delta^{q+1} \vdash \alpha_j \, . \qquad (*)$$

D'autre part, d'après le lemme 5.4.6,

$$\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_l}, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G) \vdash \sigma_q(G) \, ,$$

donc

$$\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_l}, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q}(G)^{-\alpha_{q+1}} \vdash \sigma_q(G)^{-\alpha_{q+1}} ,$$

i.e.

$$\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_l}, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G) \vdash \sigma_q(G)^{-\alpha_{q+1}} .$$

Or, par définition de I_S, $\{i_1, \ldots, i_l\} - \{q+1\} \subset I_S$, donc d'après l'assertion $(*)$,

$$\{\Sigma_j^{q+1} \to \alpha_j \ , \ \ j \in I_s\}, \alpha_{q+1}, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G), \Delta^{q+1} \vdash \sigma_q(G)^{\alpha_{q+1}} ,$$

d'où le résultat cherché :

$$\{\Sigma_j^{q+1} \to \alpha_j \ , \ \ j \in I_s\}, \alpha_{q+1}, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G), \Delta^{q+1} \vdash C^{q+1} .$$

Supposons maintenant que $q+1 \in I_S$ (donc $q+1 \neq i$).
Considérons le séquent $\Sigma_{q+1} \vdash \alpha_{q+1}$. On sait que Σ_{q+1} ne contient pas de formule de type $k_1, \ldots, k_m; p$ avec $q+1 \in \{k_1, \ldots, k_m\}$, et que Σ_{q+1} est contenu dans Δ , ainsi que dans tous les Σ_j, $j \in I_S$ dès qu'ils contiennent de telles formules de type $k_1, \ldots, k_m; p$ (lemme 5.4.10). Comme $q+1 \in I_S$, $\Sigma_{q+1} \vdash \alpha_{q+1}$ apparait à droite du signe thèse dans (P_q), On peut donc conserver la prouvabilité de (P_q), en remplaçant dans les Σ_j^q et dans S^q , les formules A^q , avec A de type $k_1, \ldots, k_m; p$ et $q+1 \in \{k_1, \ldots, k_m\}$, par $A^{q+1} = A^{q-\alpha_{q+1}}$ (ceci ne modifiera pas le séquent $\Sigma_{q+1} \vdash \alpha_{q+1}$.

On applique ensuite s_{q+1} au séquent obtenu. On obtient, après avoir décomposer $\Sigma_{q+1}^{q+1} \to \alpha_{q+1} \wedge \sigma_q(G)^{\alpha_{q+1}}$ en $\Sigma_{q+1}^{q+1} \to \alpha_{q+1}$ et $\Sigma_{q+1}^{q+1} \to \sigma_q(G)^{\alpha_{q+1}}$:

$$\{\Sigma_j^{q+1} \to \alpha_j \ , \ \ j \in I_s\}, \Sigma_{q+1}^{q+1} \to \sigma_q(G)^{\alpha_{q+1}}, \alpha_i, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G), \Delta^{q+1} \vdash C^{q+1} .$$

D'après le lemme 5.4.10, les Σ_j sont tous inclus dans Δ. On en déduit que, pour tout $j \in I_s$:

$$\{\Sigma_j^{q+1} \to \alpha_j \ , \ \ j \in I_s\}, \alpha_i, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G), \Delta^{q+1} \vdash \alpha_j .(**)$$

Or, par définition de I_S, $\{i_1, \ldots, i_l\} - \{i\} \subset I_S$. De la même façon qu'au cas précédent, on déduit de l'assertion $(**)$ et du lemme 5.4.6 que

$$\{\Sigma_j^{q+1} \to \alpha_j \ , \ \ j \in I_s\}, \alpha_{q+1}, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G), \Delta^{q+1} \vdash \sigma_q(G)^{\alpha_{q+1}} ,$$

et on obtient le résultat cherché :

$$\{\Sigma_j^{q+1} \to \alpha_j \ , \ \ j \in I_s\}, \alpha_i, \sigma_{i_1,\ldots,i_l;q+1}(G), \Delta^{q+1} \vdash C^{q+1} .$$ ∎

5.5 Admissibilité égale dérivabilité plus rétro-dérivabilité

Proposition 5.5.1 *Soit* Γ *un ensemble (fini) saturé de formules propositionnelles. Alors,soit* $\wedge\Gamma$ *est une antilogie classique, soit* Γ *possède une* Γ*-identité validante qui ne substitue que des formules construites sur les variables de* Γ*. Donc* Γ *a la propriété de disjonction pour l'admissibilité, et donc mêmes conséquences admissibles et dérivables.*

PREUVE : on pose $Var_\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. On applique le lemme 5.4.13 précédent, avec $p = n$, $G = \wedge\Gamma$ et $\mathcal{C}$ obtenue par une rétro-dérivation maximale de $\sigma_n(G)$ (il en existe une, voir lemme 4.4.12). On choisit pour $\mathcal{C}_r$ la conjonction fournie par le lemme 5.4.12. Comme $\mathcal{C}$ ne contient que des séquents maximaux et que le lemme 5.4.13 montre que les séquents maximaux gauches sont conséquences des séquents maximaux droits, on obtient en prenant la conjonction des formules correspondant aux séquents maximaux droits de $\mathcal{C}$, une formule de Harrop H , qui est soit équivalente à une conjonction de formules de Harrop simples (cf lemme 5.1.1), soit équivalente à $\top$, soit équivalente à $\bot$, telle que :

$$G \vdash H \vdash \sigma_n(G) \ .$$

Si $H = \top$, σ_n est G-validante. On conclut par le lemme 2.2.4 que G a mêmes conséquences admissibles dérivables.
Si H , est une conjonction de formules de Harrop simples, d'après le lemme 5.1.2 il existe une H-identité validante, soit s . Comme $G \vdash H$, s est également une G-identité, et donc $s \circ \sigma_n$ est une G-identité. D'autre part comme $H \vdash \sigma_n(G)$, on a $s(H) \vdash s \circ \sigma_n(G)$. De plus on sait que s est H-validante, $s(H)$ est démontrable, donc $s \circ \sigma_n(G)$ également, et donc $s \circ \sigma_n$ est G-validante. On conclut par le lemme 2.2.4 que G a mêmes conséquences admissibles dérivables.
Supposons maintenant que H est équivalente à $\bot$ donc une antilogie classique, comme $G \vdash H$, G est également une antilogie. On conclut comme au paragraphe 3.4. ■

Corollaire 5.5.2 *Un ensemble fini* Γ *de formules propositionnelles non contradictoire a la propriété de disjonction pour l'admissibilité si et seulement s'il existe une* Γ*-identité-validante.*

Un ensemble fini Γ *de formules propositionnelles non contradictoire a la propriété de disjonction pour l'admissibilité si et seulement s'il existe une* Γ*-identité-validante qui ne substitue que des formules construites sur les variables de* Γ*.*

PREUVE : on sait que s'il existe une Γ-identité-validante, Γ a la propriété de disjonction pour l'admissibilité (lemme 2.2.4). Réciproquement, si Γ a la propriété de disjonction pour l'admissibilité, Γ est évidemment saturé et on conclut par la proposition 5.5.1 précédente. ■

Proposition 5.5.3 (complétude) *Pour un ensemble fini* Γ *de formules propositionnelles,* C *une formule propositionnelle, on a :*

$$\Gamma \gg C \ \ ssi \ \ \Gamma > C \ .$$

Plus précisémment, à tout ensemble Γ *de formules, on peut associer un ensemble de formules* $\Gamma^{ad} = \bigvee_{i=1}^{q} \wedge\Gamma_i$ *, où les* Γ_i *sont des ensembles saturés, tels que pour toute formule* C *:*

$$\Gamma \gg C \ \ ssi \ \ \Gamma^{ad} \vdash C \ ,$$

et

$$\Gamma \dashv\!> \Gamma^{ad} \ .$$

Preuve : d'après le lemme 5.3.5, il existe $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ sous-ensembles saturés, tels que :

$$\wedge\Gamma \dashv\!> (\wedge\Gamma_1) \vee \ldots \vee (\wedge\Gamma_n) \ .$$

On pose $\Gamma^{ad} = (\wedge\Gamma_1) \vee \ldots \vee (\wedge\Gamma_n)$.
De Γ ***rd*** Γ^{ad}, on déduit (lemme de fidélité 4.4.15) $\Gamma \gg \Gamma^{ad}$. De $\Gamma^{ad} \vdash \Gamma$, on déduit de même $\Gamma^{ad} \gg \Gamma$. Par composition de la relation d'admissibilité, on obtient,

$$\Gamma \gg C \ \ ssi \ \ \Gamma^{ad} \gg C \ .$$

D'après le lemme 1.5.3, la proposition 5.5.1 et comme les Γ_i sont saturés,

$$\Gamma^{ad} \gg C \ \ ssi \ \ \Gamma^{ad} \vdash C \ . \qquad \blacksquare$$

Corollaire 5.5.4 *Pour un ensemble fini de formules donné* Γ *, il existe un nombre fini de substitutions* $s_1, \ldots, s_q$ *, à valeurs dans l'ensemble des formules propositionnelles ne comportant que des variables propositionnelles apparaissant dans* Γ *, et telles que pour toute formule* C *:*

$$\Gamma \gg C \ \ ssi \ \ pour\ tout\ i \in \{1, \ldots, q\}, \vdash s_i(C) \ .$$

Preuve : conséquence du corollaire 5.5.2 et de la proposition 5.5.3. ■

Corollaire 5.5.5 *les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La formule* G *a mêmes conséquences admissibles et dérivables*

(ii) *La formule* G *est équivalente à une disjonction de p formules ayant la propriété de disjonction pour l'admissibilité.*

(iii) *Soit* G *est une antilogie, soit il existe p substitutions* $s_1, \ldots, s_p$ *telles que* $\vdash s_1(G), \ldots, \vdash s_p(G)$ *et pour toute proposition* C*,* $s_1(C) \wedge \ldots \wedge s_p(C) \vdash G \to C$.

Preuve ((i)⇔(ii)) : on déduit de la proposition 5.5.3 précédente qu'il existe une disjonction de p formules saturées G^{ad} telle que $G \dashv\!> G^{ad}$. Si G a mêmes conséquences admissibles et dérivables alors $G \equiv G^{ad}$. La réciproque est déja démontrée (cf lemmes 2.2.4 et 1.5.3).

Preuve ((ii)⇒(iii)) : soient $G_1, \ldots, G_p$ des formules ayant la propriété de disjonction pour l'admissibilité et vérifiant $G \equiv \bigvee_{i=1}^{p} G_i$. D'après le corollaire 5.5.2, pour chaque G_i, il existe une G_i-identité validante s_i. Par définition d'une G_i-identité, pour toute proposition C,

$$G_i \to s_i(C) \equiv G_i \to C\,.$$

On en déduit que

$$\bigwedge_{i=1}^{p}(G_i \to s_i(C)) \equiv \bigwedge_{i=1}^{p}(G_i \to C)\,,$$

et donc

$$\bigwedge_{i=1}^{p} s_i(C) \vdash G \to C\,.$$

Preuve ((iii)⇒(i)) : on applique la définition de l'admissibilité pour $s_1, \ldots, s_p$. ∎

5.6 Résultats de décidabilité

Proposition 5.6.1 *La saturation (ou le fait d'avoir la propriété de disjonction pour l'admissibilité) d'un ensemble de formules* Γ *est décidable. Plus précisémment, posons* $G = \wedge\Gamma$ *avec* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *une énumération de toutes les variables de* Γ *. On associe à* G *la substitution* σ_n *définie en 5.4.2. Soit* $\mathcal{C}$ *la condition maximale telle que* $\sigma_n(G)\ \boldsymbol{rd}\ \mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_d$ *la forme normale disjonctive de* $\mathcal{C}$ *. Alors* Γ *est saturé si et seulement si il existe* r *tel que* $G \vdash \mathcal{C}_r^{\to}$ *, et ceci est décidable.*

Preuve : s'il n'existe pas un tel r , il est clair que Γ n'est pas saturé. Si un tel r existe on peut appliquer le lemme 5.4.11. On a donc construit une formule de Harrop H vérifiant $G \vdash H \vdash \sigma_n(G)$. On en déduit exactement comme en 5.5.3 l'existence d'une Γ-identité et donc la saturation de Γ . La détermination de $\mathcal{C}$, condition formée de sous-formules de Γ est décidable, donc celle de sa forme normale disjonctive l'est également. On est donc ramené à la décidabilité de la relation de déduction intuitionniste. ∎

Proposition 5.6.2 *La détermination pour un ensemble* Γ *de formules d'un ensemble* $\Gamma^{ad} = \bigvee_{i=1}^{q} \wedge\Gamma_i$ *, où les* Γ_i *sont des ensembles saturés, tels que pour toute formule* C *:*

$$\Gamma \gg C \ \ ssi \ \ \Gamma^{ad} \vdash C \ ,$$

et

$$\Gamma \dashv\!> \Gamma^{ad} \ .$$

(voir proposition 5.5.3) est décidable. Par conséquent l'admissibilité en calcul propositionnel intuitionniste est décidable, avoir mêmes conséquences admissibles et dérivables est décidable.

Preuve : il s'agit de montrer qu'il est possible de construire de façon récursive pour un ensemble Γ de formules données les ensembles saturés (voir lemme 5.3.5), soient $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ tels que :

$$\wedge\Gamma \dashv\!> \bigvee_{i=1}^{q} \wedge\Gamma_i \ .$$

Comme pour la proposition précédente, la preuve d'élimination des anti-Harrop fournit le procédé. On construit la substitution σ_n , (n le nombre de variables de Var_Γ) telle que définie au paragraphe 5.4. On applique le lemme 5.4.11 avec $p = n$. On obtient des ensembles de sous-formules d'ordre 1 de Γ , Harrop et anti-Harrop. Si l'un d'entre eux est la conséquence de Γ , d'après la proposition précédente Γ est saturé. Si aucun des ensembles obtenus n'est conséquence de Γ , celui-ci n'est donc pas saturé. On construit les ensembles obtenus en réunissant à Γ chacun des ensembles obtenus et on réïtère le procédé pour chacun d'entre eux. Comme on reste toujours dans l'ensemble fini $\mathcal{F}^{\to,\wedge,\vee}(\Gamma)$, le procédé termine, et l'on construit les ensembles $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ vérifiant :

$$\Gamma \gg C \quad ssi \quad \Gamma_1 \vdash C \ \ et \ \ldots \ et \ \ \Gamma_q \vdash C \ . \qquad \blacksquare$$

Il est à remarquer que le processus de décision pour l'admissibilité indiqué ci-dessus semble extrêmement lourd, même comparé à celui pour la prouvabilité, y compris en effectuant un certain nombre d'améliorations immédiates utilisant l'inversibilité de certaines règles. Je n'ai pas étudier la complexité de ce processus de décision.

Troisième partie
Exemples, applications

6 Le calcul propositionnel à une variable

Le cas des formules à une variable en calcul propositionnel intuitionniste est très particulier et assez peu représentatif du cas général. Mais, comme il se décrit simplement, il permet d'illustrer facilement les notions introduites précédemment.

6.1 Le treillis de Rieger-Nishimura

Le treillis pour la déduction de l'algèbre de Lindenbaum (ensemble des formules quotienté par l'équivalence) à une variable α a une forme remarquable qui est la suivante [Ni 60, Tr vD 88] :

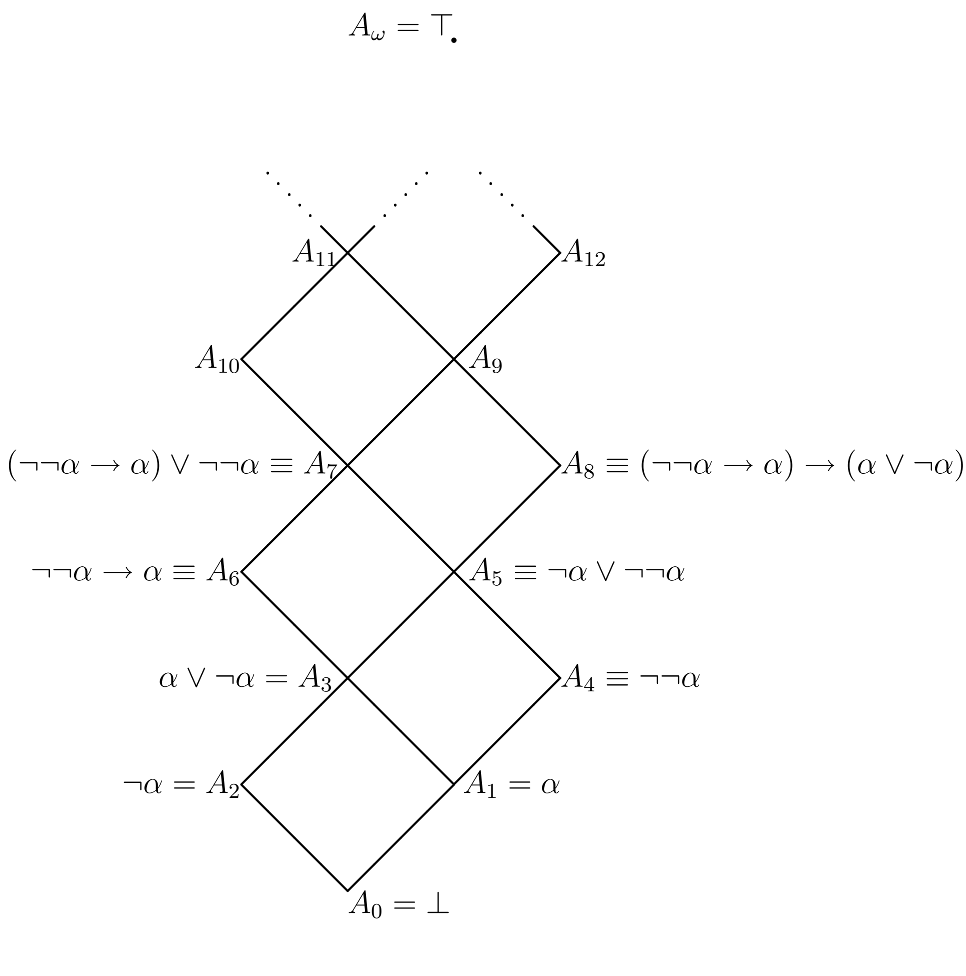


FIG. 1 – Treillis de Rieger-Nishimura

Les formules $A_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, sont décrites inductivement par :
- $A_0 = \bot,\ A_1 = P,\ A_2 = \neg P,\ A_\omega = \top$;
- $A_{2p+3} = A_{2p+2} \vee A_{2p+1}$ pour $p \in \mathbb{N}$;
- $A_{2p+4} = A_{2p+2} \rightarrow A_{2p+1}$ pour $p \in \mathbb{N}$.

6.2 Substitutions et treillis de Rieger-Nishimura

D'après le corollaire 5.5.4, on peut, pour étudier l'admissibilité dans ce cas particulier, se limiter à des substitutions de formules propositionnelles à une variable. Il est amusant d'observer que les treillis images obtenus sont finis et en nombre fini. Décrivons les. Voyons tout d'abord les substitutions "classiques" $s(\alpha) = \top$ et $s(\alpha) = \bot$. Les formules substituées forment deux classes pour l'équivalence (qui est marquée, dans cette figure et dans les suivantes, par un trait gras).

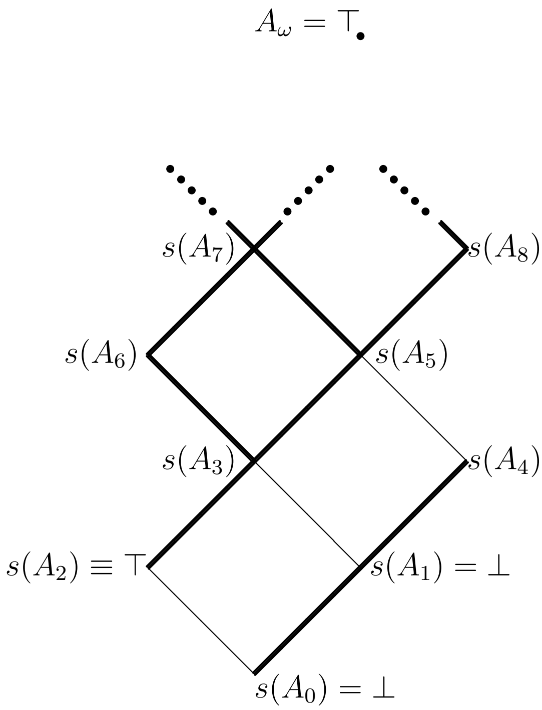


FIG. 2 – $s(\alpha) = \bot$

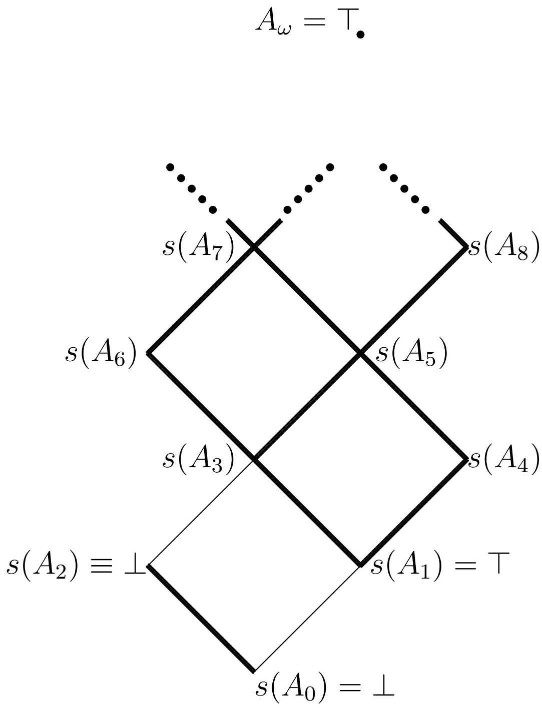


FIG. 3 – $s(\alpha) = \top$

On utilise maintenant directement la définition de l'admissibilité. On ne s'interesse qu'à la classe des formules dont les substituées sont équivalentes à $\top$. Avec ces deux substitutions on obtient que $A_1 = \alpha$, $A_2 = \neg\alpha$ et $A_3 = \alpha \vee \neg\alpha$ n'ont d'autres conséquences admissibles que leurs conséquences dérivables.

Les cas $s(\alpha) = \neg\alpha$ et $s(\alpha) = \neg\neg\alpha$ sont identiques. Le treillis obtenu par substitution comporte 5 classes.

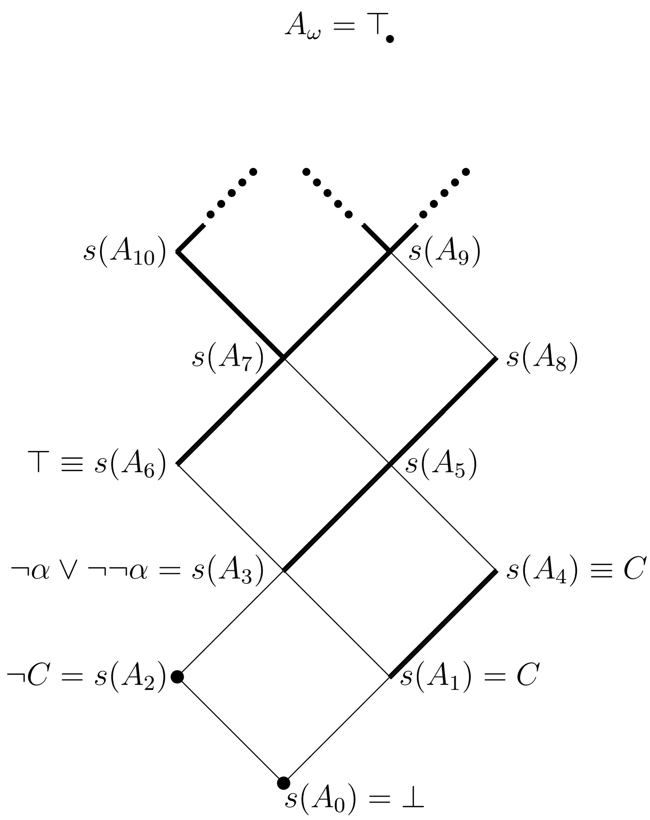


FIG. 4 – $s(\alpha) = C$ avec $C = \neg\alpha$ ou $C = \neg\neg\alpha$

Avec ces substitutions, on obtient que A_6 n'a pas d'autre conséquences admissibles que ses conséquences dérivables, que A_7 et A_i, $i \geq 9$ n'ont pour conséquences admissibles, ni A_8, ni A_i, $i \leq 5$.

Toutes les autres substitutions par des formules à une variable quotientent le treillis de la même façon (3 classes, treillis linéaire) :

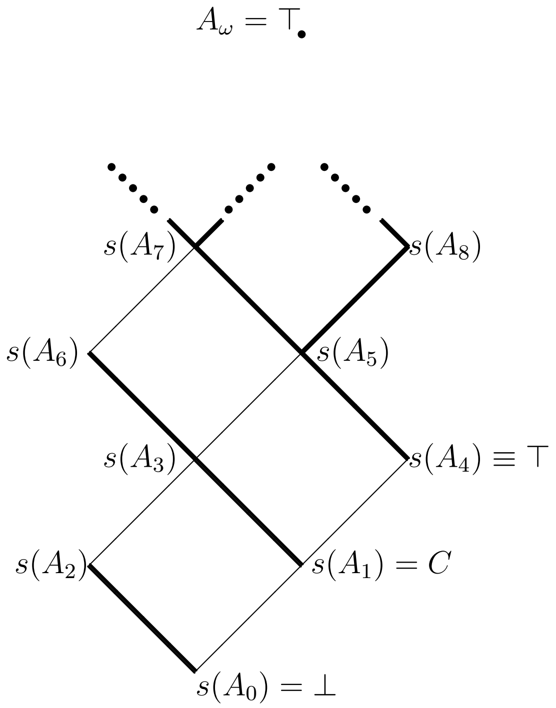


FIG. 5 – $s(\alpha) = C$ avec $\alpha \vee \neg\alpha \vdash C$

Avec ces substitutions, on obtient que A_4 n'a pour conséquences admissibles que ses conséquences dérivables, que A_7 n'a pas A_6 pour conséquence admissible, et donc en utilisant également la précédente substitution, n'a pour conséquences admissibles que ses conséquences dérivables. De même en reprenant la substitution $s(\alpha) = \bot$ on obtient que A_5 n'a pour conséquences admissibles que ses conséquences dérivables.

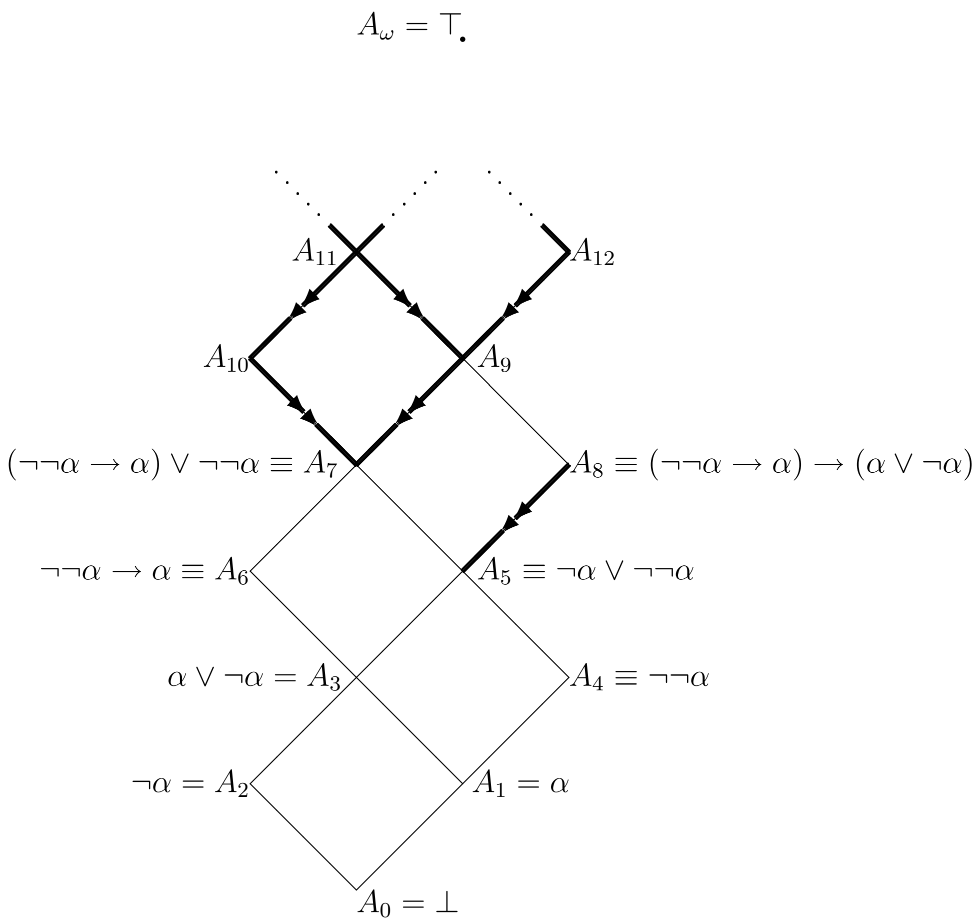
On obtient de façon analogue que A_9 ne peut avoir d'autres conséquences admissibles non dérivables que A_7 et A_{10} .

En regroupant ces résultats, et en utilisant de plus le fait que ces substitutions sont suffisantes pour caractériser l'admissibilité (corollaire 5.5.4), on obtient une description de toutes les règles admissibles pour les formules propositionnelles à une variable, que l'on a synthétisée dans la figure 6 du paragraphe suivant.

6.3 Règles admissibles

Toutes les règles admissibles sont obtenues par composition des règles dérivables, et des règles admissibles suivantes :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \;\; A_{2n+8} \gg A_{2n+5}, \;\; A_{2n+9} \gg A_{2n+7}, \;\; A_{2n+11} \gg A_{2n+10}\,.$$



(bien entendu, $A_\omega = \top$ n'a aucune conséquence admissible non dérivable)

FIG. 6 – Treillis de Rieger-Nishimura et admissibilité

Remarquons que l'ensemble des formules propositionnelles quotienté par la relation d'équivalence admissible,

$$A \ll\gg B \;\; ssi \;\; A \gg B \; et \; B \gg A \; ,$$

contient exactement 9 classes. On peut remarquer qu'une règle possédant un nombre fini de prémisses est équivalente à la règle à une seule prémisse obtenue en prenant leur conjonction. On déduit donc facilement de ce qui précède, le résultat suivant.

Proposition 6.3.1 *Les règles admissibles à une variable propositionnelle sont, à équivalences près, exactement les suivantes :*
- *les règles dérivables ;*
- $A_8 \gg A_5$*, c'est à dire* $(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to (\alpha \vee \neg\alpha) \gg \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$ *;*
- $A_i \gg A_j$ *pour tous* $i, j \in \{7\} \cup \{k \in \mathbb{N},\ k \geq 9\}$ *;*

(le premier et le dernier cas ne sont pas exclusifs).

6.4 Rétro-dérivation

Il n'est bien entendu pas indispensable d'utiliser le résultat de complétude de la section 5. Sans ce résultat on prouve simplement, en substituant des formules à une variable, qu'il n'y a pas d'autres règles admissibles que celles décrites à la proposition 6.3.1.

Pour prouver que ces règles sont bien admissibles, on peut utiliser directement la rétro-dérivation, plus précisément l'exemple (ad_1) donné au paragraphe 4.3.

Lemme 6.4.1 *Toutes les règles admissibles portant sur des formules propositionnelles à une variable sont obtenues par composition de règles dérivables et d'instances de la règle admissible :*

$$(\alpha \to \delta) \to (\beta \vee \gamma) \gg ((\alpha \to \delta) \to \beta) \vee ((\alpha \to \delta) \to \gamma) \vee ((\alpha \to \delta) \to \alpha) \; . \qquad (ad_1)$$

Preuve : on utilise le treillis de Nishimura et les notations introduites en 6.1. Il nous suffit de démontrer (voir paragraphe 6.3) que les règles suivantes sont obtenues par composition d'instances de (ad_1) et de règles dérivables :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \;\; A_{2n+8} \gg A_{2n+5}, \;\; A_{2n+9} \gg A_{2n+7}, \;\; A_{2n+11} \gg A_{2n+10} \; .$$

Nous allons tout d'abord montrer que pour tout n entier $A_{2n+8} \gg A_{2n+5}$. On se sert de l'équivalence suivante :

$$\textit{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad A_{2n+6} \equiv A_{2n+4} \to A_{2n+1} \; . \qquad (1)$$

En effet

$$A_{2n+6} = A_{2n+4} \to A_{2n+3} = (A_{2n+2} \to A_{2n+1}) \to (A_{2n+2} \vee A_{2n+1}) \; ,$$

et indépendamment du sens des A_i l'assertion

$$(A_{2n+2} \to A_{2n+1}) \to (A_{2n+2} \vee A_{2n+1}) \equiv (A_{2n+2} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+1} \ ,$$

est démontrable intuitionnistiquement.

L'équivalence (1) et d'autres équivalences du même genre sont d'ailleurs nécessaires pour montrer que le treillis de Rieger-Nishimura décrit bien ce qu'il est sensé décrire (voir [Ni 60, Tr vD 88]).

On déduit donc de (1) que $A_{2n+8} \equiv A_{2n+6} \to A_{2n+3}$, et en réappliquant la même équivalence pour A_{2n+6} d'une part, en remplaçant A_{2n+3} par sa définition (voir 6.1) d'autre part, on obtient :

$$A_{2n+8} \equiv (A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to (A_{2n+1} \vee A_{2n+2}) \ .$$

On peut appliquer la règle admissible (ad_1). On obtient que, pour tout entier n, A_{2n+8} a pour conséquence admissible :

$$[(A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+1}] \vee [(A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+2}] \vee [(A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+4}] \ .$$

Remarquons que trivialement, $A_{2n+1} \vdash A_{2n+4}$, on peut donc simplifier la disjonction :

$$A_{2n+8} \gg [(A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+2}] \vee [(A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+4}] \ . \tag{2}$$

On remplace maintenant A_{2n+4} par $A_{2n+2} \to A_{2n+1}$ dans la deuxième composante de la disjonction. On obtient :

$$\begin{aligned}
(A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+4} &\equiv [(A_{2n+2} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+1}] \to (A_{2n+2} \to A_{2n+1}) \\
&\equiv [A_{2n+1} \to A_{2n+1}] \to (A_{2n+2} \to A_{2n+1}) \\
&\equiv A_{2n+2} \to A_{2n+1} \\
&\equiv A_{2n+4} \ .
\end{aligned}$$

Donc, en remplaçant dans (2) :

$$A_{2n+8} \gg [(A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+2}] \vee A_{2n+4} \ . \tag{3}$$

Pour la première composante de la disjonction, on peut se servir de l'équivalence suivante :

$$\textit{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad A_{2n+1} \to A_{2n+2} \equiv A_{2n+2} \ . \tag{4}$$

En effet cette équivalence est facilement démontrable pour $n = 0$. La montrer pour $n > 0$ revient à montrer :

$$A_{2n+3} \to A_{2n+4} \equiv A_{2n+4} \ ,$$

c'est à dire :

$$(A_{2n+1} \vee A_{2n+2}) \to A_{2n+2} \to A_{2n+1} \equiv A_{2n+2} \to A_{2n+1} \ ,$$

Ce qui est évident, indépendemment de la valeur des A_i. On déduit de (4) que :

$$\begin{aligned}(A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+2} &\equiv (A_{2n+4} \to A_{2n+1}) \to A_{2n+1} \to A_{2n+2} \\ &\equiv A_{2n+1} \to A_{2n+2} \\ &\equiv A_{2n+2} \ .\end{aligned}$$

On obtient finalement en appliquant cette dernière équivalence à (3) :

$$A_{2n+8} \gg A_{2n+4} \vee A_{2n+2} \ .$$

Or $A_{2n+3} = A_{2n+1} \vee A_{2n+2}$ et $A_{2n+1} \vdash A_{2n+4}$ donc $A_{2n+4} \vee A_{2n+3} \equiv A_{2n+4} \vee A_{2n+2}$, et comme $A_{2n+5} = A_{2n+4} \vee A_{2n+3}$, on a finalement le résultat annoncé :

$$\textit{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad A_{2n+8} \gg A_{2n+5} \ .$$

On en déduit que $A_{2n+8} \gg A_{2n+7}$, puisque $A_{2n+5} \vdash A_{2n+7}$.
De $A_{2n+9} = A_{2n+7} \vee A_{2n+8}$ on déduit $A_{2n+9} \gg A_{2n+7}$.
De $A_{2n+10} = A_{2n+8} \to A_{2n+7}$ on déduit $A_{2n+9} \gg A_{2n+10}$.
De $A_{2n+11} = A_{2n+9} \vee A_{2n+10}$ on déduit $A_{2n+11} \gg A_{2n+10}$.
Ces derniers résultats valent pour tout entier n et sont ceux qu'il nous suffisait de montrer.
■

6.5 Illustration de définitions précédemment introduites

En observant la figure 6 du paragraphe 6.3, on constate que les seules formules à une variable propositionnelle ayant mêmes conséquences admissibles et dérivables sont, à équivalence près :

$$\begin{array}{lll} A_0 = \bot \ , & A_\omega = \top \ , & A_1 = \alpha \ , \\ A_2 = \neg\alpha \ , & A_3 = \alpha \vee \neg\alpha \ , & A_4 \equiv \neg\neg\alpha \ , \\ A_5 = \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha \ , & A_6 \equiv \neg\neg\alpha \to \alpha \ , & A_7 = (\neg\neg\alpha \to \alpha) \vee \neg\neg\alpha \ . \end{array}$$

Parmi celles ci, les seules à avoir la propriété de la disjonction pour l'admissibilité sont :

$$\begin{array}{ll} A_0 = \bot \ , & A_\omega = \top \ , \\ A_1 = \alpha \ , & A_2 = \neg\alpha \ , \\ A_4 \equiv \neg\neg\alpha \ , & A_6 \equiv \neg\neg\alpha \to \alpha \ . \end{array}$$

On remarque que, par contre, toutes les formules A_{2p} pour p dans $\mathbb{N}$ ainsi que $A_1 = \alpha$, ont la propriété de disjonction, et seulement celles-ci à équivalence près, parmi les formules à une variable propositionnelle. Pour A_0, A_1 et A_2 c'est évident. les autres formules considérées sont les $A_{2p+4} = A_{2p+2} \to A_{2p+1}$. Un séquent :

$$A_{2p+4} \vdash C \vee D$$

ne peut être prouvé dans le calcul des séquents de la section 4.1 par la règle gauche de la flèche. En effet cela conduirait à prouver le séquent $A_{2p+4} \vdash A_{2p+2}$ ce que contredit le treillis de Rieger-Nishimura. La seule solution est donc d'utiliser la règle droite de la disjonction, et donc de prouver $A_{2p+4} \vdash C$ ou $A_{2p+4} \vdash D$.

On constate que les formules A_{2p+8} pour p dans $\mathbb{N}$ ont la propriété de disjonction sans avoir la propriété de disjonction pour l'admissibilité.

6.6 Remarques

Les divers phénomènes constatés dans ce cas très particulier ne doivent pas être abusivement généralisés. Par exemple il est faux que toutes les règles admissibles puissent être engendrées par une seule règle. Nous montrerons plus loin (voir corollaire 7.5.2) qu'un système générant toutes les règles admissibles est nécessairement infini.

Un autre phénomène à priori interessant est que le treillis des formules à une variable quotienté par l'équivalence admissible "$\ll\gg$" est fini. Mais ceci est déja faux pour le treillis des formules à deux variables. En effet nous avons vu que les formules anti-Harrop ont mêmes conséquences admissibles et dérivables (voir paragraphe 3.5). Prenons maintenant deux variables propositionnelles α et β et posons $A_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ les formules définies telles que ci-dessus au paragraphe 6.1. Les formules $\beta \to A_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ sont toutes des formules anti-Harrop et ont donc mêmes conséquences admissibles et dérivables. D'autre part deux d'entre ces formules ne sont jamais équivalentes. En effet nous savons que ceci est vrai pour les formules $A_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ (voir 6.1). On montre d'autre part :

$$\beta \to A_n(\alpha) \vdash \beta \to A_p(\alpha) \;\; ssi \;\; A_n(\alpha) \vdash A_p(\alpha)$$

(substituer $\top$ à β pour le sens direct, réciproque évidente).

On obtient finalement une infinité de formules à deux variables, $\beta \to A_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$, telles que deux d'entre elles ne soient jamais ni équivalentes ni équivalentes pour l'admissibilité.

7 Une axiomatisation de l'admissibilité

Dans cette section on met en évidence un ensemble infini de règles admissibles qui engendre toutes les règles admissibles par substitution et composition avec la déduction. La forme de ces règles est directement liée aux deux règles non inversibles, "($\to$ *gauche*)" et"($\vee$ *droite*)". On montre ensuite qu'il n'existe pas d'ensemble fini de règles ayant cette propriété.

7.1 Les règles (ad_n), et autres règles admissibles

L'exemple (ad_1) (voir 4.3) est en quelque sorte le prototype des règles admissibles non dérivables. Exactement de la même façon dont on a procédé pour cette règle au paragraphe 4.3, on montre par rétro-dérivation (rétro-dérivation simple de hauteur 2) que les règles suivantes sont admissibles :

$$\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1\leq i\leq n} \to (\gamma \vee \delta) \gg \begin{cases} \displaystyle\bigvee_{j=1}^{n}(\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1\leq i\leq n} \to \alpha_j) \\ \vee \\ (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1\leq i\leq n} \to \gamma) \\ \vee \\ (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1\leq i\leq n} \to \delta) \end{cases} \qquad (ad_n)$$

On veut montrer que les règles $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plus les règles dérivables engendrent toutes les autres règles admissibles. Ce serait très simple de le déduire du théorème de complétude de 5.5.3, s'il n'y avait la notion de redondance dans une rétro-dérivation, qui intervient par exemple dans la preuve donnée au paragraphe 4.3 que la règle (ad_1') est admissible. On verra au paragraphe suivant (lemme 7.2.2) que (ad_1') se déduit simplement de la règle (ad_2).

Introduisons une généralisation assez naturelle de la règle (ad_1') qui nous sera utile. On montre facilement par rétro-dérivation que les règles suivantes sont admissibles :

$$[(\bigvee_{i=1}^{n+1}\alpha_i) \to \beta] \to \bigvee_{i=1}^{n+1}\alpha_i \gg \bigvee_{j=1}^{n+1}[(\bigvee_{i=1}^{n+1}\alpha_i) \to \beta] \to \alpha_j\ . \qquad (ad_n')$$

Les règles (ad_n) sont envisagées le plus souvent comme des schémas de règles. On notera les substituées des variables propositionnelles par les lettres romaines majuscules correspondant aux lettres grecques désignant ces variables.

7.2 Une relation de conséquence entre règles

Définissons avec plus de précision la notion de conséquence entre règles que nous utilisons, qui est une conséquence à déductibilité intuitionniste près. On rappelle que les règles envisagées concernent des séquents de partie gauche vide, et donc on se limite à ce cas particulier pour la définition qui suit.

Définition 7.2.1 *Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de règles. Une règle (r), soit*

$$\frac{B_1, \ldots, B_p}{C}\ (r)$$

est dite **conséquence intuitionniste** *de $\mathcal{R}$ quand il existe une suite de formules $(A_j)_{1\leq j\leq N}$, telles que :*

- *la dernière formule de la suite est la conclusion de (r), $A_N = C$;*
- *pour tout $1 \leq j \leq n$,*
  soit il existe $1 \leq i \leq p$ tel que A_j égale B_i l'une des prémisses de (r),
  soit A_j est conséquence intuitionniste des formules la précédant $\{A_i\}_{1\leq i<j}$,
  soit il existe une règle de $\mathcal{R}$ telle que A_j soit l'image par une substitution de la conclusion de cette règle, et que les images par la même substitution des prémisses de cette règle soient parmi les formules précédentes $\{A_i\}_{1\leq i<j}$.

Il est immédiat qu'une règle conséquence intuitionniste de l'ensemble vide est dérivable.

Bien entendu, la notion de conséquence intuitionniste est transitive et stable par substitution. L'ensemble des règles dérivables comme l'ensemble des règles admissibles sont clos tous deux par conséquence intuitionniste. Remarquons également que si une règle est conséquence d'un ensemble infini de règles, elle est, par définition, conséquence d'un sous-ensemble fini de celui-ci.

Comme les règles considérées portent sur des séquents de partie gauche vide, elles peuvent elles mêmes s'écrire comme des séquents de partie gauche les formules prémisses de la règle, de partie droite la formule conclusion. La notion de conséquence intuitionniste entre règles ci-dessus définie, peut alors se décrire dans le calcul des séquents intuitionniste avec coupures, en présence d'axiomes. La règle (r) est conséquence intuitionniste de $\mathcal{R}$ si et seulement si le séquent correspondant à (r) est démontrable en présence des axiomes qui sont les séquents correspondant à toutes les instances possibles des règles de $\mathcal{R}$, et en interdisant à ces axiomes d'être les prémisses d'autres règles que la règle de coupure.

Le lemme suivant regroupe un certain nombre d'exemples qui nous serons utiles (les notations ont été introduites au paragraphe 7.1).

Lemme 7.2.2 *Pour tout entier non nul n,*

(i) *la règle (ad_n) est conséquence intuitionniste de la règle (ad_{n+1}) ;*
(ii) *la règle (ad'_n) est conséquence intuitionniste de la règle (ad'_{n+1}) ;*
(iii) *la règle (ad'_n) est conséquence intuitionniste de la règle (ad_{n+1}).*

Preuve (i) : en considèrant l'instance de (ad_{n+1}) où α_{n+1} et β_{n+1} sont remplacées respectivement par α_n et β_n On obtient immédiatement le résultat.

PREUVE (ii) : on considère l'instance de (ad'_{n+1}) où $\alpha_{n+1} = \alpha_n$.

PREUVE (iii) : on montre par récurrence sur p que pour tout entier p entre 0 et n, la règle suivante est conséquence de (ad_{n+1}) :

$$[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to \bigvee_{j=1}^{p+1} \alpha_j \gg \bigvee_{j=1}^{p} [(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to \alpha_j \; . \qquad (ad'_{n,p})$$

Comme $(ad'_{n,n}) = (ad'_n)$, on obtient ainsi le résultat voulu.
Pour $p = 0$ $(ad'_{n,0})$ est évidemment démontrable.
Supposons que $(ad'_{n,p-1})$ est conséquence de (ad_{n+1}), pour $p \leq n$. On applique à la prémisse de la règle $(ad'_{n,p})$ l'équivalence :

$$(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta \equiv \bigwedge_{i=1}^{n+1} (\alpha_i \to \beta) \; . \qquad (*)$$

On peut maintenant appliquer la règle (ad_{n+1}), avec, pour $1 \leq j \leq n+1$, $A_j = \alpha_j$, $B_j = \beta$, $C = \bigvee_{i=1}^{p} \alpha_i$ et $D = \alpha_{p+1}$. On obtient

$$[\bigwedge_{i=1}^{n+1} (\alpha_i \to \beta)] \to \bigvee_{i=1}^{p+1} \alpha_i \gg \begin{cases} \bigvee_{j=1}^{n+1} (\{\alpha_i \to \beta\}_{1 \leq i \leq n+1} \to \alpha_j) \\ \vee \\ \{\alpha_i \to \beta\}_{1 \leq i \leq n+1} \to \bigvee_{i=1}^{p} \alpha_i \\ \vee \\ (\{\alpha_i \to \beta\}_{1 \leq i \leq n+1} \to \alpha_{p+1}) \end{cases} \qquad (ad_{n+1})$$

ce qui donne, en simplifiant, puis en réutilisant dans l'autre sens l'équivalence $(*)$,

$$[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to \bigvee_{i=1}^{p+1} \alpha_i \gg \begin{cases} \bigvee_{j=1}^{n+1} ([(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to \alpha_j) \\ \vee \\ [(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to \bigvee_{i=1}^{p} \alpha_i \end{cases}$$

On applique maintenant $(ad'_{n,p-1})$ au premier des membres de la disjonction ci-dessus, ce qui donne le résultat par hypothèse de récurrence. ∎

Pour montrer que les règles (ad_n) engendrent toutes les règles admissibles, nous aurons à utiliser, pour gérer les redondances, une méthode analogue à l'usage qui est fait ici de l'équivalence $(*)$ (cf lemme 7.4.2 (iii)).

7.3 La suite (ad_n) est strictement croissante

Le but de cette section est de montrer que pour un entier non nul n donné la règle (ad_n) n'est pas conséquence intuitionniste des règles précédentes (ad_p), $1 \leq p < n$.

Pour cela il suffit de trouver une règle conséquence intuitionniste de (ad_n) qui ne soit pas conséquence des précédentes. C'est la raison pour laquelle nous introduisons les règles suivantes, dont nous allons voir qu'elles sont admissibles :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1} \gg \bigvee_{j=1}^{n+1} [(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to \alpha_j \;. \qquad (ad''_n)$$

Remarquons que $(ad''_1) = (ad'_1)$.

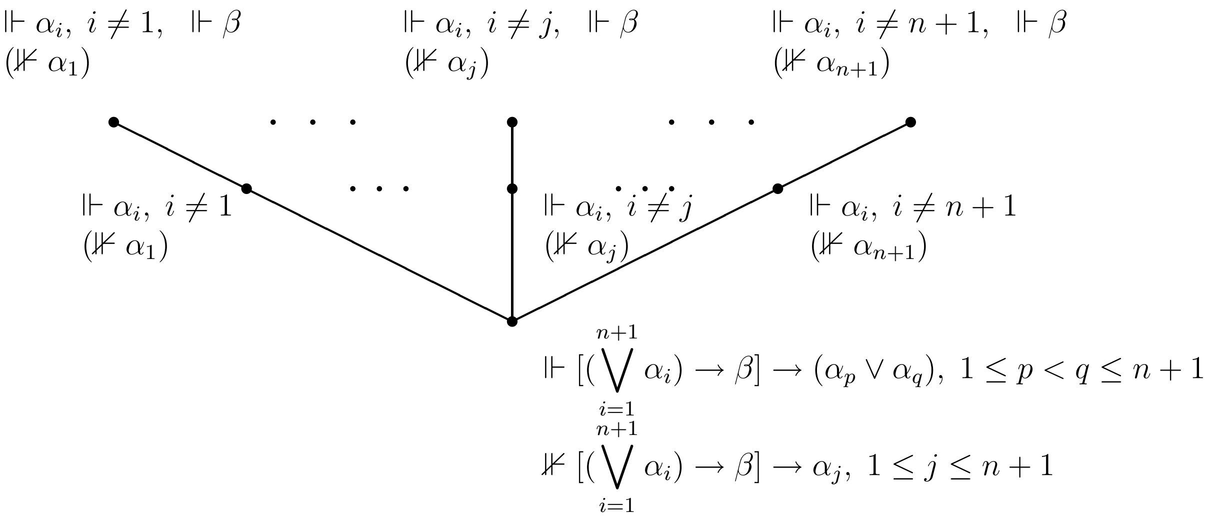
Lemme 7.3.1 *Pour tout entier non nul n la règle (ad''_n) est conséquence intuitionniste de la règle (ad'_n) , et donc de la règle (ad_{n+1}). Elle est par conséquent admissible. La règle (ad''_n) n'est pas dérivable, et donc les règles (ad'_n) et (ad_{n+1}) non plus.*

PREUVE : (ad''_n) est évidemment conséquence intuitionniste de

$$[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_1 \vee \alpha_2) \gg \bigvee_{j=1}^{n+1} [(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to \alpha_j \qquad (ad'_{n,1})$$

règle elle même conséquence de (ad'_n), donc de (ad_{n+1}) d'après le lemme 7.2.2.

Montrons maintenant que ces règles ne sont pas dérivables. On pose, pour chaque n le modèle de Kripke suivant (arbre à $n+1$ branches de 3 nœuds) :



On laisse le lecteur se convaincre qu'il s'agit bien d'un contre-modèle de la formule :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1} \to \bigvee_{j=1}^{n+1} [(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to \alpha_j \;. \qquad \blacksquare$$

On a introduit les règles (ad''_n) parce qu'elles permettent d'obtenir assez simplement le résultat suivant.

Lemme 7.3.2 *Pour tout entier non nul n, la règle (ad''_n) n'est pas conséquence intuitionniste des règles $(ad_p)_{1\leq p\leq n}$.*

Preuve : Puisque nous avons montré que la suite $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, il nous suffit de montrer que (ad''_n) n'est pas conséquence intuitionniste de (ad_n). Pour cela nous allons procéder par l'absurde. Supposons que (ad''_n) soit conséquence de (ad_n). Il existe alors une dérivation de ceci, c'est à dire (voir définition 7.2.1) une suite de formules se terminant par la conclusion de (ad''_n), et telle que chaque formule de cette suite est, soit une prémisse de (ad''_n), soit est obtenue par dérivation, soit est obtenue par application de la règle (ad_n) à partir des formules précédentes. Montrons qu'alors (ad''_n) est dérivable, par induction sur le nombre d'occurrences de la règle (ad_n) dans cette suite. Comme ce résultat est en contradiction avec le lemme 7.3.1 précédent, on aura démontré le présent lemme.

Considérons donc la première occurrence de (ad_n) dans la suite ci-dessus introduite, et montrons qu'elle peut être remplacée par une dérivation. La formule de la suite qui est prémisse de (ad_n) peut s'écrire :

$$\{A_i \to B_i\}_{1\leq i\leq n} \to (C \vee D)\ .$$

et comme il s'agit de la première occurrence de (ad_n), on a :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1\leq p<q\leq n+1} \vdash \{A_i \to B_i\}_{1\leq i\leq n} \to (C \vee D)\ ,$$

donc de façon équivalente :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1\leq p<q\leq n+1},\ \{A_i \to B_i\}_{1\leq i\leq n} \vdash C \vee D\ .$$

Etudions une preuve en calcul des séquents intuitionniste (sans coupures) de ce dernier énoncé.

Si cette preuve se termine par une règle gauche sur la flèche d'un $A_i \to B_i$, ou par une règle droite sur la disjonction $C\vee D$. On regarde la prémisse droite des règles gauches sur la flèche, la seule prémisse des règles droites sur la disjonction, et l'on constate que, dans chacun des cas, le séquent suivant est démontrable :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1\leq p<q\leq n+1} \vdash \left\{\begin{array}{l} \bigvee_{j=1}^{n} (\{A_i \to B_i\}_{1\leq i\leq n} \to A_j) \\ \vee \\ (\{A_i \to B_i\}_{1\leq i\leq n} \to C) \\ \vee \\ (\{A_i \to B_i\}_{1\leq i\leq n} \to D) \end{array}\right. \qquad (1)$$

à savoir que :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1}$$

démontre directement la conclusion de cette occurrence de la règle (ad_n). On peut donc remplacer l'application de (ad_n) et les dérivations qui précèdent par cette dérivation.

Supposons que la preuve se termine par une autre règle, ce ne peut être qu'une règle gauche sur la flèche de l'une des formules

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1} \; .$$

On considère la prémisse droite de cette règle, le séquent suivant est donc démontrable :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1}, \; \{A_i \rightarrow B_i\}_{1 \leq i \leq n} \vdash (\bigvee_{j=1}^{n+1} \alpha_j) \rightarrow \beta \; . \tag{2}$$

Ceci est équivalent à ce que ce chacun des séquents :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1}, \; \{A_i \rightarrow B_i\}_{1 \leq i \leq n}, \; \alpha_j \vdash \beta \; , \quad 1 \leq j \leq n+1 \; ,$$

soit démontrable.

Comment se termine une preuve non redondante de ces séquents ? On rappelle que les α_j et β sont atomiques. Appliquer à nouveau une règle gauche sur la flèche de l'une des formules $[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha_p \vee \alpha_q)$ conduirait à une redondance. Les preuves se terminent donc nécessairement par une règle gauche sur la flèche de l'une des n formules $A_i \rightarrow B_i, \; 1 \leq i \leq n$. On considère à nouveau les prémisses droites de ces règles, et on observe que pour chacune des $n+1$ variables α_j, il existe une formule A_{i_j} parmi les n formules A_i telle que le séquent suivant soit démontrable :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1}, \; \{A_i \rightarrow B_i\}_{1 \leq i \leq n}, \; \alpha_j \vdash A_{i_j} \; , \quad 1 \leq j \leq n+1 \; .$$

On applique le principe des tiroirs de Dirichlet. Il existe aux moins deux α_j distincts associés à la même formule A_{i_j}. On peut supposer sans restreindre la portée de la preuve qu'il s'agit de α_1 et α_2, et que $A_{i_1} = A_{i_2} = A_k$. On a donc les deux séquents :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1}, \; \{A_i \rightarrow B_i\}_{1 \leq i \leq n}, \; \alpha_1 \vdash A_k \; ,$$

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1},\ \{A_i \to B_i\}_{1 \leq i \leq n},\ \alpha_2 \vdash A_k\ ,$$

qui sont démontrables, et donc (règle ($\vee$*gauche*) en descendant) le séquent suivant est prouvable :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1},\ \{A_i \to B_i\}_{1 \leq i \leq n},\ \alpha_1 \vee \alpha_2 \vdash A_k\ .$$

De ce dernier séquent et de ce que le séquent (2) ci-dessus est prouvable, on déduit, par règle ($\to$ *gauche*) en descendant, que :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1}\ ,\ \{A_i \to B_i\}_{1 \leq i \leq n}\ , [(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_1 \vee \alpha_2) \vdash A_k\ ,$$

est prouvable, et donc que le séquent équivalent :

$$\{[(\bigvee_{i=1}^{n+1} \alpha_i) \to \beta] \to (\alpha_p \vee \alpha_q)\}_{1 \leq p < q \leq n+1} \vdash \{A_i \to B_i\}_{1 \leq i \leq n} \to A_k\ ,$$

est prouvable également.

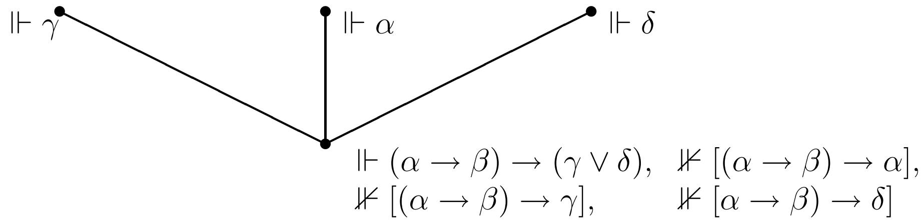
Comme dans le premier cas envisagé, le séquent (1) (voir début de la preuve) est prouvable, et on conclut de même en remplaçant la règle (ad_n) et les dérivations qui la précèdent par cette dérivation. ■

On conclut ce paragraphe par la proposition suivante.

Proposition 7.3.3 *les règles* $(ad_n)_n \in \mathbb{N}^*$ *sont toutes admissibles et non dérivables. Cette suite de règles est strictement croissante pour la relation de conséquence intuitionniste, c'est à dire que pour tout* n *non nul* (ad_n) *est conséquence intuitionniste de* (ad_{n+1}), *et que* (ad_{n+1}) *n'est pas conséquence intuitionniste de* (ad_n).

Preuve : nous avons déjà vu que ces règles sont admissibles. Elles ne sont pas dérivables d'après le lemme 7.3.1 pour $n \geq 2$. Il reste à montrer que (ad_1) n'est pas dérivable, ce que l'on affirmait déja dans l'introduction. Le modèle de Kripke qui suit est un contre-modèle de la formule :

$$[(\alpha \to \beta) \to (\gamma \vee \delta)] \to ([(\alpha \to \beta) \to \alpha] \vee [(\alpha \to \beta) \to \gamma] \vee [(\alpha \to \beta) \to \delta])\,.$$



La suite est croissante d'après le lemme 7.2.2, la croissance est stricte car $(ad''n)$ est conséquence de (ad_{n+1}) (lemme 7.3.1), mais n'est pas conséquence de (ad_n) (lemme 7.3.2). ■

7.4 La suite (ad_n) est génératrice

Il s'agit maintenant de montrer que toutes les règles admissibles sont conséquences intuitionnistes des règles (ad_n). D'après le théorème de complétude 5.5.3, il suffit de le démontrer pour les règles dérivables en aller retour, et donc pour les règles rétro-dérivables (voir définition 4.4.13). Les règles (ad_n) captureraient très naturellement la rétro-dérivabilité s'il n'y avait à gérer les redondances, ce qui oblige à quelques contorsions.

Nous noterons dans la suite $A >_{(ad_n)} B$ pour indiquer que la formule B est obtenue à partir de la formule A par une suite de dérivations et d'instances des règles (ad_n) .

7.4.1 Quelques préliminaires

On a vu au paragraphe 4.4.2 qu'à cause des redondances, il n'était pas possible de décomposer une rétro-dérivation en rétro-dérivations de hauteur minimale 2.

On a cependant le résultat plus faible suivant. Appelons *sous-rétro-dérivation* d'une rétro-dérivation, un sous-arbre de celle-ci qui est aussi une rétro-dérivation.

Lemme 7.4.1 *Toute rétro-dérivation se décompose en sous-rétro-dérivations dont tous les séquents qui ne sont pas feuilles ont même partie gauche.*

PREUVE : tous les séquents d'une branche redondante ont même partie gauche. ■

Ce lemme autorise donc à ne s'interesser qu'à des rétro-dérivations dont tous les séquents qui ne sont pas feuilles ont même partie gauche, que nous appelerons *rétro-dérivation à* *partie gauche constante*. Nous noterons

$$(\vdash A)\ \boldsymbol{rd_c}\ \mathcal{C}$$

pour indiquer que le séquent $(\vdash A)$ se rétro-dérive en la condition $\mathcal{C}$ par une rétro-dérivation à partie gauche constante.

Pour des formules équivalentes, on n'obtient pas en général par rétro-dérivation (voir 4.4.9) des formules équivalentes. Ainsi

$$(\neg\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to (\gamma \vee \delta)) \equiv (\neg\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to (\gamma \vee \delta)) \wedge (\neg\alpha \to (\gamma \vee \delta)) \ ,$$

mais la première de ces formules est stable par rétro-dérivation, alors que l'on a :

$$\begin{aligned}&(\neg\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to (\gamma \vee \delta)) \wedge (\neg\alpha \to (\gamma \vee \delta)) \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{rd}\ (\neg\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to (\gamma \vee \delta)) \wedge [(\neg\alpha \to \gamma) \vee \neg\alpha \to \delta)) \ .\end{aligned}$$

On obtient cependant des résultats dans des cas très particuliers utiles. Ainsi le lemme 7.4.3 suivant assure que la rétro-dérivation est indépendante du séquent choisi parmi ceux naturellement possibles pour représenter une formule, le lemme 7.4.8 du paragraphe 7.4.3 fournissent d'autre exemples. Mais tout d'abord un lemme technique sur les conditions, qui sera utilisé dans la preuve de ces lemmes.

Lemme 7.4.2

(i) *La condition* $\mathcal{C}[\mathcal{C}/\vdash\bot]$ *obtenue en remplaçant une ou plusieurs occurrences du séquent* $\vdash\bot$ *dans* $\mathcal{C}$ *par la condition* $\mathcal{C}$ *vérifie* $\mathcal{C}[\mathcal{C}/\vdash\bot] \equiv \mathcal{C}$.

(ii) *La condition* $\mathcal{C}[\mathcal{D}/\vdash\bot]$ *obtenue en remplaçant une ou plusieurs occurrences du séquent* $\vdash\bot$ *dans* $\mathcal{C}$ *par la condition* $\mathcal{D}$ *vérifie* $\mathcal{C}[\mathcal{D}/\vdash\bot]^{\to} \vdash (\mathcal{C} \vee \mathcal{D})^{\to}$.

Preuve : il suffit de prouver ces résultats pour des conditions sous-forme normale (voir définition 4.4.1). On les prouve alors par induction sur le nombre d'occurrences de la condition substituée (dans la forme normale). Voyons par exemple le pas d'induction pour le (i). On a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \vee (\mathcal{C}_2 \wedge \vdash \bot)$ et $\mathcal{C}[\mathcal{C}/\vdash\bot] = \mathcal{C}_1 \vee (\mathcal{C}_2 \wedge \mathcal{C})$ ($\mathcal{C}$ sous forme normale, $\mathcal{C}_2$ une conjonction de séquents, une seule occurrence substituée). Par distributivité on en déduit $\mathcal{C}[\mathcal{C}/\vdash\bot] \equiv \mathcal{C}$). ∎

Lemme 7.4.3 *Soient un séquent* $\Gamma \vdash B \to C$ *et une condition* $\mathcal{C}$ *tels que*

$$(\Gamma \vdash B \to C)\ \boldsymbol{rd}\ \mathcal{C} \ .$$

Alors il existe une condition $\mathcal{C}'$ *telle que*

$$(\Gamma, B \vdash C)\ \boldsymbol{rd}\ \mathcal{C}' \ \text{ et } \ \mathcal{C}'^{\to} \vdash \mathcal{C}^{\to} \ .$$

De plus cette rétro-dérivation est à partie gauche constante si la rétro-dérivation initiale l'était.

Preuve : les deux séquents sont équivalents, le résultat est donc évident pour une rétro-dérivation de hauteur nulle.

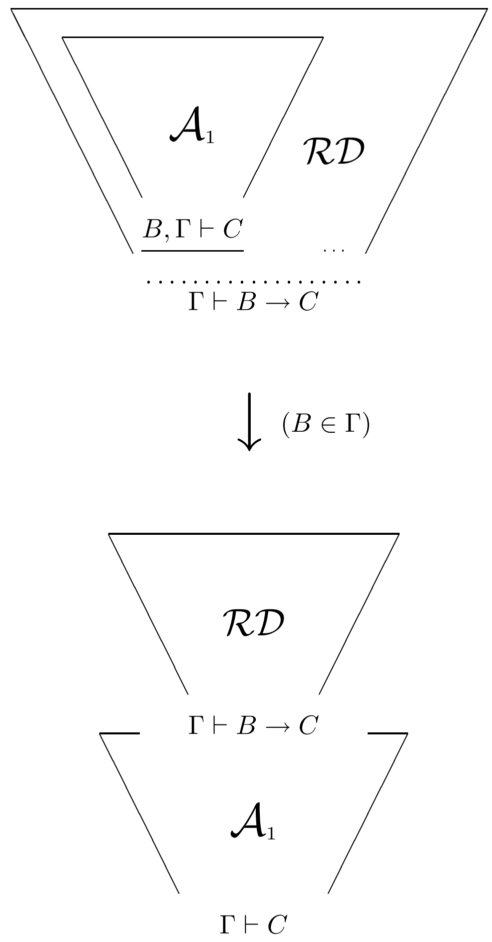
Si maintenant la hauteur est non nulle, la rétro-dérivation est de hauteur au moins 2. Au sous-arbre complet de hauteur 2 de la rétro-dérivation est associée une disjonction dont fait partie le séquent $\Gamma, B \vdash C$. On considère le sous-arbre complet de la rétro-dérivation de racine $\Gamma, B \vdash C$.

On pose $\mathcal{C}''$ la condition formée par les feuilles de ce sous-arbre, de la même façon que pour une rétro-dérivation. Il existe une condition $\mathcal{D}$ telle que $\mathcal{C}$ équivaut à $\mathcal{C}'' \vee \mathcal{D}$, donc $\mathcal{C}''^{\rightarrow} \vdash \mathcal{C}^{\rightarrow}$.

Si la rétro-dérivation ne contient aucune branche redondante commençant par le séquent initial suivi de la règle ($\rightarrow$ *droite*), alors ce sous-arbre est encore une rétro-dérivation. On conclut en posant $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}'$.

Supposons maintenant que de telles branches redondantes existent (ce n'est possible que si $B \in \Gamma$). On construit une rétro-dérivation de la façon suivante. On prend le sous-arbre de racine $\Gamma, B \vdash C$ pour lesquelles les feuilles $\Gamma \vdash B \rightarrow C$ qui avaient été barrées par redondance sont rétablies. On ajoute au dessus de chacune de ces feuilles la rétro-dérivation initiale.

Le schéma ci-dessous décrit cette transformation.



Remarquons que le premier cas (pas d'occurrence de $\Gamma \vdash B \rightarrow C$ qui soit feuille de $\mathcal{A}_1$) peut-être vu comme cas particulier de celui-ci.

Soit $\mathcal{C}'$ la condition à laquelle elle conduit, qui est donc obtenue à partir de à $\mathcal{C}''$ par les transformations décrites au lemme 7.4.2 (i) et (ii). On a donc $\mathcal{C}'^{\rightarrow} \vdash \mathcal{C}''^{\rightarrow}$, et donc $\mathcal{C}'^{\rightarrow} \vdash \mathcal{C}^{\rightarrow}$.

Dans les deux cas si la rétro-dérivation initiale est à partie gauche constante, il est clair que celle construite l'est aussi. ∎

Pour réduire la rétro-dérivation à l'utilisation des règles $(ad_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on va procèder en deux étapes qui correspondent aux deux paragraphe suivants. On montre tout d'abord le résultat pour une rétro-dérivation sur un type particulier de séquent, celle-ci vérifiant alors que les redondances sont immédiates. Ensuite on exhibe un certain nombre de transformations ramenant toute rétro-dérivation à une rétro-dérivation sur ce type particulier de séquent.

7.4.2 Quand il n'y a que des redondances triviales

Lemme 7.4.4 *Une rétro-dérivation à partie gauche constante sur un séquent* $\Gamma \vdash C$ *conduit à une condition équivalente au séquent initial dans les cas suivants :*

(i) *il existe une formule disjonctive* $A \vee B$ *dans* Γ *telle que* $A \notin \Gamma$ *et* $B \notin \Gamma$ *;*

(ii) *il existe une formule conjonctive* $A \wedge B$ *dans* Γ *telle que* $A \notin \Gamma$ *ou* $B \notin \Gamma$ *;*

(iii) *la formule gauche* $C = D_1 \to \ldots \to D_n \to G$ *avec* $n \geq 1$ *et l'un des* D_i *n'appartient pas à* Γ.

PREUVE : si la rétro-dérivation est de hauteur nulle c'est évident. Supposons donc qu'elle est de hauteur non nulle.

- Considérons le cas (i). La rétro-dérivation est de hauteur non nulle. Lui est associée une condition $\mathcal{C}$ dont l'un des éléments de la forme normale est nécessairement $(\Gamma, A \vdash C) \wedge (\Gamma, B \vdash C)$. En effet ces deux séquents sont des feuilles de la rétro-dérivation, puisque $A \notin \Gamma$, $B \notin \Gamma$ et que la rétro-dérivation est à partie gauche constante. Or comme $A \vee B \in \Gamma$, $\Gamma \to C \equiv (\Gamma, A \to C) \wedge (\Gamma, B \to C)$. D'autre part tous les éléments de la forme normale de $\mathcal{C}$ entrainent le séquent racine. Donc $\mathcal{C}^{\to} \equiv \Gamma \to C$.
- Le cas (ii) se traite de la même façon que le cas (i).
- Considérons le cas (iii). Le principe est le même. Il existe une branche complète de la rétro-dérivation obtenue par applications successives d'uniquement la règle ($\to$ *droite*). Sinon on aurait rétro-dériver sur $\Gamma, D_1, \ldots, D_n \vdash C$ ce qui est impossible puisque la rétro-dérivation est à partie gauche constante. Le séquent feuille de cette branche est équivalent au séquent initial. On conclut comme précédemment. ■

Lemme 7.4.5 *Une rétro-dérivation de hauteur 2 sur un séquent* $\Gamma \vdash E \vee F$ *vérifiant*

(i) *si* $A \vee B \in \Gamma$, *alors* $A \in \Gamma$ *ou* $B \in \Gamma$,

(ii) *si* $A \wedge B \in \Gamma$, *alors* $A \in \Gamma$ *et* $B \in \Gamma$,

(iii) *si* $A \to B \in \Gamma$, *alors* $A \neq E \vee F$,

est capturée par les règles $(ad_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *plus la déduction.*

PREUVE : soit Γ' l'ensemble des formules de Γ dont le connecteur principal est la flèche. On sait que Γ ne contient pas de variable propositionnelle, puisque le séquent $\Gamma \vdash C$ est racine d'une rétro-dérivation de hauteur non nulle. On déduit de ceci et des conditions (i) et (ii) que $\wedge\Gamma \equiv \wedge\Gamma'$. Posons $\Gamma' = \{A_1 \to B_1, \ldots, A_n \to B_n\}$. La rétro-dérivation s'écrit :

$$(\Gamma \vdash E \vee F)\ \boldsymbol{rd} \begin{cases} \bigvee_{j=1}^{n} (\Gamma \vdash A_j) \wedge (\Gamma, B_j \vdash E \vee F) \\ \vee \\ (\Gamma \vdash E) \\ \vee \\ (\Gamma \vdash F) \end{cases}$$

Pour toute formule K, $(\Gamma \vdash K) \equiv (\Gamma' \vdash K)$. Par distributivité du $\vee$ sur le $\wedge$ on déduit facilement le pas de rétro-dérivation précédent des deux règles suivantes :
une instance de (ad_n)

$$(\{A_i \to B_i\}_{1 \leq i \leq n} \vdash E \vee F) >_{(ad_n)} \begin{cases} \bigvee_{j=1}^{n} (\{A_i \to B_i\}_{1 \leq i \leq n} \to A_j) \\ \vee \\ (\{A_i \to B_i\}_{1 \leq i \leq n} \to E) \\ \vee \\ (\{A_i \to B_i\}_{1 \leq i \leq n} \to F) \end{cases}$$

une règle dérivable

$$(\Gamma' \vdash E \vee F) \vdash \begin{cases} \bigvee_{j=1}^{n} (\Gamma', B_j \to E \vee F) \\ \vee \\ (\Gamma' \to E) \\ \vee \\ (\Gamma' \to F) \end{cases} \qquad \blacksquare$$

La seule règle à avoir une prémisse de complexité éventuellement supérieure à la conclusion, et ce de façon irréductible dans un calcul des séquents avec règles structurelles internalisées, est la règle ($\to$ *gauche*). Les cas posant problème sont éliminés dans la définition qui suit.

Définition 7.4.6 *Un séquent est dit non redondant si sa partie gauche* Γ *vérifie les propriétés suivantes :*
- *si* $A \to B \in \Gamma$, *alors* $B \notin \Gamma$.
- *si* $(G \to H) \to B \in \Gamma$, *alors* $G \notin \Gamma$ *;*
- *si* $A \to B \in \Gamma$, *alors* A *n'est ni une conjonction, ni une disjonction (* A *est donc une variable ou une flèche).*

Lemme 7.4.7 *Une rétro-dérivation à partie gauche constante sur un séquent non redondant* $\Gamma \vdash C$ *est capturée par les règles* (ad_n) *plus la déduction :*

$$\textit{Si}\ \ (\Gamma \vdash C)\ \boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C},\ \ \textit{alors}\ \ \Gamma \to C >_{(ad_n)} \mathcal{C}^{\to}\ .$$

PREUVE : Par induction sur la complexité de la formule droite C. Le cas où la formule C est une variable propositionnelle est évident. Supposons donc que

$$C = D_1 \to \dots D_p \to D_0 \text{ avec } D_0 = E \vee F \text{ ou } D_0 = E \wedge F \text{ et } p \in \mathbb{N}.$$

Dans les cas où le lemme 7.4.4 s'applique le résultat est évident. On peut donc supposer :
- si $A \vee B \in \Gamma$, alors $A \in \Gamma$ ou $B \in \Gamma$;
- si $A \wedge B \in \Gamma$, alors $A \in \Gamma$ et $B \in \Gamma$;
- pour tout $1 \leq i \leq p$, $D_i \in \Gamma$.

on se ramène avec le lemme 7.4.3 à l'étude d'une rétro-dérivation à partie gauche constante sur $\Gamma \vdash D_0$, .

Les seules règles de conclusion $\Gamma \vdash D_0$ qui ne conduisent pas à une redondance immédiate sont les règles ($\to$ *gauche*) et ($\wedge$ *droite*) ou ($\vee$ *droite*).

Il n'existe pas de branche redondante d'origine le séquent initial qui ne soit pas immédiate. En effet, si une telle branche existe elle comporte forcément une application de la règle ($\to$ *gauche*), sinon la complexité de la formule droite décroit strictement. Considérons la plus haute occurrence de cette règle. Cette règle a pour prémisse droite un séquent $\Gamma, B \vdash C$ avec $B \notin \Gamma$ et ne peut donc conduire à une redondance. La prémisse gauche est un séquent $\Gamma \vdash G \to H$ avec $G \notin \Gamma$. Elle ne peut être une redondance du séquent initial ($C = E \vee F$ ou $C = E \wedge F$). Elle ne peut conduire à une redondance du séquent initial, puisque si l'on applique la règle ($\to$ *droite*), seule règle appliquable en dehors de ($\to$ *gauche*) sans conduire à une redondance immédiate, on change la partie gauche.

On peut donc décomposer la rétro-dérivation totale en la rétro-dérivation de hauteur 2 sur le séquent initial suivi des sous-rétro-dérivations sur les séquents feuilles. Il suffit de montrer que chacune de ces rétro-dérivations est capturée par les règles $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plus la déduction.

La rétro-dérivation de hauteur 2 est capturée par la règle (ad_n), d'après le lemme 7.4.5.

Après règle ($\wedge$ *droite*) ou ($\vee$ *droite*) on obtient des sous-rétro-dérivations de racine $\Gamma \vdash E$ et $\Gamma \vdash F$, qui sont capturées par les règles $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par hypothèse d'induction.

Voyons les sous-rétro-dérivations sur les prémisses droites des règles ($\to$ *gauche*). Celles-ci sont des séquents $\Gamma, B \vdash C$ avec $B \notin \Gamma$, donc ces rétro-dérivations sont de hauteur nulle car la rétro-dérivation est par hypothèse à partie gauche constante.

Voyons les rétro-dérivations sur les prémisses gauches des règles ($\to$ *gauche*). Celles-ci sont des séquents $\Gamma \vdash G \to H$ avec $G \notin \Gamma$. Elles sont donc capturées par la déduction d'après le lemme 7.4.4. ■

7.4.3 Des transformations sur les rétro-dérivations

On ramène maintenant le cas général au cas précédent par le lemme qui suit.

Lemme 7.4.8 *On suppose pour toutes les clauses de ce lemme que les rétro-dérivations données par hypothèse ainsi que celles obtenues sont à partie gauche constante.*

(i) *Si* $[A \to B, B, \Gamma \vdash C]$ $\boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C}$*, alors il existe une condition* $\mathcal{C}'$ *telle que* $\mathcal{C}'^{,\to} \vdash \mathcal{C}^{\to}$ *et* $[B, \Gamma \vdash C]$ $\boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C}'$.

(ii) *Si* $[(E \to F) \to B, E, \Gamma \vdash C]$ $\boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C}$ *et* $B \notin \Gamma$*, alors il existe une condition* $\mathcal{C}^t$ *telle que* $\mathcal{C}^{t,\to} \vdash \mathcal{C}^{\to}$ *et* $[F \to B, E, \Gamma \vdash C]$ $\boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C}^t$.

(iii) *Si* $[(E \vee F) \to B, \Gamma \vdash C]$ $\boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C}$ *et* $B \notin \Gamma$*, alors il existe une condition* $\mathcal{C}^t$ *telle que* $\mathcal{C}^{t,\to} \vdash \mathcal{C}^{\to}$ *et* $[E \to B, F \to B, \Gamma \vdash C]$ $\boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C}^t$.

(iv) *Si* $[(E \wedge F) \to B, \Gamma \vdash C]$ $\boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C}$ *et* $B \notin \Gamma$*, alors il existe une condition* $\mathcal{C}^t$*, il existe* n *conditions* $\mathcal{C}^{t_i}$ $1 \leq i \leq n$*, telles que*

$$(\mathcal{C}^t[\mathcal{C}^{t_i}/(E \to (F \to B), F \to B, \Gamma \vdash C)]_{1 \leq i \leq n})^{\to} \vdash \mathcal{C}^{\to}$$

(on substitue à n *occurrences distinctes de la formule* $E \to (F \to B), F \to B, \Gamma \vdash C$ *les conditions* $\mathcal{C}^{t_i}$*).*

$$[E \to (F \to B), \Gamma \vdash C]\ \boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C}^t$$

$$\textit{et pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}, [F \to B, \Gamma \vdash C]\ \boldsymbol{rd_c}\, \mathcal{C}^{t_i}\ .$$

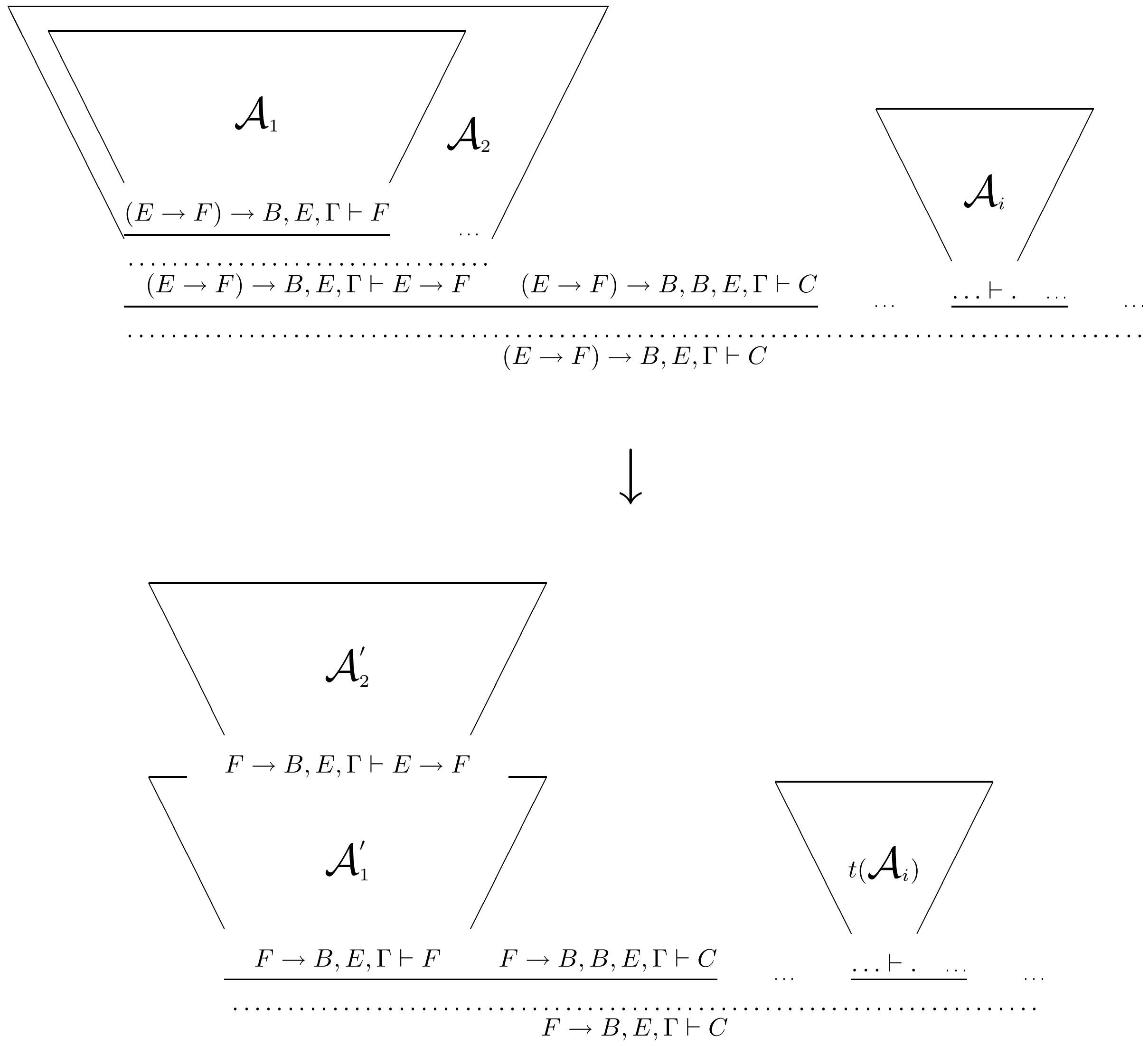
Preuve : dans chacun des cas le résultat est évident si la rétro-dérivation est de hauteur nulle, puisque le séquent associé est équivalent.
Le cas (i) est le plus simple. En effet pour tout nœud de la rétro-dérivation la règle ($\to$ *gauche*) sur la formule $A \to B$ conduit à une redondance sur la prémisse droite. En supprimant dans la rétro-dérivation initiale $[A \to B, B, \Gamma \vdash C]$ $\boldsymbol{rd}\ \mathcal{C}$ l'application de ces règles et dans les séquents la formule $A \to B$ à laquelle elles s'appliquent, on obtient la rétro-dérivation $[B, \Gamma \vdash C]$ $\boldsymbol{rd}\ \mathcal{C}^t$. On n'a effacé que des redondances donc $\mathcal{C}^{\to} \equiv \mathcal{C}^{t\to}$.

Tous les autres cas se montrent par induction sur la hauteur de la rétro-dérivation. Le cas initial de l'induction consiste à chaque fois en traduire le séquent de la façon adéquate. Comme les preuves sont assez répétitives, et ne présentent guère d'autres difficultés que d'être énoncées, on n'a pas toujours détaillé tous les arguments.

Il est utile pour les preuves qui suivent de remarquer que les conditions sont des combinaisons booléennes positives donc la substitution d'un séquent par une condition plus forte transforme une condition en une condition plus forte.

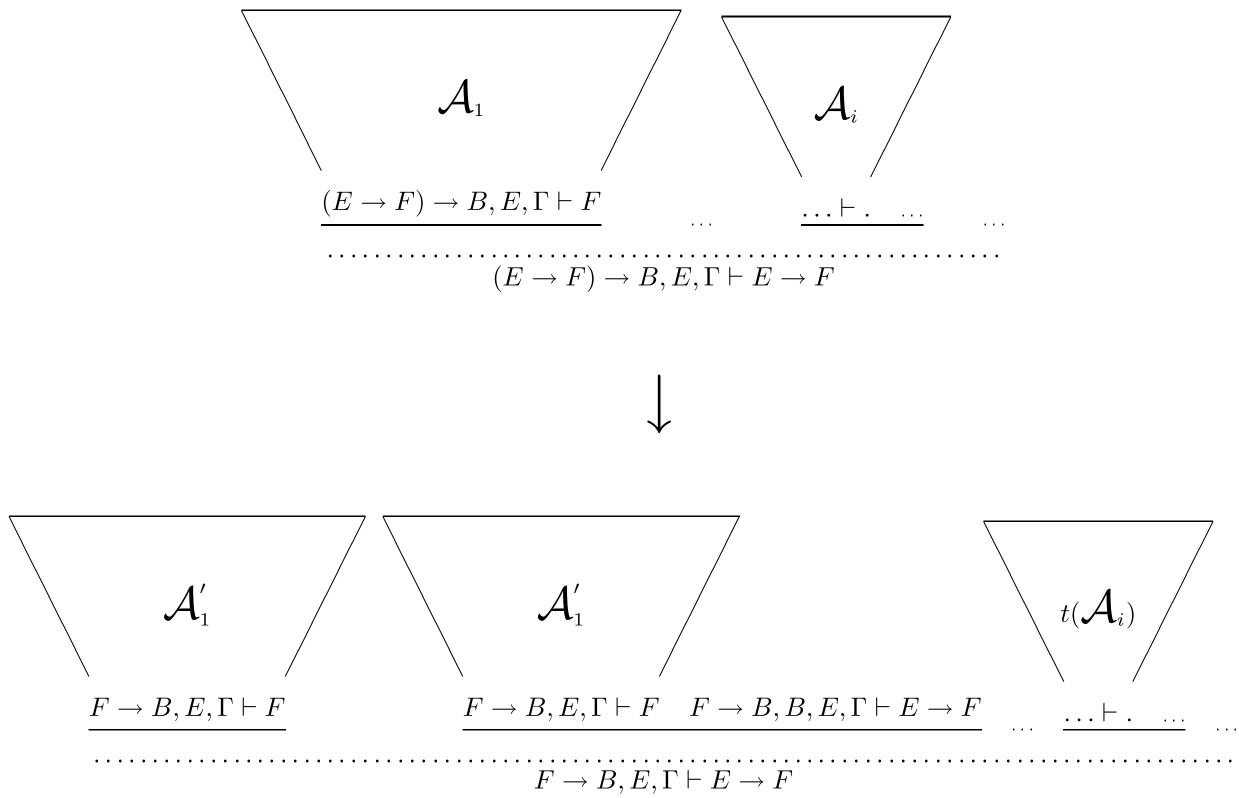
Preuve ((ii)) : la traduction d'une rétro-dérivation à partie gauche constante $\mathcal{RD}$ de racine $(E \to F) \to B, E, \Gamma \vdash C$, de feuilles $\mathcal{C}$ en la rétrodérivation à partie gauche constante $t(\mathcal{RD})$ de racine $F \to B, E, \Gamma \vdash C$ de feuilles $\mathcal{C}'$ est définie par induction sur la longueur maximale des branches ne commençant pas par une application de la règle ($\to$ *gauche*). On distingue les cas $C \neq E \to F$ et $C = E \to F$. Les deux schémas ci-dessous illustrent le pas d'induction.

Cas où $C \neq E \to F$



Le cas $C = F$ est vu comme un cas dégénéré du cas ci-dessus : les rétro-dérivations $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_1'$ sont réduites au séquent barré $[\![F \to B, E, \Gamma \vdash F]\!]$.

Cas où $C = E \to F$



Dans les deux cas l'arbre $\mathcal{A}'$ désigne l'arbre obtenu à partir de l'arbre $\mathcal{A}$ en remplaçant dans les parties gauches de chaque séquent la formule $(E \to F) \to B$ par la formule $F \to B$ et en appliquant les pas de rétro-dérivation aux formules qui se correspondent.

Dans le deuxième cas $C = E \to F$, les formules modifiées conduisent à des redondances, et donc les feuilles de l'arbre $\mathcal{A}_1'$ sont exactement les traductions des feuilles de $\mathcal{A}_1$. Dans le premier cas $C \neq E \to F$, les éventuelles occurrences du séquent $(E \to F) \to B, E, \Gamma \vdash E \to F$, qui sont barrées dans $\mathcal{A}_1$ par redondance, sont traduites en occurrences du séquent $F \to B, E, \Gamma \vdash E \to F$, qui ne donnent pas lieu à des redondances, et sont donc des feuilles non barrées de l'arbre $\mathcal{A}_1'$. Dans la traduction on ajoute au dessus de ces feuilles l'arbre $\mathcal{A}_2'$, et cette fois les formules modifiées dans la traduction de $\mathcal{A}_2$ à $\mathcal{A}_2'$ conduisent à des redondances dans les deux arbres. On a donc bien obtenu une rétro-dérivation, dont les feuilles non barrées correspondent toutes à des feuilles non barrées de la rétro-dérivation originale.

On montre par induction sur la définition de la traduction que la condition $\mathcal{C}$ associée à la rétro-dérivation originale est conséquence de la condition $\mathcal{C}^t$ associée à la rétro-dérivation transformée.

Voyons le pas d'induction. On reprend les notations des schémas ci-dessus définissant la traduction t.

Appelons $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ les conditions associées aux arbres $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}'_1$ et $\mathcal{A}'_2$. Il est évident que $\mathcal{C}_1'^{\rightarrow} \equiv \mathcal{C}_1^{\rightarrow}$, et $\mathcal{C}_2'^{\rightarrow} \equiv \mathcal{C}_2^{\rightarrow}$, et que $\mathcal{C}_1^{\rightarrow} \vdash \mathcal{C}_2^{\rightarrow}$.

Appelons $\mathcal{D}$ respectivement $\mathcal{D}^t$ la disjonction pour $i > 2$ des conditions associées aux arbres $\mathcal{A}_i$, respectivement $t(\mathcal{A}_i)$.

Cas $C \neq E \rightarrow F$: nous avons à montrer

$$((\mathcal{C}'_1[\mathcal{C}'_2/\vdash \bot] \wedge (F \rightarrow B, E, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{D}^t)^{\rightarrow} \vdash ((\mathcal{C}_2 \wedge (E \rightarrow F) \rightarrow B, E, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{D})^{\rightarrow} ,$$

ce qui découle du lemme 7.4.2 (i) et de l'hypothèse d'induction.

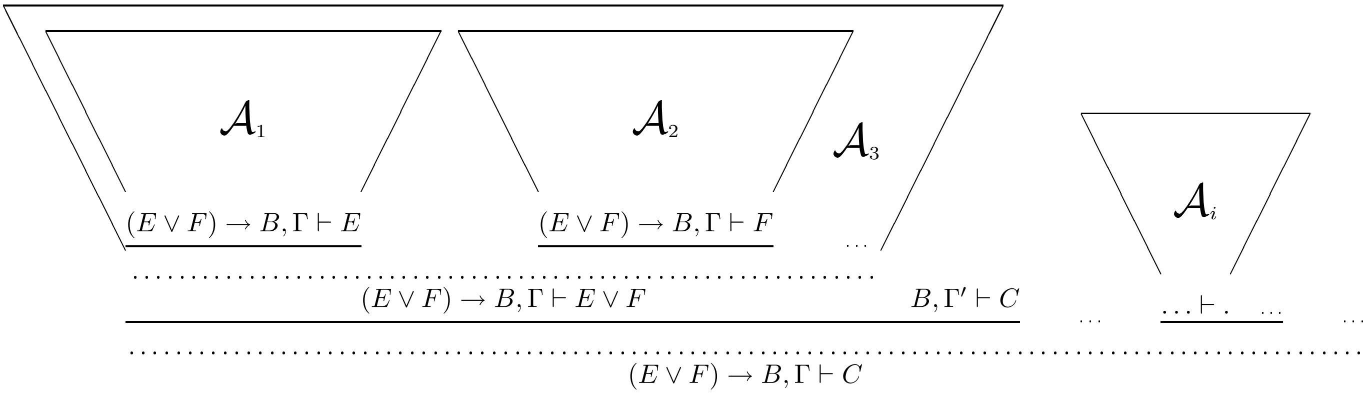
Cas $C = E \rightarrow F$: nous avons à montrer

$$(\mathcal{C}'_1 \vee (\mathcal{C}'_1 \wedge (F \rightarrow B, E, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{D}^t)^{\rightarrow} \vdash (\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{D})^{\rightarrow} ,$$

ce qui découle de la distributivité du $\vee$ sur le $\wedge$ et de l'hypothèse d'induction.

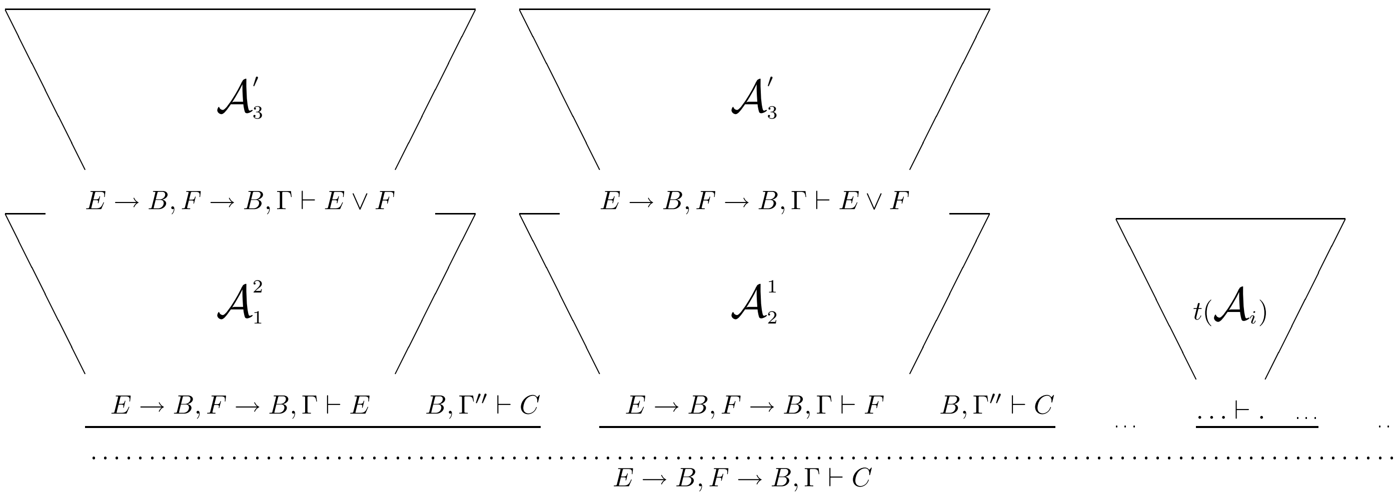
Preuve ((iii)) : on procède de façon analogue au cas précédent. On définit une traduction t par induction sur la longueur de la plus longue branche ne commençant pas par une règle ($\vee$*droite*).

Cas où $C \neq E \vee F$



avec $\Gamma' = \{(E \vee F) \to B\} \cup \Gamma$

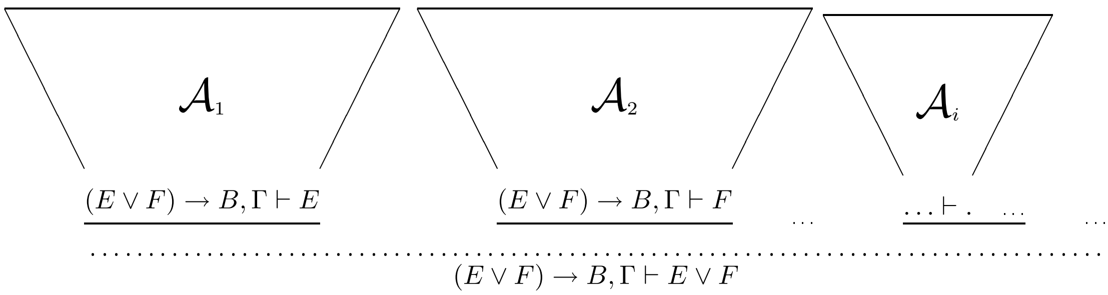
$$\downarrow$$



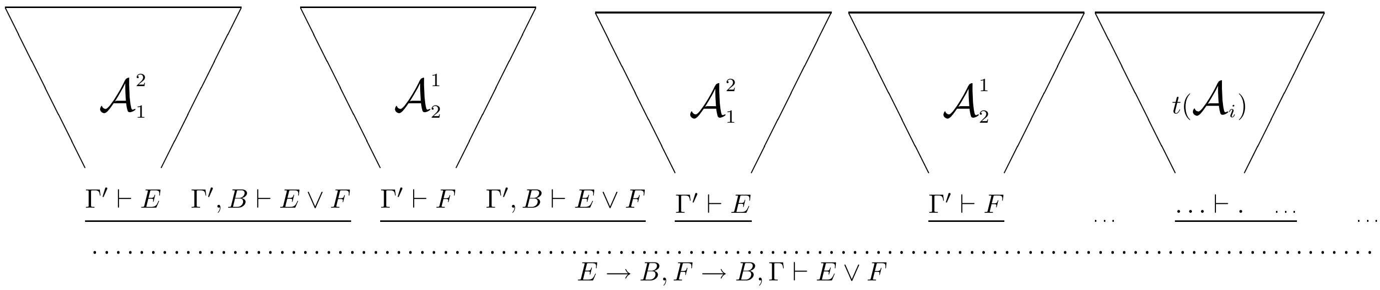
avec $\Gamma'' = \{E \to B, F \to B\} \cup \Gamma$

Les cas $C = E$ et $C = F$ sont des sous-cas dégénérés du cas ci-dessus.

Cas où $C = E \vee F$

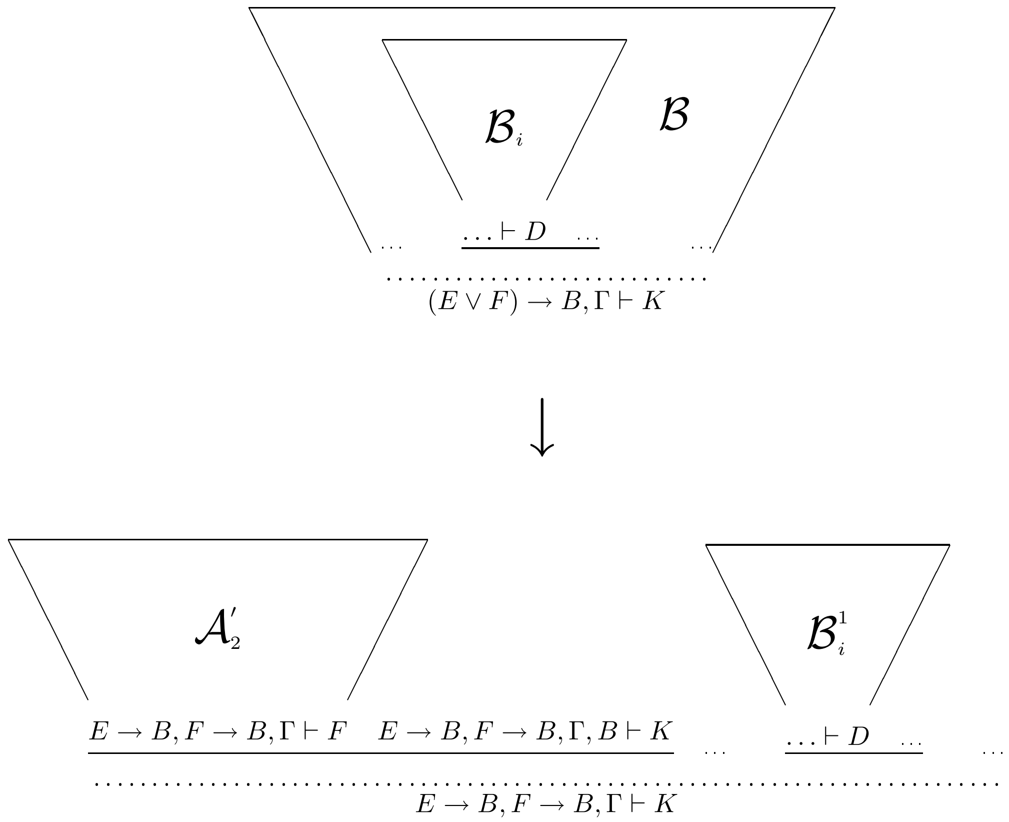


$$\downarrow$$



avec $\Gamma' = \{E \to B, F \to B\} \cup \Gamma$

Définissons maintenant $\mathcal{A}_1^2$ et $\mathcal{A}_2^1$ qui sont obtenues à partir de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ par la transformation suivante. On définit par induction sur la hauteur de $\mathcal{A}$ la transformation $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}^j$, avec $j = 1$ ou $j = 2$. Voyons le cas $j = 1$ (le cas $j = 2$ est similaire).



La transformation $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est définie de façon analogue au cas précédent, on remplace cette fois ci dans les parties droites des séquents la formule $(E \vee F) \rightarrow B$ par les deux formules $E \rightarrow B$ et $F \rightarrow B$. Les conditions associées sont clairement équivalentes.

On montre par induction sur la définition de la traduction que la condition $\mathcal{C}$ associée à la rétro-dérivation originale est conséquence de la condition $\mathcal{C}^t$ associée à la rétro-dérivation transformée.

Voyons le pas d'induction. On reprend les notations des schémas définissant la traduction.

Appelons $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}'_i$ et $\mathcal{C}^j_i$ les conditions associées aux arbres $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}'_i$ et $\mathcal{A}^j_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2$ ($j \neq i$). Il est évident que $\mathcal{C}'^{\rightarrow}_i \equiv \mathcal{C}^{\rightarrow}_i$, et que $\mathcal{C}^{\rightarrow}_1 \vee \mathcal{C}^{\rightarrow}_2 \vdash \mathcal{C}^{\rightarrow}_3$.

La transformation $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}^j$ envoie un arbre de condition associée $\mathcal{D}$ sur un arbre de condition associée $\mathcal{D}^j$, vérifiant $\mathcal{D}^{j\rightarrow} \vdash (\mathcal{D} \vee \mathcal{C}_j)^{\rightarrow}$, à condition de conserver comme barrées des feuilles "$[\![E \rightarrow B, F \rightarrow B, \Gamma \vdash E \vee F]\!]$" qui ne correspondent plus à des redondances dans l'arbre transformé (induction immédiate sur la définition de cette traduction).

On en déduit que $\mathcal{C}^{2\rightarrow}_1 \vdash (\mathcal{C}'_1 \vee \mathcal{C}'_2)^{\rightarrow}$ et $\mathcal{C}^{1\rightarrow}_2 \vdash (\mathcal{C}'_1 \vee \mathcal{C}'_2)^{\rightarrow}$.

On déduit du lemme 7.4.2 (ii) que

$$\mathcal{C}_1^2[\mathcal{C}_3'/\vdash\bot]^{\rightarrow}\vdash(\mathcal{C}_1'\vee\mathcal{C}_2'\vee\mathcal{C}_3')^{\rightarrow}\ \text{ et }\ \mathcal{C}_2^1[\mathcal{C}_3'/\vdash\bot]^{\rightarrow}\vdash(\mathcal{C}_1'\vee\mathcal{C}_2'\vee\mathcal{C}_3')^{\rightarrow}\ .$$

Il suit (lemme 7.4.2 (i))

$$\mathcal{C}_1^2[\mathcal{C}_3'/\vdash\bot]^{\rightarrow}\vdash\mathcal{C}_3^{\rightarrow}\ \text{ et }\ \mathcal{C}_2^1[\mathcal{C}_3'/\vdash\bot]^{\rightarrow}\vdash\mathcal{C}_3^{\rightarrow}\ .$$

Appelons $\mathcal{D}$, respectivement $\mathcal{D}^t$ la disjonction pour $i>3$ des conditions associées aux arbres $\mathcal{A}_i$, respectivement $t(\mathcal{A}_i)$.

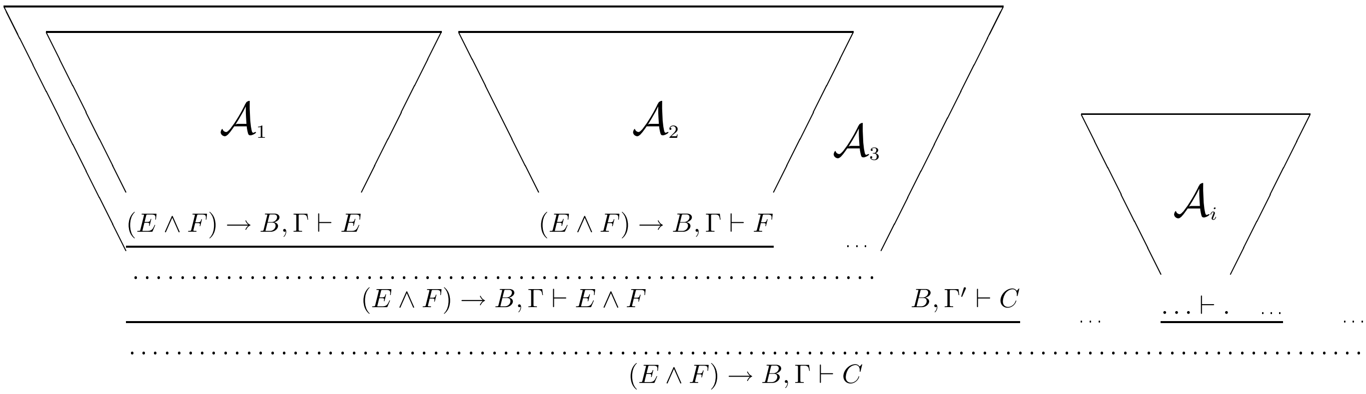
Dans le cas $C\neq E\vee F$ il nous reste à montrer

$$\begin{aligned}(((\mathcal{C}_1^2[\mathcal{C}_3'/\vdash\bot]\vee\mathcal{C}_1^2[\mathcal{C}_3'/\vdash\bot])\wedge(E\rightarrow B,F\rightarrow B,\Gamma\vdash C))\vee\mathcal{D}^t)^{\rightarrow}&\\ \vdash((\mathcal{C}_3\wedge(E\vee F)\rightarrow B,\Gamma\vdash C))\vee\mathcal{D})^{\rightarrow}&\ ,\end{aligned}$$

ce qui découle de ce qui précède, de la distributivité et de l'hypothèse d'induction. Le cas $C=E\vee F$ est analogue.

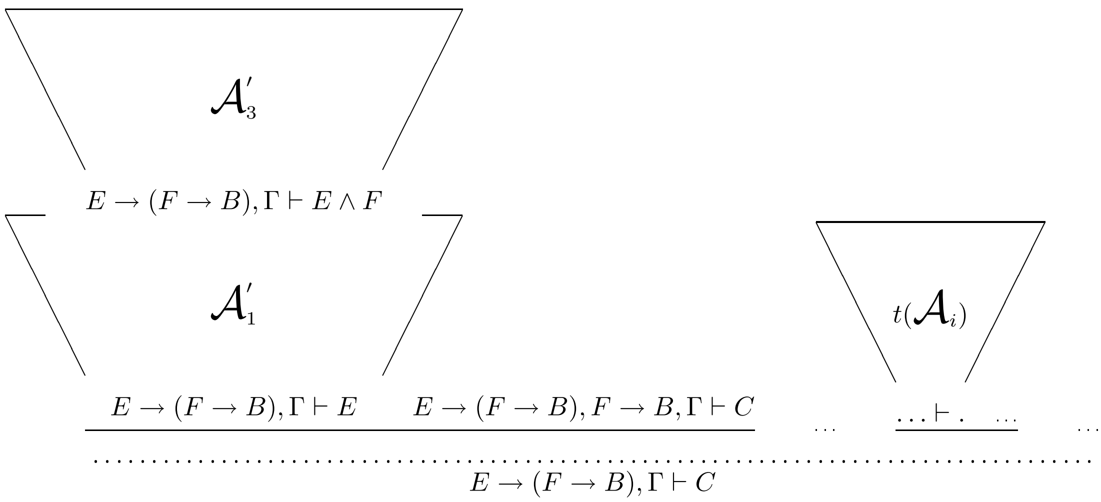
Preuve (iv) : on procède de façon analogue aux cas précédents. On définit cette fois une traduction t et une traduction $t^{\mathcal{B}}$ paramétrée par un arbre $\mathcal{B}$ de conclusion $F\rightarrow B,\Gamma\vdash F$, par induction sur la longueur de la plus longue branche ne commençant pas par une règle ($\wedge$*droite*).

Définition de t dans le cas où $C \neq E \wedge F$

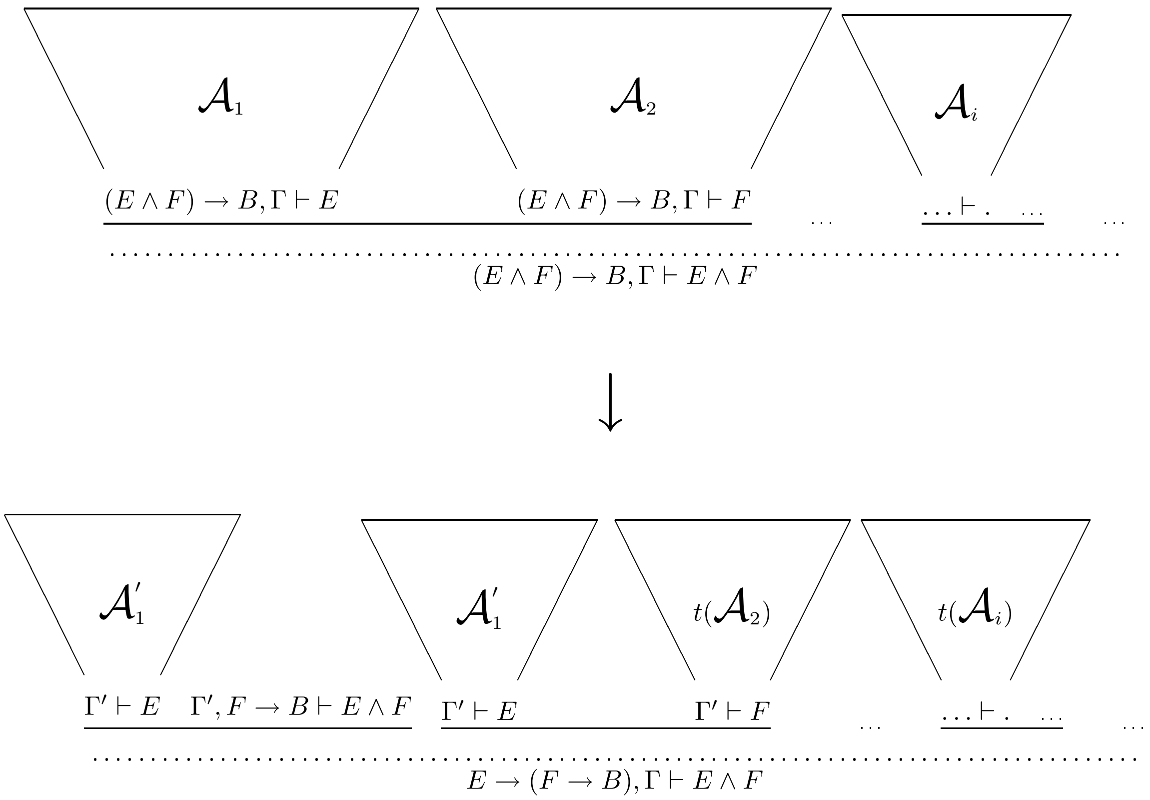


avec $\Gamma' = \{(E \wedge F) \to B\} \cup \Gamma$

$$\downarrow$$

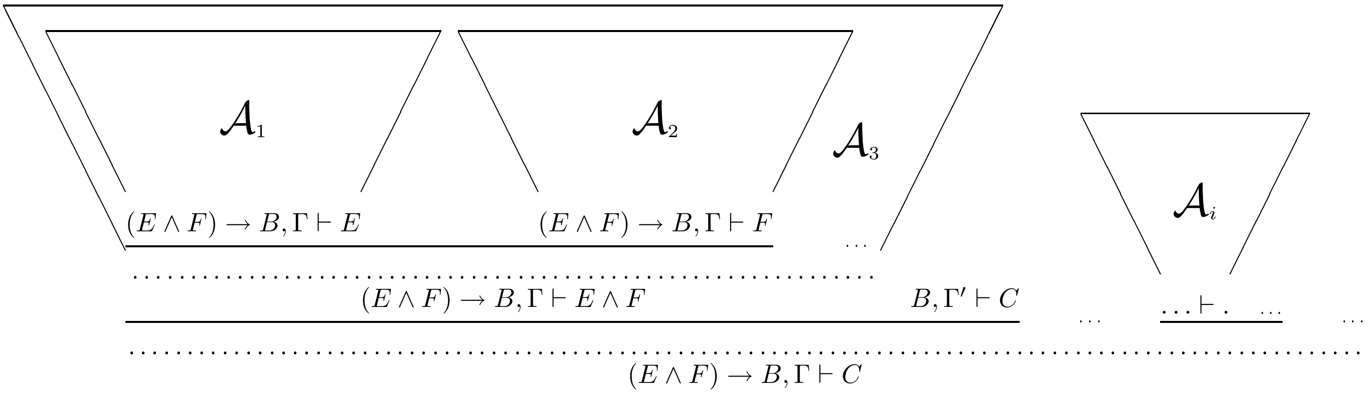


Définition de t dans le cas où $C = E \wedge F$



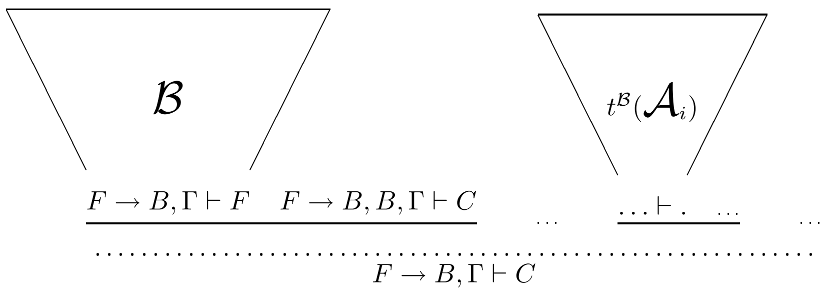
avec $\Gamma' = \{E \to (F \to B)\} \cup \Gamma$

Définition de $t^{\mathcal{B}}$ dans le cas où $C \neq E \wedge F$

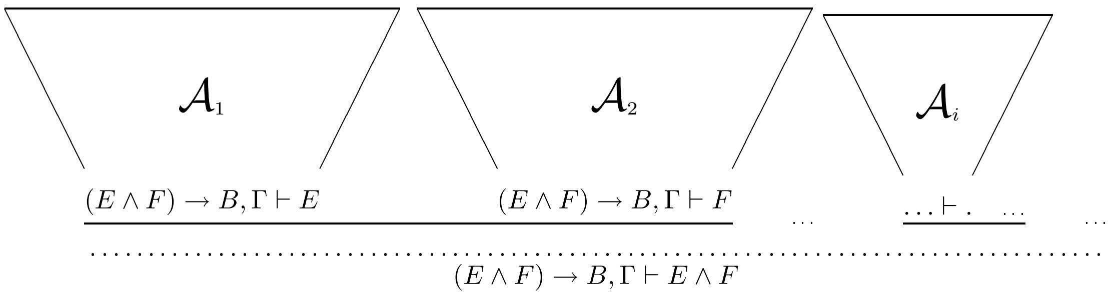


avec $\Gamma' = \{(E \wedge F) \rightarrow B\} \cup \Gamma$

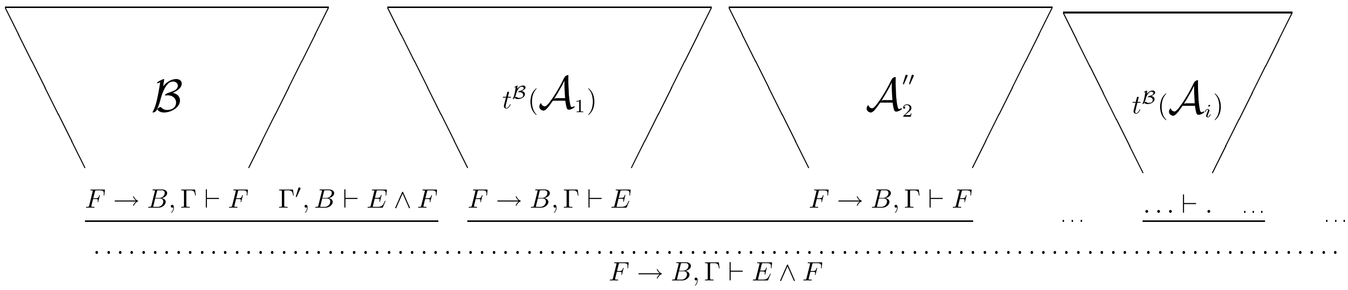
$$\downarrow$$



Définition de $t^{\mathcal{B}}$ dans le cas où $C = E \wedge F$



$$\downarrow$$



avec $\Gamma' = \{F \to B\} \cup \Gamma$

Les transformations $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, et $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}''$ sont définies de façon analogue aux cas précédents. On remplace cette fois ci dans les parties droites des séquents la formule $(E \wedge F) \to B$ par la formule $E \to (F \to B)$ pour $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, par la formule $F \to B$ pour $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}''$. Les conditions associées sont clairement équivalentes pour $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, On obtient une condition plus forte pour $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}''$.

Appelons $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ la condition associée à l'arbre $\mathcal{B}$. On montre tout d'abord par induction sur la définition de $t^{\mathcal{B}}$ que

$$\mathcal{C}^{t^{\mathcal{B}}\to} \vdash (\mathcal{C} \vee (\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash C)))^{\to} .$$

Le cas initial ne pose pas de problèmes.

Voyons le pas d'induction.

Appelons $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}''_i$ les conditions associées aux arbres $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}''_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Il est évident que $\mathcal{C}''^{\rightarrow}_i \vdash \mathcal{C}^{\rightarrow}_i$, et que $\mathcal{C}^{\rightarrow}_1 \wedge \mathcal{C}^{\rightarrow}_2 \vdash \mathcal{C}^{\rightarrow}_3$.

Appelons $\mathcal{C}^{t^{\mathcal{B}}}$, respectivement $\mathcal{C}^{t^{\mathcal{B}}}_1$, les conditions associées aux arbres $t^{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$, respectivement $t^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_1)$. Appelons $\mathcal{D}$, respectivement $\mathcal{D}^{t^{\mathcal{B}}}$, la disjonction pour $i > 3$ des conditions associées aux arbres $\mathcal{A}_i$, respectivement $t^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_i)$ des schémas définissant la traduction $t^{\mathcal{B}}$.

remarquons tout d'abord que l'hypothèse d'induction entraîne que

$$\mathcal{D}^{t^{\mathcal{B}}\rightarrow} \vdash (\mathcal{D} \vee (\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash C)))^{\rightarrow} \,. \qquad (*)$$

En effet, ceci est vrai pour chacune des conjonctions conditions associées aux arbres $\mathcal{A}_i$, $i > 3$, prémisses d'une même règle. Voyons le cas où la règle en question est une règle "$(\rightarrow$ *gauche*$)$" (tous les autres cas sont évidents). Nous devons montrer, pour $A \rightarrow B \in \Gamma$ que

$$\begin{aligned}(((A \rightarrow B, \Gamma \vdash A) \vee (\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash A))) \wedge ((A \rightarrow B, B, \Gamma \vdash C) \vee (\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash C))))^{\rightarrow} \\ \vdash (((A \rightarrow B, \Gamma \vdash A) \wedge (A \rightarrow B, B, \Gamma \vdash C)) \vee (\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash C)))^{\rightarrow} \,.\end{aligned}$$

On le déduit facilement de

$$((A \rightarrow B, \Gamma \vdash A) \vee (\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash A)))^{\rightarrow} \vdash (A \rightarrow B, \Gamma \vdash A)^{\rightarrow} \,.$$

Voyons maintenant le pas d'induction dans chacun des deux cas considérés pour la définition de $t^{\mathcal{B}}$.

<u>Cas $C \neq E \wedge F$:</u> nous pouvons déduire de ce que $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}''$ envoie une condition sur une condition plus forte, et de $(*)$

$$\begin{aligned}((\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (F \rightarrow B, B, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{D}^{t^{\mathcal{B}}})^{\rightarrow} \\ \vdash (\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (F \rightarrow B, B, \Gamma \vdash C)) \vee (\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{D})^{\rightarrow} \,,\end{aligned}$$

et donc, en distribuant, et en remarquant que les séquents $B, \Gamma \vdash C$, $F \rightarrow B, B, \Gamma \vdash C$ et $(E \wedge F) \rightarrow B, B, \Gamma \vdash C$ sont équivalents, et que $\mathcal{D}^{\rightarrow} \vdash \mathcal{C}^{\rightarrow}$,

$$((\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (F \rightarrow B, B, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{D}^{t^{\mathcal{B}}})^{\rightarrow} \vdash ((\mathcal{C}_2 \wedge (B, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{C})^{\rightarrow} \,.$$

<u>Cas $C = E \wedge F$:</u> il nous faut montrer que

$$((\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (F \to B, B, \Gamma \vdash C)) \vee (\mathcal{C}_1^{t^{\mathcal{B}}} \wedge \mathcal{C}_2'') \vee \mathcal{D}^{t^{\mathcal{B}}})^{\to}$$
$$\vdash ((\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash C)) \vee (\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2) \vee \mathcal{D})^{\to} \ .$$

On a par hypothèse d'induction, et comme $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}''$ envoie une condition sur une condition plus forte,

$$((\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (F \to B, B, \Gamma \vdash C)) \vee (\mathcal{C}_1^{t^{\mathcal{B}}} \wedge \mathcal{C}_2'') \vee \mathcal{D}^{t^{\mathcal{B}}})^{\to}$$
$$\vdash$$
$$((\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (F \to B, B, \Gamma \vdash C)) \vee (((\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{C}_1) \wedge \mathcal{C}_2) \vee (\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \wedge (B, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{D})^{\to} \ ,$$

ce qui donne le résultat après développement ($\mathcal{C} = (Mc_1 \wedge \mathcal{C}_2) \vee \mathcal{D}$).

On montre maintenant par induction sur la définition de t que

$$\mathcal{C}^t[\mathcal{C}^{t_i^{\mathcal{B}}}/(E \to (F \to B), F \to B, \Gamma \vdash C)]_{i \in \mathbb{N}} \vdash \mathcal{C}^{\to} \ ,$$

pour un choix convenable des arbres $\mathcal{B}_i$ pour chaque occurrence de la formule $E \to (F \to B), F \to B, \Gamma \vdash C$. On définit ce choix au fur et à mesure de l'induction.

Appelons $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_i'$ les conditions associées aux arbres $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_i'$ pour $i = 1, 2, 3$. Il est évident que $\mathcal{C}_i'^{\to} \equiv \mathcal{C}_i^{\to}$, et que $\mathcal{C}_1^{\to} \wedge \mathcal{C}_2^{\to} \vdash \mathcal{C}_3^{\to}$.

Appelons $\mathcal{C}^t$, respectivement $\mathcal{C}_1^t$, les conditions associées aux arbres $t(\mathcal{A})$, respectivement $t(\mathcal{A}_1)$. Appelons $\mathcal{D}$, respectivement $\mathcal{D}^t$, la disjonction pour $i > 3$ des conditions associées aux arbres $\mathcal{A}_i$, respectivement $t(\mathcal{A}_i)$ des schémas définissant la traduction t.

<u>Cas $C \neq E \wedge F$</u> : il nous faut montrer que

$$((\mathcal{C}_1'[\mathcal{C}_3'/\vdash \bot] \wedge \mathcal{C}^{t^{\mathcal{B}}}) \vee \mathcal{D}^t)^{\to} \vdash \mathcal{C}^{\to} \ \text{ avec } \ \mathcal{C} = (\mathcal{C}_3 \wedge ((E \wedge F) \to B, B, \Gamma \vdash C)) \vee \mathcal{D} \ .$$

On choisit pour $\mathcal{B}$, l'arbre $\mathcal{A}_2''$ dans lequel toutes les occurrences de $F \to B\Gamma \vdash E \wedge F$, qui ne donnent plus lieu à des redondances, sont remplacées par l'arbre $\mathcal{A}_3''$. On obtient bien ainsi une rétro-dérivation. La condition associée à l'arbre $\mathcal{B}$ équivaut à $\mathcal{C}_2'' \vee \mathcal{C}_3''$ (lemme 7.4.2 (ii)), donc entraîne $\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{C}_3$.

On utilise l'hypothèse d'induction, le résultat précédent sur $t^{\mathcal{B}}$, le lemme 7.4.2 (ii) et le fait $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ envoie une condition sur une condition équivalente. On obtient

$$((\mathcal{C}_1'[\mathcal{C}_3'/\vdash \bot] \wedge \mathcal{C}^{t^{\mathcal{B}}}) \vee \mathcal{D}^t)^{\to} \vdash ((\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_3) \wedge (\mathcal{C} \vee ((\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{C}_3) \wedge (B, \Gamma \vdash C))) \vee \mathcal{D})^{\to}$$

et on en déduit le résultat en remarquant que $(\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2)^{\to} \vdash \mathcal{C}_3^{\to}$.

Cas $C = E \wedge F$: il nous faut montrer que

$$((\mathcal{C}'_1 \wedge (\mathcal{C}^{t^{\mathcal{B}}}) \vee (\mathcal{C}'_1 \wedge \mathcal{C}^t_2) \vee \mathcal{D}^t)^{\rightarrow} \vdash \mathcal{C}^{\rightarrow} \text{ avec } \mathcal{C} = (\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2) \vee \mathcal{D} .$$

On choisit pour $\mathcal{B}$, l'arbre $\mathcal{A}''_2$. On obtient bien ainsi une rétro-dérivation. La condition associée à l'arbre $\mathcal{B}$ équivaut à $\mathcal{C}''_2$,et donc entraîne $\mathcal{C}_2$.

On utilise l'hypothèse d'induction, le résultat précédent sur $t^{\mathcal{B}}$, et le fait que $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ envoie une condition sur une condition équivalente. On obtient

$$((\mathcal{C}'_1 \wedge (\mathcal{C}^{t'}) \vee (\mathcal{C}'_1 \wedge \mathcal{C}^t_2) \vee \mathcal{D}^t)^{\rightarrow} \vdash ((\mathcal{C}_1 \wedge (\mathcal{C} \vee (\mathcal{C}_2 \wedge (B, \Gamma \vdash C)))) \vee (\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2) \vee \mathcal{D})^{\rightarrow}$$

et on en déduit le résultat. ■

7.4.4 La suite est génératrice

Lemme 7.4.9 *Si le séquent* $(\Gamma \vdash C)$ *se rétro-dérive en une condition* $\mathcal{C}$ *par une rétro-dérivation à partie gauche constante, alors* $\Gamma \rightarrow C >_{(ad_n)} \mathcal{C}^{\rightarrow}$.

Preuve : en vertu du lemme 7.4.7 il suffit de montrer qu'une telle rétro-dérivation peut se ramener à des rétro-dérivations sur un séquent non-redondant. On montre ce résultat par induction sur les parties gauches des séquents avec le lemme 7.4.8. Mais définissons tout d'abord un pré-ordre bien fondé sur les ensembles de formules utilisé pour cette induction. On définit pour cela une mesure sur les ensembles de formules :
- le poids des connecteurs "$\vee$, $\rightarrow$," est 1, le poids du connecteur "$\wedge$" est 2 ;
- la mesure d'une formule est la somme des poids des connecteurs apparaissant dans une formule ;
- la mesure d'un ensemble de formules est la suite des mesures des formules de cet ensemble, rangées par ordre décroissant.

On adopte comme pré-ordre sur les ensembles de formules, l'ordre lexicographique sur la mesure ci-dessus définie de ces ensembles. Ce pré-ordre est bien fondé, car l'ordre associé sur les multi-ensembles d'entiers est bien fondé.

Montrons maintenant le pas d'induction. Si le séquent $\Gamma \vdash C$ en question est redondant, alors (voir définition 7.4.6), on a 4 cas possibles.

Soit il existe deux formules A et B telles que $A \rightarrow B \in \Gamma$ et $B \in \Gamma$. On se ramène alors par le lemme 7.4.8 (i) à une rétro-dérivation à partie gauche constante sur le séquent $\Gamma - \{A \rightarrow B\} \vdash C$, qui est de mesure inférieure à $\Gamma \vdash C$. En effet, on supprime une formule, on a donc une suite de mesures plus courte extraite de la précédente, et donc inférieure dans l'ordre lexicographique, car ces mesures sont rangées par ordre décroissant.

Soit il existe trois formules E, F et B telles que $(E \rightarrow F) \rightarrow B \in \Gamma$, $E \in \Gamma$ et $B \notin \Gamma$. On se ramène alors par le lemme 7.4.8 (ii) à une rétro-dérivation à partie gauche constante sur le séquent $\Gamma[F \rightarrow B/(E \rightarrow F) \rightarrow B] \vdash C$, qui est de mesure inférieure à $\Gamma \vdash C$. En effet, on remplace une formule de la partie gauche par une formule de mesure inférieure.

Soit il existe trois formules E, F et B telles que $(E \vee F) \to B \in \Gamma$ et $B \notin \Gamma$. On se ramène alors par le lemme 7.4.8 (iii) à une rétro-dérivation à partie gauche constante sur le séquent $\Gamma[E \to B, F \to B/(E \vee F) \to B] \vdash C$, qui est de mesure inférieure à $\Gamma \vdash C$. En effet, on remplace une formule de la partie gauche par deux formules de mesure inférieure.
Soit il existe trois formules E, F et B telles que $(E \wedge F) \to B \in \Gamma$ et $B \notin \Gamma$. On se ramène alors par le lemme 7.4.8 (iv) à un nombre fini de rétro-dérivations à partie gauche constante.
L'une porte sur le séquent $\Gamma[E \to (F \to B)/(E \wedge F) \to B] \vdash C$, qui est de mesure inférieure à $\Gamma \vdash C$. En effet, on remplace dans une formule de la partie gauche le connecteur "$\wedge$" de poids 2 par le connecteur "$\to$" de poids 1.
Les autres portent sur le séquent $\Gamma[F \to B/(E \wedge F) \to B] \vdash C$, qui est de mesure inférieure à $\Gamma \vdash C$. En effet, on remplace une formule de la partie gauche par une formule de mesure inférieure. ■

Proposition 7.4.10 *Toute règle admissible est conséquence intuitionniste des règles* (ad_n).

PREUVE : il suffit de démontrer ce résultat pour les règles rétro-dérivables d'après la proposition 5.5.3. D'après le lemme 7.4.1, il suffit de démontrer ce résultat pour des règles rétro-dérivables utilisant des rétro-dérivations à partie gauche constante. On conclut par le lemme 7.4.9 précédent. ■

7.5 Une axiomatisation infinie de l'admissibilité

Résumons les résultat de cette section dans la proposition suivante.

Proposition 7.5.1 *La suite des règles* $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite strictement croissante, au sens où l'une d'entre elle n'est pas conséquence des précédentes, de règles admissibles, qui engendrent par conséquence intuitionniste toutes les règles admissibles.*

Corollaire 7.5.2 *Il n'existe pas de suite finie de règles qui engendrent par conséquence intuitionniste toutes les règles admissibles.*

PREUVE : on le déduit de la proposition précédente. Supposons qu'une telle suite finie de règles existe. Ces règles sont conséquences des règles $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisqu'elles sont admissibles, et d'un nombre fini de règles parmi les règles $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisqu'elles sont en nombre fini, et par définition de la notion de conséquence entre règles (voir définition 7.2.1). Un nombre fini de règles parmi les règles $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendreraient donc toutes les règles admissibles, en particulier toutes les règles $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui contredirait le fait que cette suite est strictement croissante. ■

Le résultat de ce corollaire est également démontré (de façon différente) par V.V.Rybakov dans [Ry 85].

Des remarques sur la preuve

Les transformations données au lemme 7.4.2 sont connues dans un autre cadre. Elles permettent de donner une version du calcul des séquents intuitionniste tel que la recherche d'une preuve dans ce système ne nécessite plus le test de redondance. Cependant on perd la propriété de la sous-formule, du moins sous sa forme usuelle, et cela le rend très difficilement manipulable, pour une preuve directe de la complétude de la rétro-dérivation.

Il semble que cette méthode soit connue depuis longtemps en URSS (Vorob'ev en 58). Des versions récentes ont été données par J. Hudelmaier et R. Dyckoff [Dy 91], qui de plus donne une bibliographie à ce sujet, et dont je tiens ces renseignements. L'induction utilisée au lemme 7.4.9 repose sur un ordre analogue à celui utilisé par R. Dyckoff. Dans notre cas des complications viennent du fait que l'on doit étudier en quelque sorte la façon dont se traduit l'ensemble des preuves possibles d'un séquent, et non seulement comment une preuve peut se traduire. Par contre, nous n'avons pas à envisager le cas où le séquent racine contient une variable propositionnelle.

8 Une logique où les règles admissibles sont dérivables

La logique que nous présentons ne semble pas avoir grand intérêt en tant que telle, en particulier l'axiome qui la définit ne semble pas s'interpréter fonctionnellement. Le résultat est plutôt négatif, à savoir que la logique classique n'est pas la plus petite logique au dessus de la logique intuitionniste dans laquelle toutes les règles admissibles en logique intuitionniste sont dérivables.

8.1 Préliminaires

Si l'on ajoute des axiomes, la relation d'admissibilité est en général transformée. A priori rien ne permet de dire qu'une règle reste admissible, puisqu'éventuellement de nouvelles substitutions valident ses prémisses, et rien ne permet de dire qu'une règle ne devient pas admissible, puisqu'éventuellement de nouvelles substitutions valident sa conclusion.

On peut cependant énoncer la conséquence des résultats de la section 5 qui suit.

Proposition 8.1.1 *Les formules ayant mêmes conséquences dérivables et admissibles dans la logique intuitionniste, gardent cette propriété dans toute logique plus forte que la logique intuitionniste.*

PREUVE : c'est une conséquence immédiate du corollaire 5.5.5. Si la formule est une antilogie le résultat est évident. On considère la caractérisation donnée par la troisième clause de ce corollaire, à savoir qu'une formule G a mêmes conséquences admissibles et dérivables si et seulement s'il existe p substitutions $s_1, \ldots, s_p$ telles que $\vdash s_1(G), \ldots, \vdash s_p(G)$ et pour toute proposition C, $s_1(C) \wedge \ldots \wedge s_p(C) \vdash G \to C$.

Ces substitutions vérifient de même dans une logique (AX) plus forte que la logique intuitionniste, $\vdash_{(AX)} s_1(G), \ldots, \vdash_{(AX)} s_p(G)$. Donc par définition de l'admissibilité,

$$\textit{si } G \gg_{(AX)} C, \textit{ alors } \vdash_{(AX)} s_1(C), \ldots, \vdash_{(AX)} s_p(C)\,.$$

Mais comme $s_1(C) \wedge \ldots \wedge s_p(C) \vdash G \to C$, on a :

$$\vdash_{(AX)} G \to C\,. \qquad \blacksquare$$

8.2 Dans la logique AD les règles admissibles sont dérivables

On considère dans la suite l'axiome suivant (correspondant à la règle (ad_1)).

$$((A \to B) \to C \vee D) \to ((A \to B) \to C) \vee ((A \to B) \to D) \vee ((A \to B) \to A) \quad \text{(AD)}$$

Il s'agit bien-sûr d'un schéma d'axiomes. Comme cet axiome est valide classiquement, cette logique n'est pas contradictoire.

On notera dans la suite "$\vdash_{AD}$" pour la relation de déduction dans la logique intuitionniste augmentée de l'axiome (AD), que l'on appelle logique AD.

Lemme 8.2.1 *Dans la logique AD, les formules suivantes sont démontrables.*

$$((A \to B) \to \bigvee_{i=1}^{n} C_i) \to (\bigvee_{i=1}^{n} (A \to B) \to C_i) \vee ((A \to B) \to A)$$

PREUVE : par récurence sur n. ■

Lemme 8.2.2 *Dans la logique AD toutes les règles $(ad_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies au paragraphe 7.1 sont dérivables.*

PREUVE : par récurence sur n. C'est évident pour $n = 1$. Supposons que la règle (ad_n) soit dérivable avec l'axiome (AD).

$$\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n} \to (\gamma \vee \delta) \vdash_{AD} \begin{cases} \bigvee_{j=1}^{n} (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n} \to \alpha_j) \\ \vee \\ (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n} \to \gamma) \\ \vee \\ (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n} \to \delta) \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &(\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}) \to (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n} \to (\gamma \vee \delta)) \\ &\qquad \vdash_{AD} (\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}) \to \begin{cases} \bigvee_{j=1}^{n} (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n} \to \alpha_j) \\ \vee \\ (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n} \to \gamma) \\ \vee \\ (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n} \to \delta) \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit (lemme précédent) que

$$\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n+1} \to (\gamma \vee \delta) \vdash_{AD} \begin{cases} \bigvee_{j=1}^{n+1} (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n+1} \to \alpha_j) \\ \vee \\ (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n+1} \to \gamma) \\ \vee \\ (\{\alpha_i \to \beta_i\}_{1 \le i \le n+1} \to \delta) \end{cases}$$

c'est à dire que (ad_{n+1}) est dérivable. ■

Proposition 8.2.3

(i) *Toutes les règles admissibles en logique intuitionniste sont dérivables dans la logique AD.*

(ii) *Toutes les règles admissibles dans la logique AD sont dérivables dans cette même logique.*

Preuve (i) : c'est une conséquence immédiate du lemme 8.2.2, puisque d'après la proposition 7.5.1, l'admissibilité en logique intuitionniste est entièrement capturée par les règles $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ plus la dérivation.

Preuve (ii) : soit une règle admissible dans la logique AD d'ensemble des prémisses Γ . On sait, d'après la proposition de complétude 5.5.3 et le corollaire 5.5.4, qu'il existe pour tout ensemble fini de formules Γ un ensemble de formules Γ^{ad} ayant mêmes conséquences admissibles et dérivables, et vérifiant $\Gamma \dashv\gg \Gamma^{ad}$.

D'après la proposition 7.5.1, l'admissibilité en logique intuitionniste est entièrement capturée par les règles $(ad_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On déduit donc du lemme 8.2.2 que dans la logique AD,

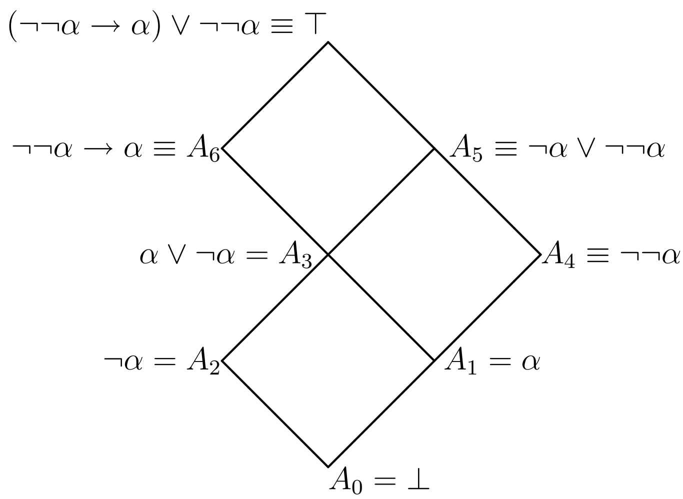
$$\Gamma \equiv_{AD} \Gamma^{ad} \,,$$

et d'après la proposition 8.1.1 Γ a mêmes conséquences admissibles et dérivables. ■

8.3 La logique AD n'est pas la logique classique

On va étudier les équivalences sur les formules à une variable.

Proposition 8.3.1 *L'ensemble des formules à une variable quotienté par l'équivalence dans la logique AD comporte* 8 *classes. Le treillis quotient pour la déduction est celui de la figure ci-dessous. En particulier, la logique AD n'est pas la logique classique.*



Preuve : tout d'abord, on déduit des résultats synthétisés à la figure 6, paragraphe 6.3, que $A_8 \equiv_{AD} A_5$ et $A_{10} \equiv_{AD} A_7$. Comme $A_{10} = A_8 \to A_5$, on a $\vdash_{AD} A_7$. Cela montre donc que toutes les formules de la logique AD sont équivalentes à l'une des 8 indiquées sur le schéma ci-dessus, et que le treillis à une variable est celui indiqué, ou un quotient de celui indiqué.

Il suffit maintenant de montrer que toutes les instances de l'axiome (AD) sur ce treillis sont triviales. En effet l'on peut toujours dériver une formule à une variable, uniquement à partir de formules à une variable (si ce n'est pas le cas, on peut substituer les autres variables par $\perp$).

Remarquons tout d'abord que toute instance de (AD) avec $B = \perp$ sur des formules à une variable est triviale, et ce déjà en logique intuitionniste. En effet si $\vdash A \to B$, l'instance est démontrable intuitionnistiquement. Hors ce cas, ne restent comme instances possibles pour A que $\alpha, \neg\alpha, \neg\neg\alpha$ donc $A \to B$ équivaut soit à α, soit à $\neg\alpha$. Dans les deux cas, soit les deux formules à une variables C et D sont conséquence de $A \to B$, soit l'une d'entre elle est conséquence de l'autre, et l'instance de (AD) obtenue dans chacun de ces deux cas est prouvable intuitionnistiquement.

Ceci prouve d'ailleurs que la logique AD ne s'axiomatise pas avec le schéma d'axiomes

$$[\neg A \to (C \vee D)] \to (\neg A \to C) \vee (\neg A \to D)\,.$$

On vérifie maintenant facilement qu'une instance de (AD) est prouvable dans l'un des cas suivants :

- l'une des formules $A, B, C, D, A \to B, C \vee D$ est équivalente à $\perp$ ou $\top$,
- la formule $(A \to B) \to A$ prouvable,
- la formule C est conséquence de la formule D, ou réciproquement,
- la formule C ou la formule D est conséquence de $A \to B$.

On élimine ainsi les instances telles que $A \to B \equiv \neg\alpha$. En effet dans ce cas,soit C ou D est conséquence de $\neg\alpha$, soit C est conséquence de D ou réciproquement.

On peut donc se restreindre à des instances de l'axiome telles que $A \to B \equiv \neg\neg\alpha$ et $A \in \{\neg\alpha, \alpha \vee \neg\alpha, \neg\neg\alpha \to \alpha\}$ (A n'est pas conséquence de $A \to B$), ou telles que $A \to B \equiv \neg\neg\alpha \to \alpha$ et $A \in \{\neg\neg\alpha, \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha\}$. Les instances de l'axiome où $A \in \{\alpha \vee \neg\alpha, \neg\neg\alpha \to \alpha\}$ sont conséquences de celles où $A = \neg\alpha$. Les instances de l'axiome où $A = \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$ sont conséquences de celles où $A = \neg\neg\alpha$.

On peut également se restreindre aux instances de C et de D égales à $\{\alpha, \neg\alpha\}$, $\{\neg\alpha, \neg\neg\alpha\}$ ou $\{\alpha \vee \neg\alpha, \neg\neg\alpha\}$ ($C \vee D$ n'est pas (AD)-prouvable, C n'est pas conséquence de D et vice versa). les instances de l'axiome dans le cas $\{C, D\} = \{\alpha \vee \neg\alpha, \neg\neg\alpha\}$, sont conséquences de celles dans le cas $\{C, D\} = \{\neg\alpha, \neg\neg\alpha\}$.

Il nous reste donc à étudier les cas suivants

(a) $A \to B \equiv \neg\neg\alpha$ et $A = \neg\alpha$, et $\{C, D\} = \{\alpha, \neg\alpha\}$;
(b) $A \to B \equiv \neg\neg\alpha \to \alpha$ et $A = \neg\neg\alpha$ et $\{C, D\} = \{\alpha, \neg\alpha\}$;
(c) $A \to B \equiv \neg\neg\alpha \to \alpha$ et $A = \neg\neg\alpha$ et $\{C, D\} = \{\neg\alpha, \neg\neg\alpha\}$.

Dans le cas (a) on obtient comme instance

$$(\neg\neg\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha) \vee (\neg\neg\alpha \to \neg\alpha)$$

qui équivaut à $(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$, donc est prouvable.

L'instance dans le cas (b) est une conséquence de celle dans le cas (c).

Dans le cas (c) on obtient comme instance

$$((\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha) \to ((\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha) \vee ((\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha)$$

qui équivaut à $((\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha \vee \neg\alpha) \to (\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha)$, c'est à dire $A_8 \to A_5$, donc est (AD)-prouvable. ■

Remarquons que l'on peut en déduire que cette logique n'a pas la propriété de disjonction puisque $\vdash_{AD} (\neg\neg\alpha \to \alpha) \vee \neg\neg\alpha$ mais $\nvdash_{AD} \neg\neg\alpha \to \alpha$ et $\nvdash_{AD} \neg\neg\alpha$.

Conclusion

Deux voies restent à explorer, qui ne sont pas abordées ici. D'une part l'extension de ces résultats à des théories plus fortes, logique du premier ordre, calcul propositionnel du second ordre,. . .On peut espérer étendre les caractérisations en terme de rétro-dérivation ou de substitution, mais bien-sûr pas les résultats de décidabilité.

D'autre part,se pose le problème d'une éventuelle interprétation fonctionnelle des règles admissibles. Une approche, si ce n'est systématique, du moins un peu uniforme de telles interprétations, est elle possible ?

Par ailleurs la méthode semble suffisamment générale pour pouvoir être mise en œuvre pour d'autre calculs propositionnels.

Références

[Be 65] Beth, *The foundations of Mathematics*, North Holland seconde édition (1965) (première édition 1959).

[Be Ma 1977] Bell Machover, *A course in Mathematical Logic*, North Holland (1977).

[Ci 77] A.I.Citkin, *On admissible rules of intuitionistic propositional logic*, Mat. Sbornik 102 no 2, (1977) ; English transl. in Mat. USSR Sbornik 102, no 2, pp. 279-287, (1977).

[Ci 78] A.I.Citkin, *On structurally complete superintuitionistic logics*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Tom 241 no 1 (1978) ; English transl. in Soviet Math. Dokl. Vol. 19, no 4, pp. 816-819(1978).

[vD 86] D.van Dalen, *Intuitionistic Logic*, Handbook of Philosophical logic III, édité par D.Gabbay et F.Guenthner, Editions D. Reidel, (1986).

[Du 77] M.Dummet, *Elements of intuitionism*, Oxford Logic Guides 2, Oxford University Press (1977).

[Dy 91] R.Dyckhoff, *Contraction-free sequent calculi for intuitionistic logic*, Research Report CS/91/5, Maths and Computational Science department,St Andrew University, (à paraître dans JSL), (1991).

[Fr 75] H.Friedman, *102 problems in mathematical logic*, J. Symb. Logic, 40, no 2, pp. 113-130 (1975).

[Fr 77] H.Friedman, *Classically and Intuitionistically provably recursive functions*, higher Set Theory, Springer Verlag, pp. 21-27 (1977).

[Gi 87] J.Y.Girard, *Proof Theory and Logical Complexity*, Bibliopolis (1987)

[Kr 63] S.A.Kripke, *Semantical considerations on modal and intuitionistic logic*, Acta Philosophica Fennica 16, pp. 83-94, (1963).

[Kr 65] S.A.Kripke, *Semantical analysis of intuitionistic logic*, J.Crossley et M.A.Dummet editeurs, Formal System and Recursive Functions, North-Holland, pp. 92-130, (1963).

[Mi 72] G.E.Mints, *Derivability of admissible rules*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 3285-89 (1972) ; English transl. in J. Soviet Math. 6, no 4 (1976).

[Ni 60] I.Nishimura, *On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus*, JSL 25,327-331, (1960).

[Ro 91] P.Rozière, *Règles admissibles en calcul propositionnel intuitionniste*, preprint de l'équipe de Logique no 25, Université Paris VII, (Mai 91).

[Ro 9 ?] P.Rozière, *Admissible and derivable rules in Intuitionistic Logic* à paraître dans MSCS (accepté en 91).

[Ry 84] V.V.Rybakov, *A criterion for admissibility of rules in the modal system S4 and the intuitionistic logic*, Algebra i Logika 23 (1984) ; English transl. in Algebra and logic 23 no 5, pp.369-384 (1984).

[Ry 85] V.V.Rybakov, *Bases of admissible rules of the logics S4 and Int*, Algebra i Logika 24 (1985) ; English transl. in Algebra and logic 24 no 1, pp.55-68 (1985).

[Ry 86] V.V.Rybakov, *Decidability of admissibility in the modal system Grz and in intuitionistic logic*, Izv. Akad. Nauf. SSSR, ser. Mat. 50 (1986) ; English transl. in Math. USSR Izvestia, Vol. 28, no 3 (1987).

[St 79] R.Statman, *Intuitionistic Propositional Logic is polynomial-space complete* ; Theoritical Computer Science 9, 67-72, (1979).

[Tr 73] A.S.Troelsta, *Metamathical Investigation of Intutionistic Arithmetic and Analysis*, Lecture Notes in Mathematics 344, Springer-Verlag (1973).

[Tr vD 88] A.S.Troelsta, D.van Dalen, *Constructivism in Mathematics, an introduction*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol. 121, North-holland (1988).