Chapitre 1

Théories du second ordre

Paul Rozière — Notes de cours pour le M2 LMFI (*version provisoire : 15 mars 2012 à 18:41*)

Introduction

Une théorie logique du premier ordre n'autorise les quantifications que sur les individus de son domaine d'interprétation. Une théorie du second ordre autorise également les quantifications sur les ensembles d'individus, de couples et plus généralement de n-uplets de ce domaine. De façon équivalente on peut dire que les quantificateurs peuvent porter sur les propriétés et les relations de la théorie [1].

Par exemple les axiomes d'ordre total, ou de groupe sont tous du premier ordre, mais ce n'est pas le cas de ceux de bon ordre — tout sous-ensemble non vide possède un plus petit élément —, de groupe simple — tout sous-groupe distingué est trivial —, de la propriété de la borne supérieure — tout sous-ensemble non vide majoré de réels possède une borne supérieure. Ces derniers axiomes sont du second ordre. En fait, en mathématiques les théories sont en général implicitement des théories du second ordre.

La question est maintenant de savoir ce que sont réellement les théories du second ordre et comment les formaliser. On parle en fait de théorie logique du second ordre en deux sens différents, bien que non sans rapport. En un premier sens l'axiomatisation des ensembles reste implicite, c'est-à-dire que la théorie dépend en fait d'un théorie naïve des ensembles : le domaine des variables d'ensemble est celui de « tous » les sous-ensembles du domaine d'interprétation des objets. Mais ce que signifie ce « tous » n'est pas directement axiomatisé. La théorie des ensembles s'axiomatise, elle, au premier ordre, mais alors la notion de théorie du second ordre est relative à un univers de la théorie des ensembles. Il n'y a pas moyen de vraiment formaliser la théorie logique sous-jacente de façon satisfaisante, au sens où il n'existe pas d'axiomatisation, qui à la fois conserverait une notion de démonstration formelle vérifiable récursivement, et serait complète pour la sémantique attendue. [2]

1. On pourrait ajouter des quantifications sur les fonctions, mais on ne le fera pas dans la suite, si ce n'est par l'intermédiaire de leur représentation par des relations.

2. Ceci est précisé à la section 1.5.2.

On adopte donc ici un autre point de vue. La logique du second ordre est axiomatisée. On conserve un théorème de complétude, mais pour une sémantique qui est, à première vue, moins naturelle que celle attendue. On ajoute explicitement des axiomes (ou règles) pour les ensembles d'objets. En un sens qui va être précisé, la logique du second ordre est la logique du premier ordre à laquelle on ajoute ces axiomes. Une théorie du second ordre est une théorie qui ajoute aux axiomes propres à la théorie et aux règles ou axiomes de la logique du premier ordre, des règles ou axiomes propres à la logique du second ordre. Ces derniers traitent donc des ensembles d'objets de base (ou de couples de ces objets, etc.). En ce sens une théorie du second ordre est finalement une théorie des ensembles faible. À la différence des théories des ensembles comme celles de Zermelo ou de Zermelo-Fraenkel, les objets de la théorie ne sont pas que des ensembles. On distingue plusieurs *sortes* : les objets de base, les ensembles d'objets, de couples d'objets, etc. Il y a essentiellement deux niveaux, celui des objets de base, ou individus, (premier ordre) et celui des ensembles d'objets ou de n-uplets de ces objets de base (second ordre). Il serait possible de continuer dans la hiérarchie des ordres : par exemple les ensembles d'ensembles d'objets de base seraient du troisième ordre.

Les ensembles introduits de cette façon ne sont pas susceptibles d'être eux-mêmes éléments d'ensembles, ce qui permet d'éviter le paradoxe de Russell. Le schéma de compréhension prend une forme très simple, en particulier toute propriété, sur les objets de la théorie, exprimée dans le langage de la théorie, définit un ensemble d'individus. On peut donc tout aussi bien parler de sorte des ensembles ou des prédicats unaires, d'ensembles de couples ou de relations binaires, etc.

La logique du second ordre, quaund elle est abordée du point de vue de la déduction, a des règles qui paraissent très naturelles, et qui correspondent à l'usage de la logique du second ordre en mathématiques. Aussi est-ce de ce point de vue qu'elle est introduite dans la suite. Les théories du second ordre sont alors celles qui utilisent ces règles de déduction. On montre ensuite qu'elle peut aussi être vue comme une théorie axiomatique du premier ordre particulière, une théorie des objets et ensembles d'objets. Les théories du second ordre sont alors des extensions de celle-ci. Les modèles des théories du second ordre sont les modèles de ces théories vues comme théories du premier ordre.

1.1 Langage du second ordre

Pour simplifier, on va, au moins dans un premier temps, ne s'intéresser qu'aux langages du second ordre dont la signature est identique à celle d'un langage du premier ordre : symboles de constante, de fonction et de relation. On ajoute à l'ensemble usuel des variables usuelles d'individus, dites variables du premier ordre, de nouvelles variables, dites du second ordre, soit pour chaque entier naturel n un ensemble dénombrable de variables de relation n-aires. Les constantes de relations peuvent être vues comme des constantes du second ordre.

- Les variables du premier ordre seront notées avec des lettre minuscules x, y, z,...
- Les variables du second ordre seront notées avec des lettre majuscules X, Y, Z,...

Si c'est utile on note en exposant l'arité de la variable : X^1 pour une variable de prédicat (à un argument), que l'on peut voir aussi comme une variable d'ensemble d'individus, X^2 pour une variable de relation binaire, que l'on peut voir aussi comme une variable de couples d'individus, etc.

On suppose donnée une signature $\mathcal{S}$, c'est-à-dire un ensemble de symboles de constante, de fonction, et de relation.

- La définition des termes du langage reste inchangée vis-à-vis de celle des langages du premier ordre.
- Les formules atomiques comprennent :
  - les formules atomiques de la logique du premier ordre sur la signature $\mathcal{S}$, soit $Rt_1 \dots t_n$ pour R un symbole de relation de $\mathcal{S}$ d'arité n, et $t_1,\dots,t_n$ sont des termes sur la signature $\mathcal{S}$.
  - les $X^n t_1 \dots t_n$ où X^n est une variable du second ordre d'arité n, $t_1,\dots,t_n$ sont des termes sur la signature $\mathcal{S}$.

On ne suppose a priori pas $n \neq 0$. Il serait possible de restreindre les arités des variables du second ordre, par exemple aux variables unaires. D'une certaines façon, les symboles de constantes correspondants à ces nouvelles relations sont les symboles de relation de la signature qui ont même arité.

- L'ensemble des formules du langage est défini inductivement :
  - les formules atomiques sont des formules ;
  - si F et G sont des formules $(F \to G)$ est une formule ;
  - si F est une formule et x une variable du premier ordre $\forall x\, F$ est une formule ;
  - si F est une formule et X une variable du second ordre $\forall X\, F$ est une formule.

On écrira dans la suite $A_1, A_2 \to B$ pour $A_1 \to (A_2 \to B)$, $A_1, A_2, A_3 \to B$ pour $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to B))$ etc.

Par exemple l'axiome de récurrence de l'arithmétique, dans un langage avec 0 comme symbole de constante, s (successeur) comme symbole de fonction unaire, s'écrit naturellement au second ordre :

$$\forall X\ \left[X\,0, \forall y(X\,y \to X\,s\,y) \to \forall x X\,x\right],$$

ce qui signifie qu'une propriété des entiers (le domaine d'interprétation attendu) vraie pour 0 et qui passe au successeur est vraie pour tout entier. La récurrence s'exprime bien au premier ordre, mais par un *schéma d'axiomes* : un axiome par propriété qui s'exprime au premier ordre. De plus l'axiome du second ordre n'est pas une simple reformulation de ce schéma d'axiomes, car alors que ce dernier ne vaut que pour des formules du premier ordre, l'axiome du second ordre vaut plus généralement pour toutes les formules du second ordre, et on montre que celles-ci permettent de définir plus de propriétés des entiers — plus de sous-ensembles des entiers —, que les formules du premier ordre.

On a préféré noter les variables du second ordre comme des prédicats : $X\,x$ plutôt que $x \in X$. Mais il n'y a pas vraiment de différence en logique du second ordre, puisque tout prédicat sur les individus définit un ensemble.

Les règles d'utilisation des quantificateurs doivent correspondre à cette interprétation intuitive. Dans le cas de la récurrence, on veut pouvoir « remplacer » X par n'importe quel prédicat écrit dans le langage : c'est la règle d'élimination du quantificateur du second ordre, que l'on voit dans le chapitre suivant.

1.2 Déduction naturelle

Du point de vue de la déduction, les règles de la logique du second ordre généralisent d'une façon qui apparaît très intuitive celles de la logique du premier ordre.

Les règles présentées ici sont celles de la déduction naturelle. Celle-ci utilise des séquents $\Gamma \vdash C$, où C est une formule et le contexte Γ est un ensemble fini de formules indexées par des entiers, l'indexation restant le plus souvent implicite. C'est-à-dire que les contextes peuvent être vus comme des multi-ensembles, un contexte peut contenir deux copies de la même formule si celles-ci ont des indices différents, deux formules ne sont identiques que si elles ont le même indice. Si Γ et Δ sont deux contextes Γ, Δ désigne la réunion de Γ et Δ.

La logique du second ordre étend la logique du premier ordre dont on donne les règles de démonstration pour $\forall, \rightarrow, \perp$ (on a ajouté la constante $\perp$ pour la proposition absurde, ce qui n'est pas nécessaire au second ordre car cette constante se définit, comme on le verra rapidement).

1.2.1 Logique du premier ordre

Axiomes logiques

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{ax.}$$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\ \to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[y/x]}{\Gamma \vdash \forall x A}\ \forall_i\ (*) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[t/x]}\ \forall_e$$

(*) La règle $\forall_i$ ne vaut que si y n'a pas d'occurrences libres dans Γ, A.

Élimination de l'absurde — Loi de Peirce

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}\ \perp_e \qquad \frac{}{\Gamma \vdash ((A \to B) \to A) \to A}$$

On suppose que la substitution $t \mapsto A[t/x]$ a été définie de façon à éviter les captures de variable (les variables liées sont renommées).

Les règles structurelles, contraction et affaiblissement, que l'on trouve parfois parmi les règles de déduction naturelle, sont gérées ici implicitement ; l'affaiblissement n'apparaît qu'au niveau des axiomes ; la contraction est systématique pour les formules de même index, il suffit donc d'indexer en prévision des formules qui seront contractées.

Le calcul des prédicats de la *logique minimale* (ici le fragment $\forall, \to$) est défini par les axiomes logiques et les règles d'introduction et d'élimination de $\forall$ et $\to$. On obtient le calcul des prédicats intuitionniste en ajoutant la règle d'élimination de l'absurde, et le calcul des prédicats classique en ajoutant la loi de Peirce.

La négation se définit en logique intuitionniste à partir de $\to$ et $\perp$: par définition $\neg A$ est $A \to \perp$. Mais ce n'est pas le cas de la disjonction ni de la conjonction, il faut la logique classique. Le quantificateur existentiel ne se définit pas non plus à partir de $\forall, \to, \perp$ en calcul des prédicats intuitionniste.

1.2.2 Logique du second ordre

En calcul des prédicats du second ordre, les règles précédentes sont étendues à toutes les formules du second ordre. La règle d'introduction du quantificateur universel du second ordre est identique à la règle du premier ordre. C'est la règle d'élimination qui est essentielle. On a besoin de définir la substitution d'une formule, considérée comme un prédicat dépendant de n variables $x_1, \ldots, x_n$ (F peut contenir d'autres variables libres que $x_1, \ldots, x_n$ qui sont alors des paramètres), à une variable de prédicat n-aire, dans une formule du second ordre A. La formule substituée est notée $A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$. Il peut être nécessaire de renommer les variables liées de A de façon à éviter la capture des variables libres de F, du premier comme du second ordre : X ne doit pas apparaître dans le champ d'un quantificateur liant une variable qui apparaît libre dans F. La substitution est définie inductivement :

- si A est une formule atomique qui n'a pas X comme symbole de relation, $A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$ est A ;
- $Xt_1 \ldots t_n[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$ est $Ft_1 \ldots t_n$;
- $(B \to C)[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$ est $\big(B[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X] \to C[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]\big)$;
- $\{\forall x\, A\}[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$ est $\forall x\, A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$ pour x qui n'apparaît pas dans F ;
- $\{\forall Y\, A\}[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$ est $\forall Y\, A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$
  où Y est une variable du second ordre distincte de X qui n'apparaît pas dans F ;
- $\{\forall X\, A\}[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$ est $\forall X\, A$.

On ajoute alors aux règles de la logique du premier ordre énoncées ci-dessus (généralisées à toutes les formules du second ordre) les deux règles suivantes :

Quantification universelle du second ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A[Y/X]}{\Gamma \vdash \forall X\, A}\ \forall_i\ (*) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall X^n\, A}{\Gamma \vdash A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X^n]}\ \forall_e$$

(*) La règle $\forall_i$ ne vaut que si y n'a pas d'occurrences libres dans Γ, A.

Soit T une théorie du second ordre, c'est-à-dire un ensemble de formules closes du second ordre. On note $\Gamma \vdash_T F$ pour « la formule F est conséquence de l'ensemble fini de formules Γ dans la théorie T ». On définit inductivement $\Gamma \vdash_T F$: $\Gamma \vdash_T F$ si F est un axiome de la théorie, ou si $\Gamma \vdash F$ est conclusion d'une instance l'une des règles énoncées ci-dessus, telle que ses prémisses (s'il en existe) $\Delta \vdash G$ vérifient que G est conséquence de Δ dans la théorie T.

Quand la théorie T est vide on note $\Gamma \vdash F$ « la formule F est conséquence de l'ensemble fini de formules Γ » qui signifie dont que le séquent (noté de la même façon) $\Gamma \vdash F$ peut s'obtenir par les seules règles de la logique du second ordre.

On vérifie immédiatement que l'absurdité se définit en logique du second ordre : on n'a pas besoin d'ajouter $\perp$ aux symboles primitifs, on pose que

$$\boxed{\begin{array}{lll} \perp & \equiv_d & \forall X\, X \\ \neg F & \equiv_d & F \to \perp\,. \end{array}}$$

La formule $\forall X\, X$ signifie intuitivement que « tout est vrai »). La règle d'élimination de l'absurde de la section 1.2.1 — sous forme d'axiome $\perp \to F$ pour toute formule F — se déduit immédiatement par élimination du quantificateur universel du second ordre. La négation est alors définie comme au paragraphe précédent.

Comme en logique du premier ordre, on a la stabilité par substitution de formules équivalentes.

Proposition 1.2.1 (substitution) *Soit deux formules F et G, n variables $x_1, \ldots, x_n$ (F et G peuvent très bien avoir d'autres variables libres que $x_1, \ldots, x_n$). Alors pour toute formule A, et toute variable X du second ordre d'arité n :*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (F \to G), \forall x_1 \ldots \forall x_n (G \to F) \vdash A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X] \to A[G\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X]$$

et

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (F \to G), \forall x_1 \ldots \forall x_n (G \to F) \vdash A[G\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X] \to A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X].$$

Si on avait ajouté la conjonction au langage (et donc l'équivalence) on pourrait écrire plus simplement, de façon équivalente :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (F \leftrightarrow G) \vdash A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X] \leftrightarrow A[G\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/X].$$

Démonstration. La démonstration se fait par induction sur la structure de A, pour l'équivalence (les deux implications simultanément).

Formules atomiques : la conclusion est une tautologie quand le symbole de relation n'est pas X. Elle se déduit de la prémisse quand c'est $Xt_1 \ldots t_n$.

Implication : par hypothèse d'induction.

Quantificateur universel (premier et second ordre) : Si la variable quantifiée est X les formules à démontrer sont des tautologies.

Si la variable quantifiée n'est pas X (on rappele que la variable liée en jeu ne peut apparaître dans F par définition de la susbtitution), les formules se démontrent par hypothèse d'induction, en utilisant les règles d'introduction et d'élimination de l'implication et du quantificateur universel. Remarque utile pour la suite (dans le cas du second ordre) : la règle d'élimination du quantificateur est utilisée en instanciant par une variable. ∎

1.3 Les modèles pleins

L'interprétation d'une formule d'un langage du second ordre de signature $\mathcal{S}$ dans une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ (la définition est la même qu'au premier ordre) est définie inductivement, en généralisant la définition au premier ordre, il suffit de préciser les domaines de variations des nouvelles variables. Si $|\mathcal{M}| = M$ est l'ensemble de base de $\mathcal{M}$, les variables n-aires varient sur $\mathcal{P}(M^n)$ (dans le cas des variables d'arité 0, qui sont les variables de proposition, M^0 possède pour seul élément $\emptyset$). Le modèle est dit *plein* par référence à ces domaines de variation qui recouvrent celui de *toutes* les interprétations de relation possibles. On verra en section 1.5 une notion plus générale de modèle.

Un environnement du second ordre pour la structure $\mathcal{M}$ est donc une suite finie de couples formés d'une variable x du premier ordre et d'un élément a de M, noté $x := a$, et de couples formés d'une variable X du second ordre et d'un sous-ensemble E de M^n, où n est l'arité de X, noté $x := E$ (quand $n = 0$, X ne peut être interprété que par $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$, ce qui revient bien à deux valeurs de vérité). Un environnement est noté entre crochets.

L'interprétation d'un terme t dans $\mathcal{M}$ et dans un environnement $[\varepsilon]$ est un élément de M noté $t^{\mathcal{M}}[\varepsilon]$ et se définit inductivement comme au premier ordre.

On définit inductivement que la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ satisfait la formule F du langage du second ordre de signature $\mathcal{S}$, dans l'environnement $[x_1 := a_1, \ldots, x_p := a_p, X_1 := E_1, \ldots, X_q := E_q]$ quand F n'a pas d'autres variables libres que $x_1, \ldots, x_p$ et $X_1, \ldots, X_q$. Dans la suite, pour abréger on note $[\varepsilon]$ l'environnement $[x_1 := a_1, \ldots, x_p := a_n, X_1 := E_1, \ldots, X_q := E_q]$, la relation de satisfaction est alors notée $\mathcal{M} \models F\ [\varepsilon]$.

- Si F est une formule atomique dont le symbole de relation est une constante de relation R de $\mathcal{S}$ d'arité n (F est $Rt_1 \ldots t_n$) alors :
$$\mathcal{M} \models Rt_1 \ldots t_n\ [\varepsilon] \quad \text{si et seulement si} \quad (t_1^{\mathcal{M}}[\varepsilon], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\varepsilon]) \in R^{\mathcal{M}}\ ;$$
- si F est une formule atomique, dont le symbole de relation est une variable du second ordre X_i d'arité n (nécessairement dans l'environnement) alors :
$$\mathcal{M} \models X_i t_1 \ldots t_n\ [\varepsilon] \quad \text{si et seulement si} \quad (t_1^{\mathcal{M}}[\varepsilon], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\varepsilon]) \in E_i\ ;$$
- si F est $(A \to B)$, alors
$$\mathcal{M} \models (A \to B)\ [\varepsilon] \quad \text{si et seulement si} \quad \mathcal{M} \models A\ [\varepsilon]\ \Rightarrow\ \mathcal{M} \models B\ [\varepsilon]\ ;$$
- si F est $\forall x\, A$, alors
$$\mathcal{M} \models \forall x\, A\ [\varepsilon] \quad \text{si et seulement si} \quad \text{pour tout } a \in M,\ \mathcal{M} \models A\ [\varepsilon, x := a]\ ;$$
- si F est $\forall X\, A$, X d'arité n, alors
$$\mathcal{M} \models \forall X\, A\ [\varepsilon] \quad \text{si et seulement si} \quad \text{pour tout } E \in \mathcal{P}(M^n),\ \ \mathcal{M} \models A\ [\varepsilon, X := E]\ ;$$

La validité dans les modèles pleins est conservée par la déduction : la démonstration est essentiellement la même qu'au premier ordre, la seule vraie nouveauté étant la règle d'élimination du quantificateur universel du second ordre, pour laquelle on démontre le lemme suivant.

Lemme 1.3.1 *Soit A une formule du second ordre, et $[\varepsilon]$ un environnement qui affecte toutes les variables libres de A sauf X, variable du second ordre d'arité n. Soit F une formule et $x_1, \ldots, x_n$ des variables libres. Alors :*

$$\mathcal{M} \models A[F\langle x_1, \ldots x_n\rangle/X]\ [\varepsilon] \text{ si et seulement si } \mathcal{M} \models A[\varepsilon, X := E]$$

où $E = \big\{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \ / \ \mathcal{M} \models F[a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n]\ [\varepsilon]\big\}$.

Démonstration. La démonstration se fait par induction sur A. Le résultat vient par définition de E pour une formule atomique commençant par X, par définition de $\mathcal{M}$ ou de $[\varepsilon]$ pour les autres formules atomiques. Il se déduit directement de l'hypothèse d'induction pour l'implication.

Si $A = \forall x\, B$. La substitution est définie de façon que x n'apparaît pas dans F et le résultat se déduit alors de l'hypothèse d'induction. De même pour la quantification du second ordre. ∎

Proposition 1.3.2 (propriété de correction pour les modèles pleins) *Soit une théorie T du second ordre pour la signature $\mathcal{S}$, soit $\mathcal{M}$ un modèle plein de T. Alors :*

$$\vdash_T F \Rightarrow \mathcal{M} \models F\ .$$

Démonstration. On démontre par induction sur la complexité d'une preuve de $\Gamma \vdash_T F$, que pour tout environnement $[\varepsilon]$ qui affecte toutes les variables libres de Γ et F :

$$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma\ [\varepsilon] \Rightarrow \mathcal{M} \models F\ [\varepsilon]\ .$$

Dans le cas de la règle d'élimination du quantificateur universel, on utilise le lemme 1.3.1. ∎

Un modèle du premier ordre définit un modèle plein de la logique du second ordre. Étant donné une théorie du premier ordre, et un modèle (du premier ordre) de celle-ci $\mathcal{M}$, la théorie constituée des mêmes axiomes, mais relativement à la logique du second ordre, a pour modèle le modèle plein associé à $\mathcal{M}$. Ainsi, pour une théorie dont les axiomes sont tous du premier ordre, on déduit (par correction) la cohérence de la théorie du second ordre de celle de la théorie du premier ordre constituée des mêmes axiomes. Cependant ce théorème, qui est arithmétique, utilise la théorie des ensembles, et d'après le second théorème d'incomplétude de Gödel, il ne peut se démontrer dans l'arithmétique du second ordre (voir exercice 7).

On peut appuyer l'intuition sur l'interprétation dans les modèles pleins, mais on verra un peu plus loin en section 1.5 qu'il n'y a pas de théorème de complétude pour cette classe de modèles. Il est donc bien nécessaire, de s'appuyer sur l'axiomatisation de la logique du second ordre que donnent les règles de la déduction naturelle du second ordre, en particulier l'élimination du quantificateur du second ordre.

1.4 Quelques définitions au second ordre

Dans un modèle plein un énoncé $\forall X^1 P(X^1)$ est interprété par l'intersection de tous les sous-ensembles du modèle ayant la propriété P. Ceci permet de définir l'égalité, et des structures inductives comme celles des entiers. Il s'avère que ceci n'utilise que les règles de la logique du second ordre (même s'il n'y a pas complétude pour les modèles pleins). En utilisant le même genre d'arguments, on trouve des définitions intuitionnistes des autres connecteurs (conjonction, disjonction), et de la quantification existentielle, alors que ce n'est pas possible au premier ordre.

1.4.1 Égalité

Supposons que le langage contienne un symbole de constante 0. Il est possible de définir le singleton $\{0\}$ comme étant l'intersection de tous les ensembles ayant 0 pour élément. Appelons $I_0\, y$ le prédicat :

$$\forall X(X\, 0 \to X\, y) \ .$$

On a évidemment que $I_0\, 0$, et par définition toute propriété vraie en 0 est vraie pour y tel que $I_0\, y$ et ceci se démontre (sans faire référence aux modèles pleins).

Tout ceci reste correct si on remplace 0 par une variable, et on obtient alors une définition de l'égalité au second ordre :

$$\boxed{x = y \quad \equiv_d \quad \forall X(X\, x \to X\, y)}$$

qui est la définition de Leibniz de l'égalité : deux objets sont égaux s'ils ont les mêmes propriétés. La réflexivité est immédiate. Il suffit de l'implication, la définition est bien symétrique, intuitivement car elle passe également pour la négation de n'importe quelle propriété, ce qui donne la réciproque par contraposée. Plus formellement et en restant intuitionniste, par élimination du quantificateur universel, en prenant, pour X une variable arbitraire de prédicat, la propriété $X\, z \to X\, x$ comme dépendant de z :

$$\begin{array}{ll} & \forall X(X\, x \to X\, y) \ \vdash \ (X\, x \to X\, x) \to (X\, y \to X\, x) \\ \text{donc} & \\ & \forall X(X\, x \to X\, y) \ \vdash \ \forall X(X\, y \to X\, x) \ . \end{array}$$

La transitivité se démontre également sans difficultés. La définition même de l'égalité au second ordre donne la propriété fondamentale de l'égalité, qui et que pour toute propriété P, ici définie par une formule du second ordre $P\, x$:

$$\text{si} \quad x = y, \quad \text{alors} \quad P\, x \to P\, y$$

1.4.2 Ensembles finis

On généralise sans peine ce qui précède à des ensembles finis. Par exemple supposons que le langage ait pour symboles de constante 0 et 1. Le prédicat $x = 0 \vee x = 1$, l'ensemble

$\{0,1\}$, est défini par :
$$\forall X(X\,0, X\,1 \to X\,x)\ .$$
De la même façon, le prédicat $y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3$ est défini par :
$$\forall X(X\,x_1, X\,x_2, X\,x_3 \to X\,y)\ .$$
Il est simple vérifier que ces prédicats ont les propriétés attendues.

1.4.3 Les entiers

On suppose que le langage a 0 pour symbole de constante et s comme symbole de fonction unaire. Les deux premiers axiomes de Peano assurent que l'ensemble des individus est infini :
$$\forall x\ \neg s\,x = 0\ ;\quad \forall x \forall y\,(s\,x = s\,y \to x = y)\,. \tag{∞}$$
En logique du second ordre l'« ensemble » X a 0 pour élément s'écrit X 0, et X est clos par successeur s'écrit $\forall y(X\,y \to X\,s\,y)$. Au lieu d'ajouter un axiome de récurrence on peut définir les entiers dans la théorie (∞) (ou une extension) par :
$$\mathrm{int}\,x \equiv_d \forall X\left[X\,0, \forall y(X\,y \to X\,s\,y) \to X\,x\right]\ .$$
On vérifie facilement que
$$\vdash \mathrm{int}\ 0\ ;\quad \vdash \forall y(\mathrm{int}\ y \to \mathrm{int}\ s\,y)\ ;$$
et la propriété de récurrence sur les entiers :
$$\vdash \forall X\left[X\,0, \forall y(\mathrm{int}\ y, X\,y \to X\,s\,y) \to \forall x(\mathrm{int}\ x \to X\,x)\right]\ .$$
Les deux axiomes de l'infini ne sont pas utiles pour ces résultats, mais ils sont nécessaires pour la propriété de définition d'une fonction par récurrence, qui s'énonce et se démontre au second ordre (voir exercice 8). Dans la théorie (∞) on peut donc montrer que les axiomes de Peano du premier ordre relativisés au prédicat int, sont vérifiés. En fait la propriété de récurrence du second ordre est bien plus forte que le schéma d'axiomes de récurrence du premier ordre : au second ordre, on a la récurrence pour toutes les propriétés qui s'énoncent *au second ordre*.

1.4.4 Connecteurs

Sur le même principe, mais pour X une variable d'arité 0, on obtient :

Définitions intuitionnistes de $\wedge$ et $\vee$		
$A \wedge B$	$\equiv$	$\forall X\big((A, B \to X) \to X\big)$
$A \vee B$	$\equiv$	$\forall X\big((A \to X), (B \to X) \to X\big)$

On vérifie facilement les règles d'introduction et d'élimination de ces connecteurs, sans utiliser le raisonnement par l'absurde. On remarque que la définition au second ordre formalise d'une certaine façon la règle d'élimination du quantificateur correspondant.

Les équivalences habituelles demandent le raisonnement par l'absurde, mais n'utilisent pas la logique du second ordre. Les formules qui suivent ont la même structure implicative, que celles-ci ci-dessus.

$$\begin{array}{lcll} A \wedge B & \equiv & \big((A, B \to \forall X\, X) \to \forall X\, X\big) & (\ \neg(A \to \neg B)\ ) \\ A \vee B & \equiv & \big((A \to \forall X\, X), (B \to \forall X\, X) \to \forall X\, X\big) & (\ \neg A \to \neg\neg B\ ) \end{array}$$

On utilise maintenant $(A \leftrightarrow B)$ pour $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

1.4.5 Quantificateurs existentiels

Suivant les mêmes principes, la quantification existentielle $\exists x\, F$ se définit comme « le plus petit énoncé » conséquence de $A\, x$ pour n'importe quel x. Les quantifications existentielles du premier et du second ordre se définissent suivant le même schéma.

$$\begin{array}{lcl} \exists x\, A & \equiv & \forall Y\, \big(\forall x(A \to Y) \to Y\big) \\ \exists X\, A & \equiv & \forall Y\, \big(\forall X(A \to Y) \to Y\big) \end{array}$$

À remarquer que l'équivalence classique $\exists x\, A \equiv \neg\forall x \neg A$ s'écrit :

$$\exists x\, A \quad \equiv \quad \big(\forall x(A \to \forall Y\, Y) \to \forall Y\, Y\big)$$

Là encore les règles de déduction naturelle du quantificateur existentiel du premier ordre se vérifient facilement. Au second ordre, les règles suivent le même schéma :

Quantification existentielle du second ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / X^n]}{\Gamma \vdash \exists X^n A}\ \exists_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists X A \quad \Gamma', A[Y/X] \vdash C}{\Gamma, \Gamma' \vdash C}\ \exists_e\ (**)$$

(*) La règle $\exists_e$ ne vaut que si y n'a pas d'occurrences libres dans Γ, A.

Dérivons la règle d'introduction à partir de la définition intuitionniste du quantificateur existentiel : supposons $\Gamma \vdash A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / X^n]$.

De $\forall X^n(A \to Y)$, où Y vérifie $(**)$, on déduit ($\forall_e$ au second ordre) $A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / X^n] \to Y$, donc de Γ et $\forall X^n(A \to Y)$ on déduit Y, soit $\Gamma \vdash \exists X^n A$ ($\forall_i$ au second ordre).
C'est encore plus simple pour la règle d'élimination.

Pour réduire les codages, on introduit également un quantificateur existentiel n-aire pour chaque entier $n > 0$, qui peut être défini intuitionnistiquement :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \exists x\,\{A_1, \ldots, A_n\} & \equiv_d & \forall Y\,\big(\forall x(A_1, \ldots, A_n \to Y) \to Y\big) \\ \exists X\,\{A_1, \ldots, A_n\} & \equiv_d & \forall Y\,\big(\forall X(A_1, \ldots, A_n \to Y) \to Y\big) \end{array}}$$

ou classiquement :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \exists x\,\{A_1, \ldots, A_n\} & \equiv_d & \forall x(A_1, \ldots, A_n \to \bot) \to \bot \\ \exists X\,\{A_1, \ldots, A_n\} & \equiv_d & \forall X(A_1, \ldots, A_n \to \bot) \to \bot \end{array}}$$

1.5 Modèles du second ordre : cas général

1.5.1 Le schéma de compréhension

En logique du second ordre, le schéma de compréhension prend la forme suivante : pour toute formule F qui n'a pas d'autres variables libres que $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p, Y_1, \ldots, Y_q$

$$\forall y_1, \ldots, y_p \, \forall Y_1, \ldots, Y_q \, \exists X^n \, \forall x_1, \ldots, x_n \, (X^n x_1 \ldots x_n \leftrightarrow F) \tag{SC}$$

Pour le démontrer, il suffit de partir de :

$$\vdash \forall x_1, \ldots, x_n \, (F \leftrightarrow F)$$

et l'introduction du quantificateur existentiel démontrée à la section précédente avec la règle d'élimination du quantificateur universel, donne le résultat.

En fait on a équivalence entre schéma de compréhension et règle d'élimination du quantificateur universel au sens suivant :

Proposition 1.5.1 *Relativement aux règles de la logique du second ordre, où la règle d'élimination des quantificateurs du second ordre a été restreinte aux seules variables du second ordre de même arité que la variable quantifiée :*

$$\frac{\Gamma \vdash \forall X^n \, A}{\Gamma \vdash A[Y^n/X^n]} \; \forall_e \textit{(forme faible)}$$

le schéma de compréhension (SC) *est équivalent à la règle d'élimination du quantificateur universel dans toute sa généralité.*

Démonstration. On a déjà démontré le schéma de compréhension en utilisant la règle d'élimination du quantificateur universel. La réciproque n'est guère plus difficile, mais nécessite une induction sur la structure de A, à travers la proposition 1.2.1. Bien qu'énoncée dans le cadre général, celle reste valide si on ne dispose que de la règle faible d'élimination du quantificateur du second ordre (comme remarqué dans la démonstration).

Soit A une formule du second ordre, et X une variable d'arité n. Soit F une formule n'ayant pas d'autres variables libres que $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. On déduit alors de la proposition 1.2.1 que

$$\forall x_1, \ldots, x_n (X x_1 \ldots x_n \leftrightarrow F) \vdash A \leftrightarrow A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / X^n]$$

On déduit donc $A[F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / X^n]$ de $\forall X A$, en utilisant (SC) pour la formule F, et la règle d'élimination faible du quantificateur universel du second ordre. C'est la règle d'élimination forte. ■

1.5.2 La théorie du second ordre des modèles pleins n'est pas axiomatisable

On suppose que le langage contient un symbole de constante 0 et un symbole de fonction unaire s. Au second ordre, la récurrence s'exprime par l'axiome :

$$\forall x \forall X (X0, \forall y (Xy \to Xsy) \to Xx) \ . \tag{rec}$$

Un modèle plein de cet axiome n'a pas d'autres éléments que les éléments standards interprétations des numéraux $s^n 0$, puisqu'un élément non standard c contredirait l'axiome de récurrence, en prenant pour X le prédicat « être un entier standard ». Il n'y a donc pas de théorème de compacité — tout sous-ensemble fini d'axiomes du système d'axiomes (rec) + $(c \neq s^n 0)_{n \in \mathbb{N}}$ est cohérent mais celui-ci n'a pas de modèle plein.

Si on étend le langage à $+$, $\times$ et que l'on prend tous les axiomes de Peano, avec le schéma de récurrence remplacé par l'axiome (rec) on obtient une théorie du second ordre PA_2 finiment axiomatisable. L'ensemble des énoncés du premier ordre qui sont conséquences des axiomes de Peano, pour le système d'axiomes et de règles de la logique du second ordre, est récursivement énumérable (on a une notion de preuve qui reste vérifiable récursivement). D'après le premier théorème d'incomplétude de Gödel, il existe une formule du premier ordre Π^0_1, soit G, qui est vraie dans $\mathbb{N}$ mais n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano du second ordre, c'est-à-dire que la théorie $PA_2 + \neg G$ est cohérente au sens des démonstrations. Elle n'a pourtant pas de modèle plein, puisque celui-ci serait le modèle des entiers standards dans lequel $\neg G$ est fausse, et $\neg G$ est d'ailleurs justement un énoncé qui exprime l'existence d'un entier (forcément non standard).

En fait, pour ce dernier résultat les deux axiomes (∞) suffisent, car il est alors possible de définir l'ensemble des entiers, et de démontrer un théorème de définition par récurrence.

Ceci montre non seulement qu'il n'y a pas complétude pour les modèles pleins, mais qu'il n'y a aucun espoir de trouver un système formel de règles et d'axiomes pour lequel on aurait la complétude pour les modèles pleins : dès que l'ensemble des théorèmes d'une théorie arithmétique est récursivement énumérable, on peut refaire le raisonnement précédent.

1.5.3 Modèles du second ordre

La notion de modèle plein n'est pas vraiment bien définie : on ne peut parler formellement de « tous les sous-ensembles » (ou tous les prédicats) d'un ensemble infini, de $\mathbb{N}$ par exemple, que relativement à un système axiomatique pour la théorie des ensembles, il n'y a pas de définition intrinsèque claire de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Pour obtenir une notion satisfaisante de modèle on ne peut donc considérer l'élimination du quantificateur du second ordre, ou de façon équivalente le schéma d'axiomes de compréhension, comme purement logique, mais comme une propriété supplémentaire que doit satisfaire le modèle.

Une structure $\mathcal{M}$ du second ordre pour la signature $\mathcal{S}$ comprend donc :

– un ensemble de base $|\mathcal{M}| = M$ (ensemble des individus) ;

– un élément de M pour chaque symbole de constante de $\mathcal{S}$;

– une fonction de $M^p \to M$ pour chaque symbole de fonction d'arité p de $\mathcal{S}$;
– un sous-ensemble de M^n pour chaque symbole de relation n-aire de $\mathcal{S}$;
– un sous-ensemble $|\mathcal{M}|_n$ de $\mathcal{P}(M^n)$ (domaine de variation des variables du second ordre d'arité n) pour chaque entier naturel $n > 0$, quand $n = 0$, $|\mathcal{M}|_0 = \mathcal{P}(M^0)(\simeq \{0, 1\})$.

Comme dans le cas des modèles pleins, une variable n-aire du second ordre est interprétée par une partie de M^n, et la relation de satisfaction se définit de la même façon. Les modèles pleins sont les modèles qui vérifient $|\mathcal{M}|_n = \mathcal{P}(M^n)$ pour tout n.

Ces structures ne supposent aucune propriété sur les interprétations des variables du second ordre autre que l'extensionnalité, deux variables X^1 et Y^1 sont vraies pour les mêmes éléments du modèle si et seulement si elles ont mêmes éléments. Cela ne pose pas de problèmes car l'égalité entre objets du second ordre n'est pas dans le langage.

On peut montrer que ces structures fournissent des modèles d'une théorie dans une logique « du second ordre » où la règle d'élimination est la règle faible énoncée à la proposition 1.5.1. On a alors un théorème de complétude, qui est essentiellement celui de la logique du premier ordre.

Les modèles de la logique du second ordre sont alors les structures du second ordre qui satisfont de plus le schéma de compréhension (SC), et on a alors les propriétés de correction (*soundness*) et de complétude pour ces modèles.

Plutôt que de démontrer ces résultats directement, ce qui se ferait essentiellement comme au premier ordre, on peut les déduire des théorèmes de correction et de complétude de la logique du premier ordre. En effet, si on restreint la déduction en remplaçant la règle d'élimination du quantificateur universel du second ordre par la forme faible de la page 14, on a essentiellement une logique du premier ordre, plus précisément une logique du premier ordre à plusieurs sortes d'objets, individus, relations d'arité 1, d'arité 2, etc. En effet la règle d'élimination faible du quantificateur universel du second ordre n'est rien d'autre que la règle d'élimination restreinte aux seuls objets disponibles de la sorte considérée qui sont les variables.

Au paragraphe suivant on montre donc comment représenter la logique du premier ordre à plusieurs sortes d'objets en logique du premier ordre usuelle. Les théorèmes de correction (*soundness*) et de complétude en résultent.

1.6 Logique du premier ordre à plusieurs sortes d'objets

Pour représenter la logique du second ordre comme une théorie du premier ordre, Une étape intermédiaire est de considérer la logique du premier ordre à plusieurs sortes d'objets, qui est une variante, en apparence un peu plus expressive, de la logique du premier ordre. Pour la logique du second ordre les sortes d'objets sont celles des individus, des ensembles d'individus, de couples d'individus, etc. Un autre exemple est donné par la géométrie plane qui s'axiomatise naturellement en termes de points, de droites et d'une relation d'incidence entre points et droites. Il est cependant très simple de représenter les théories du premier ordre à plusieurs sortes d'objets par des théories à une seule sorte d'objets. Dans le cas de la géométrie plane, on peut considérer que le domaine d'interprétation a un seule sorte d'objets qui regroupe points et droites. On appelle alors « point » les individus qui apparaissent à gauche dans la relation d'incidence, droite ceux qui apparaisssent à droite. Formalisé en calcul des prédicats à deux sortes d'objets, point et droite, le langage de la géométrie plane ne permet pas d'écrire qu'un point est incident à un point. Formalisé en calcul des prédicats à une seule sorte d'objet, il permet de l'écrire mais l'énoncé obtenu est toujours faux.

1.6.1 Langage du premier ordre à plusieurs sortes d'objets

On suppose donné un ensemble fini ou dénombrable Ξ qui sont les sortes de base du langage : ce sont les sortes des constantes et des variables du langage. L'ensemble des sortes de relation d'arité n est Ξ^n. L'ensemble des sortes des fonctions à n arguments est Ξ^{n+1}. On note $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$ une sorte de relation et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \to \alpha_{n+1}$ une sorte de fonction.

Une signature $\mathcal{S}$ sur les sortes de Ξ comprend :

- d'éventuels symboles de constantes de sorte α, $\alpha \in \Xi$, soit $\mathcal{C}_\mathcal{S}^\alpha$ l'ensemble des constantes de $\mathcal{S}$ de sorte α ;
- d'éventuels symboles de relation de sorte $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$, on note $\mathcal{R}_\mathcal{S}^\rho$ l'ensemble des symboles de relation de sorte ρ, $\rho \in \Xi^n$;
- d'éventuels symboles de fonction de sorte $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \to \alpha_{n+1}$, on note $\mathcal{F}_\mathcal{S}^\varphi$ l'ensemble des symboles de fonction de sorte φ, $\varphi \in \Xi^{n+1}$.

Les ensembles $\mathcal{C}_\mathcal{S}^\alpha$, $\mathcal{R}_\mathcal{S}^\rho$ et $\mathcal{F}_\mathcal{S}^\varphi$ sont tous disjoints et peuvent être vides.

Un langage à plusieurs sortes d'objets dans Ξ de signature $\mathcal{S}$ est constitué

- d'un ensemble dénombrable de variables $\mathcal{V}^\alpha$ pour chaque sorte d'objet, ces ensembles étant disjoints, et disjoints de la signature ;
- des symboles de connecteurs et de quantificateurs, on se restreindra ici à $\to$, $\perp$, $\forall$;
- des éléments de $\mathcal{S}$.

L'ensemble des termes du langage de signature $\mathcal{S}$, est la réunion de la famille des termes de sorte α, $\alpha \in \Xi$, qui est définie inductivement :

- $c \in \mathcal{C}_\mathcal{S}^\alpha$ et $x \in \mathcal{V}^\alpha$ sont des termes de sorte α ;
- Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes de sorte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et si $f \in \mathcal{F}_\mathcal{S}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \to \alpha_{n+1}}$, alors $f\, t_1 \, \ldots \, t_n$ est un terme de sorte α_{n+1}.

Les formules atomiques du langage de signature $\mathcal{S}$ sont :

- les $R\, t_1 \, \ldots, t_n$ pour $R \in \mathcal{R}_\mathcal{S}^{\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n}$ et les termes $t_1, \ldots, t_n$ de sortes (respectivement) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$;
- pour un langage égalitaire, on ajoute les $t_1 = t_2$ entre termes t_1 et t_2 de même sorte $\alpha \in \Xi$.

L'ensemble des formules du langage à plusieurs sortes d'objet de signature $\mathcal{S}$ peut alors être défini inductivement.

- Les formules atomiques du langage de signature $\mathcal{S}$ sont des formules ;
- $\perp$ est une formule ;
- si F et G sont des formules alors $F \to G$ est une formule ;
- si $x \in \mathcal{V}^\alpha$, et F une formule, alors $\forall x\ F$ est une formule.

On constate qu'il s'agit d'une généralisation directe des notions analogues de la logique du premier ordre. En particulier, s'il y a une seule sorte primitive, c'est-à-dire que Ξ est réduit à un élément, c'est exactement la logique du premier ordre usuelle.

1.6.2 Structure

Ces langages sont interprétés dans des structures qui sont là aussi des généralisations directes de la notion de structure du premier ordre.

Une structure $\mathcal{M}$ de signature $\mathcal{S}$ sur l'ensemble de sortes Ξ est la donnée :

- pour chaque sorte $\alpha \in \Xi$ d'un ensemble M_α ;
- pour chaque symbole de constante $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}^{\alpha}$ d'un élément $\overline{c}^{\mathcal{M}}$ de M_α ;
- pour chaque symbole de relation de la signature $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}^{\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n}$ d'un sous-ensemble $\overline{R}^{\mathcal{M}}$ de $M_{\alpha_1} \times \cdots \times M_{\alpha_n}$;
- pour chaque symbole de fonction de la signature $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \to \alpha_{n+1}}$ d'une fonction $\overline{f}^{\mathcal{M}}$ de $M_{\alpha_1} \times \cdots \times M_{\alpha_n} \to M_{\alpha_{n+1}}$.

1.6.3 Sémantique

De la même façon que pour la logique du premier ordre, on définit inductivement la relation de satisfaction $\mathcal{M} \models F[m_1/x_1, \ldots, m_n/x_n]$, où F est une formule d'un langage à plusieurs sortes d'objets de signature $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$ une structure de signature $\mathcal{S}$, les x_i sont des variables, les m_i des éléments des ensembles de bases du modèle, tels que si x_i est de sorte α, $m_i \in M^\alpha$.

On ne détaille pas la définition qui est une généralisation immédiate de la définition de la satisfaction au premier ordre.

1.6.4 Déduction

La déduction naturelle s'adapte directement au calcul des prédicats à plusieurs sortes d'objets. Il suffit de restreindre l'élimination du quantificateur universel, qui doit mettre en jeu un terme de même sorte que la variable éliminée. Si on ajoutait la quantification existentielle, on devrait faire la restriction symétrique pour l'introduction de celui-ci.

1.6.5 Représentation en logique du premier ordre

Pour représenter la logique du premier ordre à plusieurs sortes d'objets en logique du premier ordre ordinaire (à une seule sorte d'objet), il suffit d'interpréter les sortes par des prédicats, les quantifications typées étant traduites en quantifications relativisées à ces prédicats.

On définit formellement une traduction $\Xi \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}^*$, qui associe, à une signature du calcul des prédicats sur l'ensemble de sortes Ξ la signature du calcul des prédicats du premier ordre qui est la réunion (supposée disjointe) des ensembles de constantes, de prédicats et de fonctions de $\mathcal{S}$, à laquelle on ajoute un symbole de prédicat unaire D^α par sorte $\alpha \in \Xi$. Plus précisément

- l'ensemble des constantes de $\mathcal{S}^*$ est la réunion (disjointe) des $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^\alpha$;
- chaque symbole de relation $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}^{\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n}$ est vu comme symbole de relation n-aire de $\mathcal{S}^*$;
- chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \to \alpha_{n+1}}$ est vu comme symbole de fonction n-aire de $\mathcal{S}^*$;
- pour chaque sorte $\alpha \in \Xi$ un nouveau symbole de prédicat unaire D^α est ajouté à $\mathcal{S}^*$.

Pour simplifier, on considère que l'ensembles des variables du calcul des prédicats du premier ordre de signature $\mathcal{S}^*$ est la réunion (disjointe) des ensembles de variables $\mathcal{V}^\alpha$ du langage d'origine. On traduit un terme t du calcul des prédicats à plusieurs sortes d'objets par le même terme $t^* = t$, les symboles étant interprétés différemment (plus de sortes).

On définit inductivement une traduction $F \mapsto F^*$, qui associe à une formule du calcul des prédicats à plusieurs sortes d'objets de signature $\mathcal{S}$ sur les sortes de Ξ, une formule F^* du calcul des prédicats du premier ordre de signature $\mathcal{S}^*$, qui est la formule F dont les quantificateurs sur une variable de sorte α sont relativisés à D^α.

- Les formules atomiques sont traduites telles quelles : si F atomique, $F^* = F$;
- $\bot^* {=} \bot$, $(F \to G)^* = F^* \to G^*$;
- Si x est de sorte α, $(\forall x\ F)^* = \forall x (D^\alpha x \to F^*)$.

On associe également à la signature $\mathcal{S}$ la théorie $T_{\mathcal{S}}$ du calcul des prédicats du premier ordre sur la signature $\mathcal{S}^*$, qui comprend les axiomes suivants :

- à chaque symbole de relation $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}^{\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n}$ on associe les n axiomes :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (R\, x_1 \ldots x_n \to D^{\alpha_i} x_i) \quad i \in \{1, \ldots, n\}\ .$$

- à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \to \alpha_{n+1}}$ on associe l'axiome :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (D^{\alpha_1} x_1, \ldots, D^{\alpha_n} x_n \to D^{\alpha_{n+1}} f\, x_1 \ldots x_n)$$

  où $A_1, \ldots, A_n \to C$ est une abréviation de $A_1 \to (\ldots \to (A_n \to C) \ldots)$.

Si T est une théorie du calcul des prédicats à plusieurs sortes d'objets de signature $\mathcal{S}$ sur les sortes Ξ, on note

$$T^* = \{F^* \ /\ F \in T\} \cup T_{\mathcal{S}}\ .$$

Lemme 1.6.1 *Pour tout terme t de sorte α dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n$:*

$$D^{\alpha_1} x_1, \ldots, D^{\alpha_n} x_n \vdash_{T_{\mathcal{S}}} D^\alpha t$$

Démonstration. Par induction sur la structure du terme. ∎

Proposition 1.6.2 *Pour toute théorie T du calcul des prédicats à plusieurs sortes d'objets*

$$\vdash_T F \text{ si et seulement si } \vdash_{T^*} F^*\ .$$

Démonstration. On fait la démonstration pour le calcul des prédicats pur (sans égalité), ce qui est suffisant pour la suite. On montre par induction sur la preuve en déduction naturelle que

$$\text{si } \Gamma \vdash_T F, \text{ alors } \Gamma^*, (D^{\alpha_i} x_i)_{x_i \text{ libre dans } \Gamma, F} \vdash_{T^*} F^* .$$

C'est évident pour les axiomes logiques et les axiomes de la théorie, et pour l'implication.

Introduction de $\forall$: on note x^α une variable de sorte α, on traduit

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x^\alpha A}\ \forall_i \quad \text{par} \quad \frac{\Gamma^*, \ldots, D^\alpha x^\alpha, \ldots \vdash A^*}{\Gamma^*, \ldots \vdash \forall x^\alpha (D^\alpha x^\alpha \to A^*)}\ \to_i, \forall_i$$

la variable x^α est bien libre dans le contexte de la démonstration traduite, pour l'introduction du quantificateur universel (une fois effectuée l'introduction de l'implication).

Elimination de $\forall$: l'élimination nécessite les axiomes de $T_\mathcal{S}$ pour les fonctions. On suppose que le terme en jeu a pour variables libres $x_1, \ldots, x_n$ de sortes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On traduit

$$\frac{\Gamma \vdash_T \forall x^\alpha A}{\Gamma \vdash_T A[t/x^\alpha]}\ \forall_e \quad \text{par} \quad \frac{\dfrac{\Gamma^*, \ldots \vdash_{T^*} \forall x^\alpha (D^\alpha x \to A^*)}{\Gamma^*, \ldots \vdash_{T^*} D^\alpha t \to A^*[t/x^\alpha]}\ \forall_e \qquad \dfrac{\text{lemme 1.6.1}}{D^{\alpha_1} x_1, \ldots, D^{\alpha_n} x_n \vdash_{T_\mathcal{S}} D^\alpha t}}{\Gamma^*, \ldots, D^{\alpha_1} x_1, \ldots, D^{\alpha_n} x_n \vdash_{T^*} A^*[t/x^\alpha]}\ \to_e$$

On montre maintenant la réciproque. Supposons que $\vdash_{T^*} F^*$. La démonstration de $\vdash_{T^*} F^*$ peut être interprétée comme une démonstration en calcul des prédicats à plusieurs sortes d'objets, sur la signature $\mathcal{S}$ augmentée des prédicats D^α, $\alpha \in \Xi$, et dans la théorie T augmentée des axiomes de $T_\mathcal{S}$ interprétés en calcul des prédicats à plusieurs sortes d'objets (les termes et formules en jeu sont bien typés par construction).

La démonstration reste correcte en remplaçant dans $T_\mathcal{S}$ et dans les formules de la démonstration, D^α par un prédicat toujours vrai ($\perp \to \perp$ par exemple). Les énoncés de $T_\mathcal{S}$ ainsi substitués deviennent démontrables. La formule relativisée aux D^α qui est démontrée est équivalente à la formule F d'origine, qui est donc démontrée. ■

1.6.6 Les structures à plusieurs sortes d'objet comme des structures à une sorte d'objet

Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{S}$-structure à plusieurs sortes d'objets sur les sortes Ξ, et $\mathcal{M}^*$ une $\mathcal{S}^*$-structure. La structure $\mathcal{M}^*$ *étend* la structure $\mathcal{M}$ si :

- l'ensemble de base M^* de la structure $\mathcal{M}^*$ est la réunion disjointe des M_α, $\alpha \in \Xi$ où M_α est l'ensemble de base associé à la sorte α de la structure $\mathcal{M}$;

(on suppose pour simplifier les M_α disjoints dans la suite)

- les symboles de constantes ont la même interprétation dans $\mathcal{M}^*$ que dans $\mathcal{M}$;
- les symboles de relation ont la même interprétation dans $\mathcal{M}^*$ que dans $\mathcal{M}$;
- pour un symbole de fonction de $\mathcal{S}$, $f \in \mathcal{F}_\mathcal{S}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \to \alpha_{n+1}}$, alors la fonction $f^{\mathcal{M}^*}$, définie sur $(M^*)^n$, est identique à $\overline{f}^{\mathcal{M}}$, définie de $M_{\alpha_1} \times \cdots \times M_{\alpha_n} \to M_{\alpha_{n+1}}$, sur le domaine de définition de cette dernière $M_{\alpha_1} \times \cdots \times M_{\alpha_n}$.

Proposition 1.6.3 *Pour toute signature $\mathcal{S}$ à plusieurs sortes d'objets, pour tout $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$,*

- *il existe une $\mathcal{S}^*$-structure $\mathcal{M}^*$ qui étend $\mathcal{M}$;*
- *pour toute $\mathcal{S}^*$-structure $\mathcal{M}^*$ qui étend $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^* \models T_{\mathcal{S}}$, et pour toute formule F du calcul des prédicats à plusieurs sortes d'objet :*

$$\mathcal{M} \models F \textit{ si et seulement si } \mathcal{M}^* \models F^*.$$

On déduit de cette proposition la correction et la complétude pour la logique à plusieurs sortes d'objets.

Proposition 1.6.4 (correction) *Soient $\mathcal{S}$ une signature à plusieurs sortes d'objets, T une théorie dans le langage de signature $\mathcal{S}$, F une formule du même langage :*

$$\textit{Si } \vdash_T F \textit{ alors } \mathcal{M} \models T \Rightarrow \mathcal{M} \models F \ .$$

Proposition 1.6.5 (complétude) *Soient $\mathcal{S}$ une signature à plusieurs sortes d'objets, T une théorie dans le langage de signature $\mathcal{S}$, F une formule du même langage :*

$$\textit{si pour toute } \mathcal{S}\textit{-structure } \mathcal{M} \ \big(\mathcal{M} \models T \Rightarrow \mathcal{M} \models F\big) \,, \textit{ alors } \vdash_T F \ .$$

1.6.7 La logique du second ordre comme théorie du premier ordre

On peut voir maintenant la logique du second ordre comme une théorie à plusieurs sortes d'objets particulière. Il y a une infinité dénombrable de sortes de base : ι est la sorte des individus, π_n est la sorte des variables d'ensembles de n-uplets. On ajoute une infinité dénombrable de symboles de relation $@_n$, la sorte de $@_n$ est $(\pi_n, \underbrace{\iota, \ldots, \iota}_{n})$ (π_0 pour $n = 0$).

On a écrit :

$$X^n t_1 \ldots t_n \text{ pour } @_n X^n t_1 \ldots t_n \ .$$

Les règles du quantificateur universel particularisées aux type des individus ι sont les règles du premier ordre usuel. Les règles du quantificateur universel particularisées aux types π_n donnent, d'une part la règle d'introduction du quantificateur universel du second ordre, d'autre part la règles d'élimination faible de la page 14. En effet les seuls objets de type π_n sont les variables.

La logique du second ordre est alors la théorie du schéma de compréhension dans ce langage, une théorie du second ordre est une théorie qui étend cette dernière.

La sémantique de la logique du second ordre induite par la logique du premier ordre diffère de celle décrite à la section 1.5.3 page 15 en ce qu'elle n'identifie pas forcément les objets du second ordre « ayant les mêmes éléments ». Dans un modèle $\mathcal{M}$, les variables du second ordre sont interprétées par des points (ceux de M_{π_n}, domaine des objets de type π_n). On peut associer à un objet A de type π_n l'ensembles des n-uplets d'objets $(a_1, \ldots, a_n)$

de type ι tels que $\mathcal{M} \models @_n A\, a_1 \dots a_n$. Appelons $\mathcal{M}'$ la structure obtenue, en remplaçant M_{π_n} par M_ι^n, et qui est donc définie par :

$$\begin{array}{l}
M'_\iota = M_\iota \ ; \\
M'_{\pi_n} = \big\{ \{(a_1, \dots, a_n) \in M_\iota^n \ / \ \mathcal{M} \models @_n A\, a_1 \dots a_n\} \ / \ A \in M_{\pi_n} \big\} \ ; \\
\mathcal{M}' \models @_n A'\, a_1 \dots a_n \ \text{ si et seulement si } \ (a_1, \dots, a_n) \in A' \ ; \\
\mathcal{M}' \models F[a_1, \dots, a_n] \ \text{ ssi } \ \mathcal{M} \models F \text{ pour les autres formules atomiques } F \ ;
\end{array}$$

Il n'y a pas d'autres formules atomiques que celles du premier ordre et les $@_n A\, a_1 \dots a_n$, On a donc par une induction immédiate :

$$\text{pour toute formule } F, \quad \mathcal{M} \models F \text{ ssi } \mathcal{M}' \models F \ .$$

On retrouve la sémantique du second ordre de la section 1.5.3. On retrouve donc les propriétés de correction et de complétude, la compacité, et les théorèmes de Löwenheim-Skolem pour la logique du second ordre, qui est la théorie du schéma de compréhenion. Pour Löwenheim-Skolem c'est bien la cardinalité de « tout » le modèle qui est en jeu : pas seulement les individus, mais aussi les domaines d'interprétation pour les variables du second ordre.

Théorème 1.6.6 (Löwenheim-Skolem) *Soit T une théorie du second ordre dans un langage dénombrable qui possède un modèle $\mathcal{M}$. Alors T a pour modèle une sous-structure élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ qui est dénombrable, c'est-à-dire que le domaine des individus $|\mathcal{M}|$ et les domaines d'interprétation des variables du second ordre $|\mathcal{M}|_n$ sont dénombrables.*

La satisfaction dans $\mathcal{M}'_{\pi_n}$ définit une relation d'équivalence sur M_{π_n} qui identifie les objets de π_n « ayant les mêmes éléments ». Ceci est possible car l'interprétation d'une formule $@_n X^n t_1 \dots t_n$ dans un environnement donné n'est pas modifiée en affectant à X^n un point de la même classe d'équivalence que celui affecté initialement.

En effet les langages du second ordre de la section 1.1 ne comprenaient que des symboles de fonctions et de relations sur les individus. Par traduction au premier ordre, on voit que l'on peut ajouter des symboles de fonctions et de relations sur les objets du second ordre, mais alors il faut abandonner la sémantique de la section 1.5.3 et prendre directement celle obtenue par traduction au premier ordre. Si on ajoute une égalité $=_2$ entre objets du second ordre, les modèles de la section 1.5.3 sont les *modèles extensionnels*, c'est-à-dire ceux des axiomes d'extensionnalité suivant (un axiome par arité) :

$$\forall x_1 \dots x_n \big((X x_1 \dots x_n \leftrightarrow Y x_1 \dots x_n) \to X =_2 Y \big) \ .$$

1.7 Arithmétique du second ordre

1.7.1 Arithmétique de Peano du second ordre

L'arithmétique PA_2 est la théorie du second ordre dans le langage de l'arithmétique $(0, s, +, \times)$ dont les axiomes sont ceux de Peano, c'est-à-dire la théorie (∞) (page 11) et les axiomes qui définissent $+$ et $\times$, mais avec le seul axiome de récurrence (rec) (page 15), à la place du schéma d'axiomes de récurrence (qui est conséquence de celui-ci). On a vu que dans la théorie (∞) il était possible de définir un prédicat int, pour « être un entier». L'axiome de récurrence est : $\forall x \ \operatorname{int} x$, et s'interprète par « tout élément du modèle est un entier ».

Il est également possible de définir l'addition et la multiplication (par une relation). Une autre possibilité est de conserver addition et multiplication, ce qui permet de coder les couples et les n-uplets. On peut alors restreindre les variables du second ordre aux seules variables d'arité 1 sans perte de généralité.

1.7.2 Axiomes du choix

Étant donné une variable de relation $n+1$-aire Y, on note $Y\,x$ la relation n-aire obtenue en fixant à x le premier argument (avec la notation utilisée c'est $(Y\,x\,x_1 \dots x_n)\langle x_1, \dots, x_n\rangle$).

On exprime l'axiome du choix dénombrable (pour les parties de $\mathbb{N}$) par un schéma d'axiomes qui sont les clôtures universelles pour toutes les formules F de :

$$\forall x \exists X^1 F[x, X^1] \to \exists Y^2 \forall x F[x, Y^2\,x] \ . \qquad \textit{(Axiome du choix dénombrable)}$$

Cet axiome permet de permuter les quantificateurs du premier et du second ordre, et de montrer que toute formule du second ordre est équivalente à une formule de la hiérarchie analytique (formules Σ^1_n et Π^1_n).

On peut aussi exprimer l'axiome du choix dépendant :

$$\forall X^1 \exists Y^1 F[X^1, Y^1] \to \exists Z^2 \forall x F[Z^2\,x, Z^2\,(s\,x)] \ . \qquad \textit{(Axiome du choix dépendant)}$$

L'arithmétique du second ordre permet de parler des ensembles d'entiers donc des réels. Pour cette raison l'arithmétique du second ordre est aussi appelée *analyse* par les logiciens. L'axiome du choix dépendant tel qu'énoncé ci-dessus est bien celui utile en analyse : étant donné une relation telle que tout réel soit en relation avec au moins un autre réel, il existe une suite de réels en relation (les $Z^2\,n$, n entier).

1.7.3 Bon ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

On ne peut pas traduire l'énoncé « il existe un bon ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ » dans l'arithmétique car cettte propriété affirme l'existence d'une relation sur les parties de $\mathbb{N}$, qui est donc au troisième ordre sur les entiers.

Il est possible d'ajouter une constante R du troisième ordre au langage, la sorte des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ est π_1, celle de R est donc (π_1, π_1). On peut exprimer par un schéma d'axiomes au second ordre que R est une relation bien fondée sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (de la même façon que l'on exprime par un schéma d'axiomes au premier ordre la récurrence sur $\mathbb{N}$). On note $F[X, \overline{Y}, \overline{x}]$ une formule dont les variables libres sont parmi X, la suite de variables du second ordre $\overline{Y}$, la suite de variables du premier ordre $\overline{x}$. Le schéma de récurrence pour R est la clôture universelle des formules suivantes :

$$\forall X \left(\forall Y(R\,Y\,X \to F[Y, \overline{A}, \overline{a}]) \to F[X, \overline{A}, \overline{a}]\right) \to \forall X F[X, \overline{A}, \overline{a}]$$

Pour exprimer que R est une relation d'ordre strict bien fondée, il suffit d'ajouter un axiome pour la transitivité (la bonne fondation entraîne l'irréflexivité). Pour exprimer que c'est ue relation de bon ordre strict, on suppose préalablement que l'on a une égalité entre objets du second ordre, et on exprime alors la totalité.

1.8 Exercices

Exercice 1 Le calcul propositionnel du second ordre utilise une seule sorte d'objet, pour les variables propositionnelles. Montrer que le calcul propositionnel du second ordre (classique) est décidable.

Exercice 2 Montrer que les seuls modèles du second ordre dont l'ensemble de base est fini sont les modèles pleins.

Exercice 3 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la théorie du second ordre avec pour axiome « l'ensemble des individus est de cardinalité n » est décidable.

Exercice 4 Montrer que la théorie du second ordre (∞) et l'arithmétique du second ordre sont équicohérentes.

Exercice 5 On se place dans la théorie (∞), le langage étant éventuellement étendu. On suppose la donnée d'un symbole de constantee [] et d'un symbole de fonction binaire :: tels que :

$$\forall x \forall l\ x :: l \neq [] \ ; \ \forall x, x' \forall l, l' \left(x :: l = x' :: l' \Rightarrow (x = x' \wedge l = l')\right) \ .$$

Montrer que l'on peut définir au second ordre l'ensemble des suites finies d'entiers où la suite finie $(a_1, \ldots, a_n)$ est représentée par $a_n :: a_{n-1} :: \cdots :: a_1 :: []$. Expliciter la récurrence sur les listes.

Exercice 6 Montrer, en utilisant le théorème de compacité, que la logique du second ordre n'est pas complète pour les modèles pleins.

Exercice 7

1. Montrer que toute formule du premier ordre démontrable au second ordre (sans axiomes) est démontrable au premier ordre.
2. Montrer que cet énoncé est arithmétique et n'est pas démontrable dans l'arithmétique du second ordre.

Exercice 8 Énoncer et démontrer dans la théorie (∞) le principe de définition par récurrence sur les entiers (les fonctions sont réprésentées par des relations).

Chapitre 2

Quelque résultats d'incomplétude

Introduction

Tous les codages de l'arithmétique du premier ordre sont bien-sûr disponibles en arithmétique du second ordre. Il n'y a aucune difficulté à étendre ces codages aux formules de l'arithmétique du second ordre (et en général aux formules d'un langage dénombrable).

Les formules du second ordre étant codées par des entiers, une théorie, au sens un ensemble d'axiomes pour la théorie, est définie par un prédicat sur les entiers. Cette théorie est dite *récursivement axiomatisable* quand ce prédicat est Σ^0_1, et de façon analogue on dira qu'elle est *arithmétiquement axiomatisable* quand ce prédicat se définit dans l'arithmétique du premier ordre (l'ensemble des théorèmes est arithmétique). Chacune de ces conditions Σ^0_1, arithmétique) équivaut à la même condition portant sur l'ensemble des théorèmes de la théorie.

L'arithmétique du second ordre permet la quantification sur les ensembles d'entiers ou sur les relations sur les entiers. Elle permet donc également la quantification sur les ensembles dénombrables d'ensembles d'entiers qui peuvent être vus comme des relation binaires sur $\mathbb{N}$.

Il est donc possible de développer une théorie des modèles dénombrables pour l'arithmétique du second ordre en arithmétique du second ordre, et en particulier, d'énoncer l'existence d'un modèle du second ordre (dénombrable au sens du modèle de départ) d'une théorie donnée. La restriction aux modèles dénombrables (vus du modèles de départ) n'en est pas vraiment une d'après le théorème de Löwenheim-Skolem, tant qu'on ne s'intéresse qu'aux théories dénombrables.

Les modèles les plus simples à représenter et à manipuler sont les modèles dont les entiers sont les « entiers standards », et ceux-là seulement. On les appelle *ω-modèles*. Les entiers standards sont de fait les entiers de la meta-théorie, ceux d'un modèle « intuitif » de celle-ci. L'existence d'un ω-modèle pour une théorie donnée s'énonce en arithmétique du second ordre, comme cela sera vérifié par la suite.

On ne pourrait pas démontrer de théorème de complétude pour les théories arithmétiques en interprétant les formules seulement dans les ω-modèles : comme les entiers restent les mêmes, les ω-modèles valident les mêmes formules du premier ordre et cela contredirait le premier théorème d'incomplétude.

Par contre on peut énoncer un résultat dû à Rosser en 1937 et inspiré du second théorème d'incomplétude, mais qui s'avère en fait un peu plus simple à démontrer que ce dernier [1] : sous des conditions que l'on va préciser, si T est une théorie du second ordre dans le langage de l'arithmétique de Peano et si T possède un ω-modèle, alors la théorie T + « il n'existe pas de ω-modèle de T » possède un ω-modèle.

2.1 Arithmétique du second ordre

Dans la suite on appelle PA_2 l'arithmétique du second ordre pour la signature $(0, s, +, \times)$, avec des variables du second ordre d'arité 1 seulement. La fonction de codage des couples de Cantor est définissable dans $\mathbb{N}$, on note :

$$z = (x, y) \equiv_d 2z = (x + y)(x + y + 1) + 2y \ .$$

Il est possible de généraliser aux n-uplets, et donc de coder les variables du second ordre n-aire.

On dispose aussi d'un codage bijectif des listes (suites finies), défini par :

$$\begin{aligned} [\,] &= 0 \\ [a_0, \ldots, a_n] &= 1 + (a_0, [a_1, \ldots, a_n]) \ . \end{aligned}$$

Les fonctions usuelles sur les listes se codent de façon récursive, et sont donc définissables dans $\mathbb{N}$.

2.2 Les ω-modèles

Jusqu'à la fin du chapitre, le langage est celui de l'arithmétique avec pour signature $(0, s, +, \times)$.

On appelle ω-modèle de l'arithmétique du second ordre un modèle ayant pour domaine d'interprétation des entiers $\mathbb{N}$, les entiers standards, les interprétations des termes $s^n\,0$, c'est-à-dire les entiers « intuitifs » ceux de l'univers dans lequel on travaille.

2.2.1 Formalisation des ω-modèles

On définit donc dans une théorie arithmétique du second ordre un ω-modèle formel comme un modèle ayant les mêmes entiers que le « modèle de départ », c'est-à-dire que les entiers sont les mêmes, 0 et s gardent la même interprétation, et donc également

1. Remarque due à Jean-Louis Krivine, la formulation et la démonstration du théorème de Rosser suivent celle qu'il donne du second théorème d'incomplétude, chapitre 9 de son livre *théorie des ensembles*, Cassini 1998 et 2007. Rosser formule le théorème avec la ω-règle, règle infinitaire qui permet d'étendre la notion de démonstration pour obtenir la complétude dans les ω-modèles.

$+$ et $\times$. Un ω-modèle formel est caractérisé par le domaine de variations des variables du second ordre (d'arité 1). Celui-ci est décrit par une relation « binaire» $M(n,k)$, soit $\exists z\,\big(M\,z \wedge z = (n,k)\big)$, pour le codage des couples ci-dessus, et M est finalement un prédicat unaire. On note M_k le prédicat unaire obtenu en fixant k dans $M(n,k)$ (soit $M(n,k)\langle n\rangle$). Les variables du second ordre seront interprétées par les M_k. Le modèle formel est dénombrable dans le modèle de départ, mais bien entendu pas dans le modèle formel si celui-ci satisfait le schéma de compréhension, par le raisonnement diagonal usuel (théorème de Cantor).

Une ω-structure formelle est donc par définition un prédicat M d'arité 1. On définit alors l'interprétation d'une formule F, qui est un objet syntaxique représenté par un entier, dans un modèle M, par récurrence sur cet entier, noté $\ulcorner F \urcorner$.

On suppose donc donné un codage des termes, que l'on note $t \mapsto \ulcorner t \urcorner$, puis des formules de l'arithmétique du second ordre, que l'on note de la même façon $F \mapsto \ulcorner F \urcorner$, et avoir montré que les fonctions usuelles sur les termes et les formules se codent dans l'arithmétique du premier ordre, en particulier la substitution. La satisfaction relativement à M va être définie inductivement sur les entiers, de façon à être fausse pour tout entier ne codant pas de formule.

Tout d'abord il existe deux fonctions récursives, donc représentables dans l'arithmétique, soient vl_1 et vl_2, qui donnent l'une les variables libres d'ordre 1, l'autre les variables libres d'ordre 2, de la formule codée par son argument :

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{vl}_1(\ulcorner F \urcorner) = [i_1, \ldots, i_p], \quad i_1 < \ldots < i_p, \quad x_{i_1}, \ldots, x_{i_p} & \text{variables libres d'individu de } F \\
\mathrm{vl}_2(\ulcorner F \urcorner) = [i_1, \ldots, i_q], \quad i_1 < \ldots < i_q, \quad X_{i_1}, \ldots, X_{i_q} & \text{variables libres du 2nd ordre de } F
\end{array}$$

La valeur d'une formule est intuitivement un sous-ensemble de $\mathbb{N}^{p+q}$, plus formellement on représente les suites des valeurs des variables libres $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$ et $X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}$ (énumérées dans l'ordre des indices) par deux entiers n et m. Les formules sont alors interprétées dans un environnement constitué de ces deux listes d'entiers.

Lors de la définition de la satisfaction, de nouvelles variables libres apparaissent, à insérer à la bonne place dans la liste. Le rôle de la fontion ins est d'insérer une valeur pour cette nouvelle variable à la bonne place dans l'environnement.La fonction $(i,j,n,k) \mapsto \mathrm{ins}(i,j,n,k)$ fonction qui étant donné un entier $i = [i_1, \ldots, i_p]$, un entier j, un entier $n = [n_1, \ldots, n_s]$ (elle ne sera utilisée que pour $s = p$), et un entier k, insère k dans $[n_1, \ldots, n_s]$ en position α, α étant le plus petit entier tel que tel que $j < i_\alpha$ s'il existe, $s+1$ sinon. Cette fonction est récursive donc se définit dans l'arithmétique.

On peut alors définir par récurrence la satisfaction dans le modèle M :

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Val}_M(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner, n, m) & \text{ssi} & n = [n_1, \ldots, n_p] \text{ et } \ulcorner t_1[\vec{n}/\vec{x}] \urcorner = \ulcorner t_2[\vec{n}/\vec{x}] \urcorner \\
\mathrm{Val}_M(\ulcorner X_{i_j}\, t \urcorner, n, m) & \text{ssi} & n = [n_1, \ldots, n_p] \text{ et } m = [m_1, \ldots, m_q] \text{ et } M(\ulcorner t[\vec{n}/\vec{x}] \urcorner, m_j) \\
\mathrm{Val}_M(\ulcorner F \to G \urcorner, n, m) & \text{ssi} & \mathrm{Val}_M(\ulcorner F \urcorner, n, m) \to \mathrm{Val}_M(\ulcorner G \urcorner, n, m) \\
\mathrm{Val}_M(\ulcorner \forall x_i\, F \urcorner, n, m) & \text{ssi} & \forall y \forall k\,\big(y = \mathrm{ins}(\mathrm{vl}_1(\ulcorner \forall x_j\, F \urcorner), j, n, k) \to \mathrm{Val}_M(\ulcorner F \urcorner, y, m)\big) \\
\mathrm{Val}_M(\ulcorner \forall X_j\, F \urcorner, n, m) & \text{ssi} & \forall z \forall k\,\big(z = \mathrm{ins}(\mathrm{vl}_2(\ulcorner \forall X_j\, F \urcorner), j, m, k) \to \mathrm{Val}_M(\ulcorner F \urcorner, n, z)\big)
\end{array}$$

Aucune des clauses n'utilise de quantification du second ordre. La définition par récurrence se formalise au premier ordre, avec M comme paramètre (on peut définir au premier ordre le graphe d'une fonction val_M à 3 arguments à valeur dans $\{0,1\}$).

Pour que M soit un ω-modèle du second ordre il doit maintenant satisfaire le schéma de compréhension. Soit $n \mapsto \mathrm{SC}(n)$ une fonction telle que (pour un choix de la variable X qui évite les captures de variable) :

$$\mathrm{SC}(\ulcorner F \urcorner) = \ulcorner \exists X\, \forall x\, (Xx \leftrightarrow F) \urcorner\ .$$

Notons $\mathrm{Form}(f)$ l'énoncé « f code une formule ». L'énoncé « M est un ω-modèle du second ordre », que l'on note $\mathrm{Mod}_\omega(M)$ s'écrit :

$$\mathrm{Mod}_\omega(M) \equiv_d \forall f\, \big(\mathrm{Form}(f), n = \mathrm{vl}_1(f), m = \mathrm{vl}_2(f) \to \mathrm{Val}_M(\mathrm{SC}(f), n, m)\big)\ .$$

Si la théorie T définie par l'ensemble de ses axiomes, est définie par une formule de l'arithmétique, soit A_T, l'énoncé « M est un ω-modèle du second ordre de T » s'écrit :

$$\mathrm{Mod}_\omega(M) \wedge \forall f\, \big(A_T\, f \to \mathrm{Val}_M(f,0,0)\big)\ .$$

La formule « il existe un ω-modèle de T » s'écrit donc, en ajoutant une quantification existentielle du second ordre :

$$\exists M\, \Big(\mathrm{Mod}_\omega(M) \wedge \forall f\, \big(A_T\, f \to \mathrm{Val}_M(f,0,0)\big)\Big)\ .$$

C'est un énoncé Σ^1_1 (une seule quantification existentielle du second ordre sur une formule sans quantifications du second ordre).

Proposition 2.2.1 *Un ω-modèle plein d'une théorie du second ordre T arithmétiquement axiomatisable est un ω-modèle de $T+$ « il existe un ω-modèle de T ».*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un ω-modèle plein de la théorie T. Par le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, il existe une sous-structure dénombrable $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ qui est élémentairement équivalente à $\mathcal{M}$. Comme le modèle $\mathcal{M}$ est plein, un ensemble d'entiers (objet du second ordre) de $\mathcal{M}$ décrit $\mathcal{N}$. C'est un ω-modèle de T. ■

2.2.2 ω-modèles et ω-modèles formels

Soit $\mathcal{U}$ un ω-modèle, $\mathbb{N}$ est l'ensemble de ses entiers. L'interprétation d'un prédicat M qui satisfait l'énoncé $\mathrm{Mod}_\omega(M)$ dans $\mathcal{U}$ définit donc également un modèle au sens intuitif, soit $\mathcal{M}$, ayant les mêmes entiers et dont le domaine d'interprétation des variables du second ordre est l'interprétation dans $\mathcal{U}$ des M_k, soit

$$\big\{M'_k \ /\ k \in \mathbb{N}\big\} \quad \text{où} \quad M'_k = \{n \in \mathbb{N} \ /\ \mathcal{U} \models M(n,k)\}\ .$$

Le modèle $\mathcal{M}$ est donc un ω-modèle et même une sous-structure de $\mathcal{U}$.

Lemme 2.2.2 *$\mathcal{U}$, $\mathcal{M}$ et M étant définis comme ci-dessus, pour toute formule F du langage de l'arithmétique dont les variables libres sont $x_1, \ldots, x_p$, $X_1, \ldots, X_q$, pour tous paramètres $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_p)$ entiers, et $\vec{A} = (M'_{m_1}, \ldots, M'_{m_q})$, en posant $n = [n_1, \ldots, n_p]$, et $m = [m_1, \ldots, m_q]$:*

$$\mathcal{M} \models F\,[\vec{x} := \vec{n}, \vec{X} := \vec{A}] \;\; \textit{ssi} \;\; \mathcal{U} \models \mathrm{Val}_M(\ulcorner F \urcorner, n, m) \ .$$

Démonstration. Par induction sur F et définition de $\mathcal{M}$. ∎

Le lemme 2.2.2 peut à son tour se « formaliser » c'est-à-dire s'énoncer dans un ω-modèle formel. À chaque fois que l'on définit un ω-modèle on peut lui faire correspondre un ω-modèle qui est une sous-structure du ω-modèle de départ. Alors que le lemme 2.2.2 est en fait un schéma de théorèmes (un énoncé pour chaque formule), sa version formelle qui suit est un théorème de la logique du second ordre.

On définit donc dans le modèle formel M un ω-modèle par un prédicat (unaire) N. Le prédicat (unaire) N' est défini (via codage des couples) par

$$N'(n, k) \equiv_d Val_M(\ulcorner N(x_1, x_2) \urcorner, [n, k], 0) \ .$$

Lemme 2.2.3 *M, N et N' étant définis comme ci-dessus, étant entendu que $\ulcorner \mathrm{Val}_N(f, \underline{n}, \underline{m}) \urcorner$ se définit en fonction de n et m par substitution, alors on démontre en arithmétique du second ordre que :*

$$\forall n \forall m \forall f \left(\mathrm{Form}(f) \to (\mathrm{Val}_{N'}(f, n, m) \leftrightarrow \mathrm{Val}_M(\ulcorner \mathrm{Val}_N(f, \underline{n}, \underline{m}) \urcorner, 0, 0) \right) \ .$$

Comme $\mathcal{U}$ et $\mathcal{M}$ ont les mêmes entiers, le lemme suivant est une conséquence immédiate du lemme 2.2.2.

Lemme 2.2.4 *Si F est une formule arithmétique close du premier ordre :*

$$\mathcal{U} \models F \;\; \textit{ssi} \;\; \mathcal{U} \models \mathrm{Val}_M(\ulcorner F \urcorner, 0, 0)$$

et si F est une formule arithmétique du premier ordre à une variable libre x :

$$\{n \in \mathbb{N} \ / \ \mathcal{U} \models F[n]\} = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \mathcal{U} \models \mathrm{Val}_M(\ulcorner F[\underline{n}] \urcorner, 0, 0)\} \ .$$

Tous les codages, qui sont définis par des formules de l'arithmétique du premier ordre ont donc même interprétation dans $\mathcal{U}$ et dans le ω-modèle défini par M.

Si la théorie T est arithmétiquement axiomatisable, la formule A_T définissant les axiomes de T est une formule de l'arithmétique du premier ordre, et les entiers f tels que $\mathcal{U} \models \mathrm{Val}_M(A_T[f], 0, 0)$ sont exactement les codes des axiomes de T.

2.2.3 Incomplétude pour les ω-modèles

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant, dû à Rosser en 1937 qui est une variante pour les ω-modèles du second théorème d'incomplétude de Gödel.

Théorème 2.2.5 (Rosser) *Soit T une théorie du second ordre pour l'arithmétique qui est* arithmétique *(définissable par une formule A_T de l'arithmétique du* premier ordre*). Une telle théorie est telle que s'il existe un ω-modèle de la théorie T, alors il existe un ω-modèle de la théorie T + « il n'existe pas de ω-modèle de T ».*

On rappelle qu'il est possible de définir dans $\mathbb{N}$ par une formule Σ^0_1 que l'on note $z = \sigma(x, n)$ un énoncé signifiant « x est le code d'une formule à une variable libre et z le code d'une formule close obtenue en substituant le terme $\underline{n}$ à celle-ci », en particulier :

$$\ulcorner F[\underline{n}/x] \urcorner = \sigma(\ulcorner F \urcorner, n) \ .$$

Lemme 2.2.6 (Diagonalisation) *Pour toute formule à une seule variable libre $\Psi[x]$, il existe une formule close G telle que $G \equiv_{\mathbb{N}} \Psi[\ulcorner G \urcorner]$.*

Démonstration. Soit la formule

$$\Psi[\sigma(y, y)] \equiv_d \exists x \left(\Psi[x] \wedge y = \sigma(y, y)\right) \ .$$

Son code est l'entier $n = \ulcorner \Psi[\sigma(y, y)] \urcorner$. On définit la formule close

$$G \equiv_d \Psi[\sigma(y, y)][\underline{n}/y] \ .$$

On a $\ulcorner G \urcorner = \sigma(\underline{n}, \underline{n})$, soit :

$$G \equiv \exists x \left(\Psi\, x \wedge x = \sigma(\underline{n}, \underline{n})\right) \equiv_{\mathbb{N}} \Psi[\ulcorner G \urcorner] \ . \qquad \blacksquare$$

Soit T une théorie arithmétiquement axiomatisable. On prend

$$\Psi(x) \equiv_d \neg \exists M \Big(\mathrm{Mod}_\omega(M) \wedge \forall f \left(A_T\, f \rightarrow \mathrm{Val}_M(f, 0, 0)\right) \wedge \mathrm{Val}_M(x, 0, 0)\Big)$$

et le lemme de diagonalisation fournit un énoncé G vérifiant

$$G \equiv_{\mathbb{N}} \text{ « Il n'existe pas de } \omega\text{-modèle de } T + \ulcorner G \urcorner \text{ »}$$

Lemme 2.2.7 *Tout (ω-)modèle du second ordre de $T + G$ satisfait $T+$ « il n'existe pas de ω-modèle de T ».*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\mathcal{U}$ un (ω-)modèle de $T + G$, et M un objet du second ordre de $\mathcal{U}$ qui définit un ω-modèle de T dans $\mathcal{U}$. Par construction de G, ce modèle satisfait $\neg G$, c'est-à-dire que dans le modèle défini par M il existe un objet du second ordre N qui définit un ω-modèle de $T + G$. D'après le lemme 2.2.3, N définit un ω-modèle dans $\mathcal{U}$ qui, d'après le lemme 2.2.4, satisfait tous les axiomes de T car l'ensemble de ceux-ci est défini par une formule arithmétique, et qui satisfait G, ce qui contredit que $\mathcal{U}$ est modèle de $T + G$. $\blacksquare$

Dans le lemme précédent le fait que le modèle de départ $\mathcal{U}$ soit un ω-modèle n'intervient pas réellement, tout ce qui importe est que tous les modèles en jeu aient le même ensemble d'entiers, celui que l'on a appelé $\mathbb{N}$, ce qui est assuré par la définition formelle de ω-modèle. Par complétude le lemme se démontre donc en arithmétique du second ordre.

Démonstration (théorème 2.2.5). Soit $\mathcal{U}$ un ω-modèle de T. La formule G est définie comme ci-dessus, et vérifie donc le lemme 2.2.7. Deux cas sont possibles.

- Soit $\mathcal{U}$ est un modèle de G. D'après le lemme 2.2.7, $\mathcal{U}$ est déjà un modèle de $T+$ « il n'existe pas de ω-modèle de T ».
- Soit $\mathcal{U}$ n'est pas un modèle de G. cela signifie qu'il existe un objet du second ordre M de $\mathcal{U}$ qui définit un ω-modèle dans $\mathcal{U}$ de $T + \ulcorner G \urcorner$. On lui associe un ω-modèle $\mathcal{M}$ qui satisfait les mêmes formules d'après le lemme 2.2.2, et qui est donc modèle de $T + G$ car la théorie T est définie par une formule arithmétique. On est ramené au cas précédent. ■

On peut faire la même remarque que pour le lemme : ce qui importe est que tous les modèles aient même ensemble d'entiers que le modèle de départ, et c'est ce que signifie en fait la notion formelle de ω-modèle. On a donc le théorème de Rosser en prenant n'importe quel modèle du second ordre $\mathcal{U}$ comme univers d'origine. Donc le théorème de Rosser (2.2.5) est un théorème de l'arithmétique du second ordre.

Si l'on admet l'existence d'un ω-modèle *plein* de l'arithmétique du second ordre, une hypothèse plus forte que l'existence d'un ω-modèle, alors une conséquence du théorème 2.2.5 est l'existence de deux ω-modèles non élémentairement équivalents de l'arithmétique du second ordre. En effet un modèle plein possède un objet du second ordre qui définit un ω-modèle (proposition 2.2.1), et on a démontré, que s'il existe un ω-modèle, il en existe un dont aucun objet du second ordre ne définit un ω-modèle. On a donc au second ordre une sorte de résultat d'incomplétude pour les théories arithmétiquement axiomatisables qui ne nécessite pas de changer les entiers. La formule en jeu ne peut être arithmétique, mais elle est Σ^1_1, donc on l'obtient au premier niveau de la hiérarchie analytique.

2.3 Le second théorème d'incomplétude

On s'intéresse maintenant au second théorème d'incomplétude pour la logique du second ordre[2]. On note coh_T un énoncé, formalisé dans le langage de la théorie qui signifie que la théorie T est cohérente.

Théorème 2.3.1 (Second théorème d'incomplétude) *Soit T une théorie du second ordre dans le langage de l'arithmétique, récursivement axiomatisable, et qui a pour conséquence l'arithmétique de Peano du premier ordre. Alors si T est cohérente, T n'a pas pour conséquence coh_T, dit autrement $T + \neg\mathrm{coh}_T$ est cohérente.*

2. Elle suit de près celle de Jean-Louis Krivine, *théorie des ensembles* Cassini 1998 et 2007, chapitre 9 donnée pour la théorie des ensembles.

La démonstration va suivre le même schéma que la précédente pour le théorème de Rosser. Il faut réénoncer le théorème sémantiquement, et donc pouvoir parler de modèle (du second ordre) de l'arithmétique en général. Dans la suite le langage est toujours celui de l'arithmétique de Peano. On parle de structure ou de modèle pour une structure sur ce langage.

2.3.1 Formalisation des modèles du second ordre

Un modèle (dénombrable) de l'arithmétique du second ordre se définit formellement au second ordre de façon analogue à un ω-modèle, mais cette fois les entiers peuvent « changer », ce qui revient à changer la fonction successeur (cela ne change rien de conserver le même 0). Les individus du modèle formel sont les entiers du modèle de départ, mais ce ne sont plus que des « noms » pour les nouveaux entiers. On s'intéresse aux modèles des axiomes de Peano et de la récurrence au moins pour les formules du premier ordre. Tous les $s^n 0$, où n est un entier du modèle de départ, ont une interprétation dans le modèle formel. Le entiers du modèle formel prolongent donc prolonger (éventuellement) les entiers du modèle de départ.

Un modèle formel est défini par une interprétation du successeur, qui est un objet du second ordre, un ensemble de couples — que par codage on ramène à un prédicat unaire —, une interprétation de l'addition et de la multiplication — à nouveau par codages ce sont deux prédicats unaires —, et un prédicat pour énumérer le domaine d'interprétation des variables du second ordre — de la même façon que pour les ω-modèles.

Un modèle formel est donc défini par 4 prédicats, 4 objets du second ordre M_s, M_+, $M_\times$, M_2, et on peut bien-sûr se ramener par codage à un seul par $M(x, y, z, t) \equiv M_s\, x \wedge M_+\, y \wedge M_\times\, z \wedge M_2\, t$. La satisfaction se définit de façon analogue au cas des ω-modèles, mais il faut maintenant définir l'interprétation des termes, pour pouvoir interpréter l'égalité. Il est alors possible de montrer qu'un modèle formel est un modèle au sens usuel, soit l'analogue du lemme 2.2.2.

Soit donc $\mathcal{U}$ une structure du second ordre qui satisfait les axiomes de Peano (premier ordre), et $\mathbb{N}$ ses entiers. Soit M un modèle formel dans $\mathcal{U}$. On lui associe un modèle $\mathcal{M}$ au sens usuel. Si M est défini par M_s, M_+, $M_\times$, M_2, $\mathcal{M}$ a même ensemble de base que $\mathcal{U}$, le 0 est le même mais le successeur est interprété à l'aide de M_s :

$$s_{\mathcal{M}}(n) = n' \text{ ssi } \mathcal{U} \models M_s(n, n').$$

Les opérations $+$ et $\times$ sont interprétées de façon analogue. On pose

$$M'_k = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \mathcal{U} \models M(n, k)\} \;.$$

On peut, étant donné un prédicat, définir une formule à 3 variables libres, que l'on note à nouveau val_M, qui code la satisfaction dans le modèle associé à M. La définition est analogue mais un peu plus compliquée que celle définie pour les ω-modèles. La formule à une variable libre Mod qui signifie que M est un modèle du second ordre (c'est-à-dire du schéma de compréhension) se définit comme Mod_ω (mais avec la nouvelle définition de Val_M bien-sûr).

On peut injecter de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers de $\mathcal{U}$ dans l'ensemble des entiers de $\mathcal{M}$ par $n \mapsto s^n_{\mathcal{M}}(0)$. Tout entier de $\mathcal{M}$ qui n'est pas dans l'image de $\mathbb{N}$ est un majorant strict de cet image. En tant que modèle du premier ordre, le modèle éventuellement « non standard » (non standard du point de vue de $\mathcal{U}$) des entiers de $\mathcal{M}$ est une extension finale du modèle « standard » $\mathbb{N}$ des entiers de $\mathcal{U}$ (résultat « classique »).

Le lemme suivant parait quasi-identique au lemme 2.2.2, mais il faut faire attention que les entiers sont nécessairement ceux de $\mathcal{U}$ pour que cela ait un sens.

Lemme 2.3.2 *$\mathcal{U}$, $\mathcal{M}$ et M étant définis comme ci-dessus, pour toute formule F du langage de l'arithmétique dont les variables libres sont $x_1, \ldots, x_p$, $X_1, \ldots, X_q$, pour tous paramètres $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_p)$ entiers de $\mathcal{U}$, et $\vec{A} = (M'_{m_1}, \ldots, M'_{m_q})$, en posant $n = [n_1, \ldots, n_p]$, et $m = [m_1, \ldots, m_q]$:*

$$\mathcal{M} \models F\ [\vec{x} := \vec{n}, \vec{X} := \vec{A}] \quad \textit{ssi} \quad \mathcal{U} \models \mathrm{Val}_M(\ulcorner F \urcorner, n, m)\ .$$

À nouveau ce lemme se « formalise ». C'est possible car aux formules correspondent des codes entiers de l'univers de départ qui continuent d'avoir un sens dans les modèles formels. On définit donc dans $\mathcal{M}$ un modèle par un prédicat (unaire) N, qui permet de définir un prédicat (unaire) $\mathcal{N}$ qui lui est un modèle dans $\mathcal{U}$.

Lemme 2.3.3 *M, N et $\mathcal{N}$ étant définis comme ci-dessus, étant entendu que $\ulcorner \mathrm{Val}_N(f, \underline{n}, \underline{m}) \urcorner$ se définit en fonction de n et m par substitution, alors on démontre en arithmétique du second ordre que :*

$$\forall n \forall m \forall f\ \big(\mathrm{Form}(f) \to (\mathrm{Val}_{\mathcal{N}}(f, n, m) \leftrightarrow \mathrm{Val}_M(\ulcorner \mathrm{Val}_N(f, \underline{n}, \underline{m}) \urcorner, 0, 0)\big)\ .$$

On n'a plus la conservation des formules du premier ordre (lemme 2.2.4), mais seulement celles des formules Σ^0_1.

Lemme 2.3.4 *Toujours avec les mêmes définitions, si F est un énoncé Σ^0_1, alors*

$$\mathcal{U} \models F \ \Rightarrow\ \mathcal{U} \models \mathrm{Val}_M(\ulcorner F \urcorner, 0, 0)$$

et si F est une formule Σ^0_1 à une variable libre x :

$$\{n \in \mathbb{N}\ /\ \mathcal{U} \models F[n]\} \subset \{n \in \mathbb{N}\ /\ \mathcal{U} \models \mathrm{Val}_M(\ulcorner F[\underline{n}] \urcorner, 0, 0)\}\ .$$

Démonstration. Les entiers du modèle $\mathcal{M}$ forment une extension finale de ceux du modèle $\mathcal{U}$. ■

Par conséquent, comme on se restreint à des théories T dont l'ensemble des axiomes est Σ^0_1, et donc également l'ensemble des théorèmes, ces axiomes et théorèmes restent des axiomes et théorèmes dans un modèle $\mathcal{M}$ de T. Par contre, de nouveaux théorèmes peuvent s'ajouter, qui ont alors des preuves codées par des entiers non standards.

2.3.2 Version sémantique du second théorème d'incomplétude

Le second théorème d'incomplétude peut se réénoncer sémantiquement, la cohérence de T s'écrit alors « il existe un modèle de T », que l'on sait formaliser. Cet énoncé est Σ_1^1 mais, comme le théorème de complétude (pour des théories dénombrables) se démontre clairement en arithmétique du second ordre, il équivaut à « il n'existe pas de démonstration de la contradiction dans T » qui est un énoncé Π_1^0 quand la théorie T est récursivement axiomatisable.

Dire que la cohérence de T n'est pas démontrable dans la théorie T se reformule alors par complétude.

Théorème 2.3.5 (Second théorème d'incomplétude, version sémantique) *Soit T une théorie du second ordre dans le langage de l'arithmétique, récursivement axiomatisable, et qui a pour conséquence l'arithmétique de Peano du premier ordre. Alors s'il existe un modèle de T, il existe un modèle de $T+$« il n'existe pas de modèle de T »,*

On s'aperçoit alors que ce dernier énoncé est analogue à celui donné pour le théorème de Rosser (théorème 2.2.5), mais transposé aux modèles du second ordre. L'hypothèse sur la théorie est plus forte : elle doit être récursivement axiomatisable, donc l'ensemble des axiomes doit être Σ_1^0 et pas seulement arithmétique. Même si le théorème 2.2.5 est un peu plus simple à démontrer que le second théorème d'incomplétude, les deux résultats ne sont pas comparables : hypothèse et conclusion sont modifiées, l'un n'est pas conséquence de l'autre.

Le lemme de diagonalisation 2.2.6 fournit un énoncé G vérifiant

$$G \equiv_{\mathbb{N}} \text{ « Il n'existe pas de modèle de } T + \ulcorner G \urcorner \text{ » .}$$

Lemme 2.3.6 *Tout modèle du second ordre de $T + G$ satisfait $T+$ « il n'existe pas de modèle de T ».*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\mathcal{U}$ un modèle de $T+G$, et M un objet du second ordre de $\mathcal{U}$ qui définit un modèle de T dans $\mathcal{U}$. Par construction de G, ce modèle satisfait $\neg G$, c'est-à-dire que dans le modèle défini par M il existe un objet du second ordre N qui définit un modèle de $T + G$. D'après le lemme 2.3.3, N définit un modèle dans $\mathcal{U}$, qui satisfait bien tous les axiomes de T au sens de $\mathcal{U}$, car l'ensemble de ceux-ci est défini par une formule Σ_1^0 (lemme 2.3.4), et qui satisfait G. ∎

Démonstration (théorème 2.3.5). Soit $\mathcal{U}$ un modèle de T. La formule G est définie comme ci-dessus, et vérifie donc le lemme 2.3.6. Deux cas sont possibles.

- Soit $\mathcal{U}$ est un modèle de G. D'après le lemme 2.3.6, $\mathcal{U}$ est déjà un modèle de $T+$ « il n'existe pas de modèle de T ».
- Soit $\mathcal{U}$ n'est pas un modèle de G. cela signifie qu'il existe un objet du second ordre M de $\mathcal{U}$ qui définit un modèle dans $\mathcal{U}$ de $T + \ulcorner G \urcorner$. On lui associe un modèle $\mathcal{M}$ qui satisfait les mêmes formules d'après le lemme 2.3.2, et qui est donc modèle de $T + G$ car la théorie T est définie par une formule Σ_1^0. On est ramené au cas précédent. ∎

Table des matières