Infographie - M1

Chapitre 5 - Suppression de parties cachées

V.Padovani
Equipe Preuves, Programmes et Systèmes, Université Paris 7

On s'intéresse ici au problème du rendu d'un ensemble de volumes opaques, donc pouvant se masquer mutuellement, placés dans l'espace 3D. Ces volumes seront supposés observés depuis un point infiniment lointain - on ne prend donc en compte aucun effet de perspective, et le rendu ne consiste qu'en une simple projection sur un plan (l'écran) de leurs parties visibles pour l'observateur.

Les volumes considérés sont des polyèdres convexes. Ces polyèdres peuvent éventuellement être en contact par sommet, par arête ou par face, mais ne doivent pas s'interpénétrer : aucune arête d'un polygone ne doit traverser une face d'autre polygone. La première étape du traitement consistera à déterminer, pour chaque polyèdre, l'ensemble de ses arêtes nécessairement invisibles pour l'observateur car masquées par le polyèdre lui-même.

La seconde étape consistera, pour chaque polyèdre et pour chaque arête d'un autre polyèdre, à déterminer si ce polyèdre masque une partie de cette arête, et, le cas échéant, à calculer la portion masquée. On utilisera ici l'algorithme de Roberts, historiquement le premier algorithme conçu pour résoudre ce problème.

Le rendu final consistera en l'affichage de toutes les portions d'arêtes qui ne sont masquées par aucun polyèdre.

1 Suppression des arêtes invisibles

On considère un polyèdre formé des faces $F_0, \dots F_{m-1}$. On supposera que les sommets de chaque face sont coplanaires, deux à deux distincts, que chaque face contient au moins trois points, et jamais trois points successifs alignés.

Le polyèdre est supposé convexe : pour chaque face, tous les sommets du polyèdre sont situés du même côté du plan contenant cette face. Si cette dernière hypothèse n'est pas vérifiée par une face donnée, il suffit de subdiviser le polyèdre en deux polyèdres en le coupant suivant le plan contenant cette face, puis de tester à nouveau la convexité des des deux polyèdres obtenus. On peut vérifier d'une part, que ce traitement termine, d'autre part, qu'au bout de ce traitement, chaque polyèdre engendré est convexe.

La convexité du polyèdre implique la convexité de chacune de ses faces. On supposera que deux faces distinctes ne sont jamais dans le même plan, c'est-à-dire, que pour chaque i, les sommets du polyèdre dans le même plan que F_i sont tous des sommets de F_i.

1.1 Calcul des faces avant et arrière

Soit $\vec{U}$ la direction du regard de l'observateur. Voici la manière dont on peut déterminer, pour chaque arête du polyèdre, si cette arête est masquée par le polyèdre lui-même.

1. Pour chaque i on calcule une normale $\vec{N_i}$ à F_i allant vers l'intérieur du polyèdre.

   Pour $F_i = P_0, \dots P_{n-1}$, le vecteur $\vec{V} = \vec{P_0P_1} \wedge \vec{P_0P_2}$ est une normale au plan contenant F_i. Soit Q un sommet quelconque du polyèdre n'appartenant pas à F_i. Si $\vec{V} \cdot \vec{P_0Q}$ est strictement positif, $\vec{V}$ va vers l'intérieur du polyèdre, et l'on peut poser $\vec{N_i} = \vec{V}$. Sinon, il est strictement négatif, et l'on peut poser $\vec{N_i} = -\vec{V}$.

2. Une face F_i est dite *avant* si $\vec{N_i}$ forme avec $\vec{U}$ un angle strictement plus petit que l'angle droit, *arrière* si $\vec{N_i}$ forme avec $\vec{U}$ un angle strictement plus grand que l'angle droit, et *ni avant, ni arrière* sinon.

   Déterminer si une face est avant peut donc se faire par simple calcul du produit scalaire de $\vec{U}$ et $\vec{N_i}$.

On peut alors vérifier qu'une arête est entièrement visible si elle fait partie d'au moins une face avant, et masquée par le polyèdre ou réduite à un point sinon - dans ce dernier cas, on considère qu'elle est invisible.

2 Algorithme de Roberts

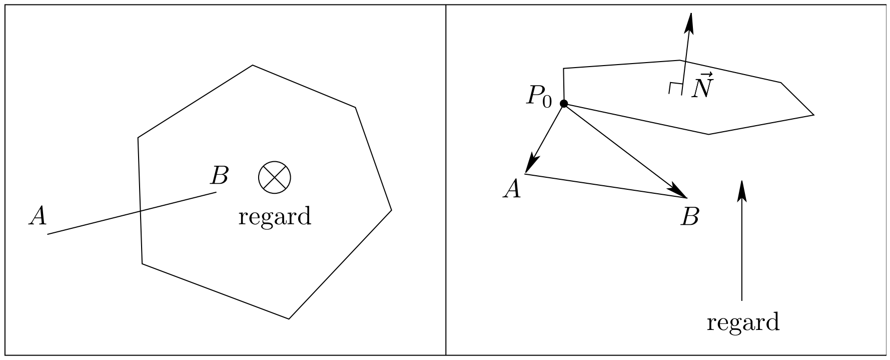
L'algorithme de Roberts considère :

1. un observateur regardant dans la direction $\vec{U}$,
   placé à l'infini vers $-\vec{U}$.
2. une face $F = P_0, \dots P_{n-1}$ $(P_i \equiv P_{i \bmod n})$
   de l'un des polyèdres de la scène,
   avant, au sens de la section précédente.
3. une normale $\vec{N}$ au plan contenant F, allant vers l'intérieur du polyèdre,
   (par hypothèse $\vec{N} \cdot \vec{U} > 0$)
4. un segment $[AB]$, qui est une arête appartenant à un autre polyèdre,
   (d'après les hypothèses intiales, elle ne traverse pas F).

L'algorithme détermine la partie visible du segment $[AB]$ relativement à cette face, en effectuant quatre tests successifs, du plus coûteux au moins coûteux. Son principal intérêt est son coût d'exécution linéaire..

2.1 Test n^o 1

Si les deux points A et B sont pour l'observateur placés *devant* le plan de la face, le segment est totalement visible.



Données à calculer :

- aucune, les données $\vec{N}$, P_0, A, B suffisent

Données à mémoriser :

- aucune.

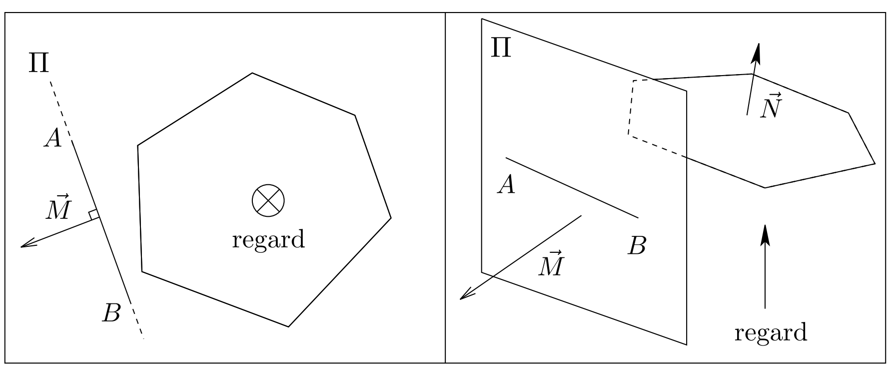
Calcul du test :

Le test est vérifié si et seulement si :

$$\vec{P_0A} \cdot \vec{N} \leq 0 \quad \text{et} \quad \vec{P_0B} \cdot \vec{N} \leq 0$$

2.2 Test n^o 2

Soit Π le plan contenant A, B et parallèle à $\vec{U}$. Si Π ne coupe pas la face, le segment est totalement visible.



Données à calculer :

- une normale $\vec{M}$ au plan Π. On peut prendre $\vec{M} = \vec{AB} \wedge \vec{U}$. Noter que dans le cas dégénéré ou $\vec{M}$ est le vecteur nul, le segment $[AB]$ est parallèle à $\vec{U}$, donc réduit à un point pour l'observateur. Par convention, on considère qu'il est invisible.

Données à mémoriser :

- la normale $\vec{M}$, réutilisée dans le test n^o 4.

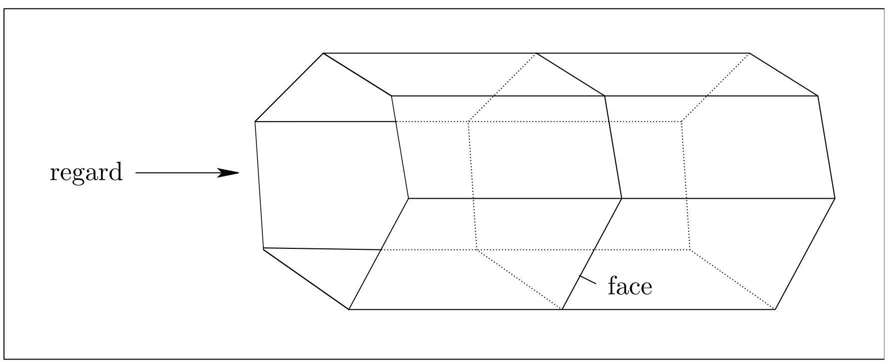
Calcul du test :

Le test est vérifié si tous les sommets de la face sont strictement du même côté de Π, à l'exception éventuellement de un ou deux d'entre eux qui sont sur le plan, c'est-à-dire si on a :

- $\vec{AP_i} \cdot \vec{M} \geq 0$ pour chaque $i \in [0, \ldots, n[$, ou bien,
- $\vec{AP_i} \cdot \vec{M} \leq 0$ pour chaque $i \in [0, \ldots, n[$.

2.3 Test n^o 3

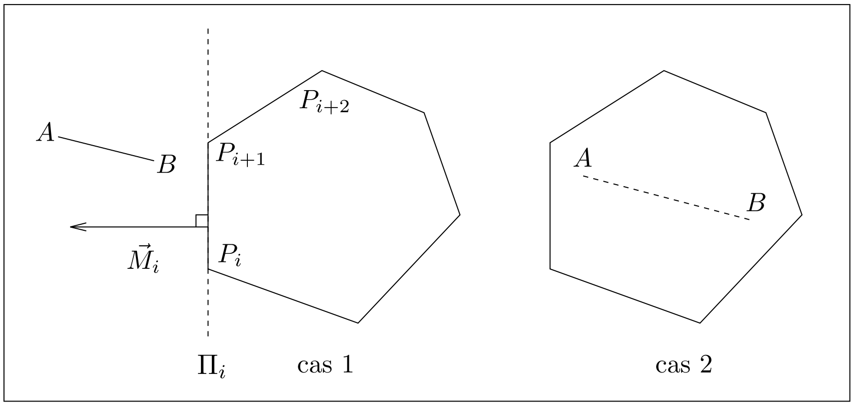
On considère maintenant le cylindre d'axe parallèle à $\vec{U}$ s'appuyant sur la face.



Le test n^{o}2 ayant été non concluant, le plan Π de ce test intersecte le bord de la face en exactement deux points. De manière équivalente, la droite (AB) intersecte le bors du cylindre en exactement deux points. En outre :

1. Si les points de $[AB]$ sont extérieurs (au sens faible) au cylindre et si l'un au moins des points A, B est strictement extérieur au cylindre, le segment est visible - si l'un de ces points est sur le cylindre, il se confond avec le bord de la face et peut être affiché.

2. Sachant que le test n^o n'a pas été vérifié et que, par hypothèse, $[AB]$ ne traverse pas la face, si A, B sont tous les deux intérieurs (au sens faible) au cylindre, alors A et B sont derrière la face ou sur son bord. Le segment est dans ce cas masqué par la face - sauf peut-être en l'une de ses extrémités qui se confond avec le bord de la face et peut ne pas être affiché.



Données à calculer :

- Pour chaque $i \in [0, \ldots, n[$ on calcule une normale $\vec{M}_i$ au plan Π_i contenant P_i, P_{i+1} et parallèle à $\vec{U}$. On peut prendre $\vec{M}_i = \vec{P_i P}_{i+1} \wedge \vec{U}$.
- Etant donné un point X quelconque, soit

  $$S(X) = (\vec{P_i X} \cdot \vec{M}_i) \times (P_i \vec{P}_{i+2} \cdot \vec{M}_i).$$

  Soit $\sigma_X(i)$ défini par :

  $$\begin{array}{rl} -1 & \text{si } S(X) < 0 \\ 0 & \text{si } S(X) = 0 \\ 1 & \text{si } S(X) > 0 \end{array}$$

  Le point X sera dit :

  – *(strictement) extérieur au cylindre* relativement à Π_i ssi $\sigma_X(i) < 0$
  – *sur le cylindre* relativement à Π_i ssi $\sigma_X(i) = 0$
  – *(strictement) intérieur au cylindre* relativement à Π_i ssi $\sigma_X(i) > 0$

  On calcule $\sigma_A(0), \ldots, \sigma_A(n-1)$ ainsi que $\sigma_B(0), \ldots, \sigma_B(n-1)$

Données à mémoriser :

- les normales M_i, les $\sigma_A(i)$ et les $\sigma_B(i)$, réutilisés dans le test n^o 4.

Calcul du test :

Voici les deux propriétés permettant de vérifier le test :

1. Si pour au moins un i l'un au moins des points A et B est extérieur au cylindre relativement à Π_i, et l'autre est soit extérieur soit sur le cylindre relativement à Π_i, alors tous les points de $[AB]$ sont (faiblement) extérieurs au cylindre.
2. Si pour chaque i les deux points A et B sont intérieurs ou sur le cylindre relativement à Π_i, alors A et B sont (faiblement) intérieurs au cylindre.

2.4 Test n^o 4

Arrivé à cette étape, on est sûr que le segment $[AB]$ coupe le cylindre en 1 ou 2 points. On doit maintenant calculer sa partie visible. On considère à nouveau la normale $\vec{N}$ à la face, la normale $\vec{M}$ du plan Π défini au test 2, les normales $\vec{M}_i$ des plans Π_i ainsi que les $\sigma_A(i)$ définis au test 3.

Données à calculer :

- Pour chaque $i \in [0, \ldots, n[$:
  - Soit α_i le α tel que $(\vec{P_iA} + \alpha \times \vec{AB}) \cdot \vec{M}_i = 0$ si ce α existe et est compris entre 0 et 1, indéfini sinon.
    Si α_i est défini, le point de coordonnées $A + \alpha_i(B - A)$ est alors le point d'intersection de $[AB]$ et du plan Π_i.
  - Soit β_i le β tel que $(\vec{AP_i} + \beta \times \vec{P_iP_{i+1}}) \cdot \vec{M} = 0$ si ce β existe et est compris entre 0 et 1, indéfini sinon.
    Si β_i est défini, le point de coordonnés $P_i + \beta_i(P_{i+1} - P_i)$ est le point d'intersection du segment $[P_iP_{i+1}]$ avec le plan Π.
  - soit R_i de coordonnées $A + \alpha_i \times (B - A)$ si α_i et β_i sont tous les deux définis, indéfini sinon.

Calcul de la partie visible :

Il y a 3 cas possibles :

1. Pour un i au moins, R_i est défini et est devant ou sur le plan de la face ($\vec{P_0R_i} \cdot \vec{N} \leq 0$). Dans ce cas, le segment traverse le bord du cylindre du test 3 devant la face, donc est visible.

2. Sinon, pour un unique i, R_i est défini et est derrière le plan de la face ($\vec{P_0R_i} \cdot \vec{N} > 0$). Le segment est visible depuis son extrémité extérieure au cylindre relativement au plan Π_i (A si $\sigma_A(i) < 0$, B sinon) jusqu'à R_i.

3. Sinon, pour deux i et j, R_i et R_j sont définis et $0 \leq \alpha_i < \alpha_j \leq 1$. Les parties visibles sont $[A\,R_i]$ et $[R_j\,B]$