Infographie - M1

Chapitre 1 - Rappels d'Algèbre

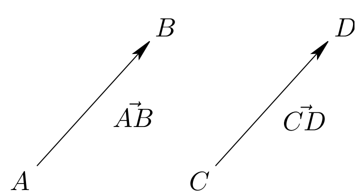
V.Padovani
Equipe Preuves, Programmes et Systèmes, Université Paris 7

Ce chapitre rappelle les notions élémentaires utilisées dans toute la suite : points, vecteurs, coordonnées, matrices, ainsi que trois opérations de base fréquemment utilisées en algorithmique infographique : produit en croix, produit scalaire, produit vectoriel.

1 Points, Vecteurs

Les notions de points et vecteurs seront considérées ici dans leur sens le plus intuitif - et non, si l'on souhaitait être plus rigoureux, en présentant les définitions formelles d'espace vectoriel et d'espace affine.

Un *point* est un emplacement dans l'espace usuel. Un *vecteur* est un trajet rectiligne entre deux points - on considérera comme égaux les trajets de même direction et de même longueur. En notant $\vec{AB}$ le trajet allant d'un point A à un point B, on a par exemple $\vec{AB} = \vec{CD}$ dans le diagramme ci-dessous :

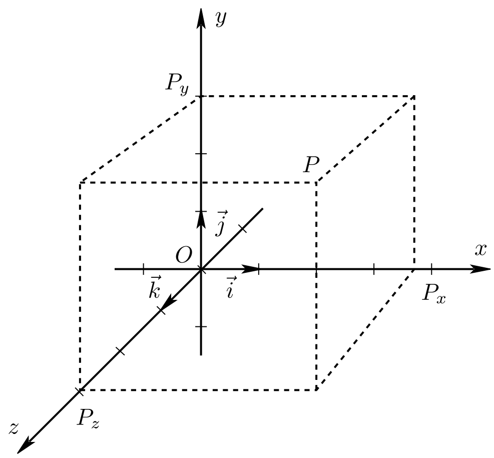


Deux vecteurs de directions égales ou opposées seront dits *colinéraires*. La longueur d'un vecteur se note $||\vec{U}||$. Le vecteur de longueur nul se note $\vec{O}$.

Pour tout réel k, on définit $k \times \vec{U}$ comme étant égal au vecteur de longueur $|k| \times ||\vec{U}||$ et, si cette longueur est non nulle : de même direction que $\vec{U}$ si $k > 0$; de direction opposée si $k < 0$. Le vecteur $(-1) \times \vec{U}$ se note aussi $-\vec{U}$. Pour $\vec{U} = \vec{AB}$ et $\vec{V} = \vec{BC}$, le vecteur $\vec{U} + \vec{V}$ est défini comme étant égal à $\vec{AC}$. Noter que $||\vec{U} + V|| \leq ||\vec{U}|| + ||\vec{V}||$. Le vecteur $\vec{U} - \vec{V}$ est défini comme $\vec{U} + (-\vec{V})$.

1.1 Modélisation de l'espace 3D usuel

Les points et vecteurs de l'espace à 3 dimensions seront uniformément représentés par des triplets de réels, interprétés comme des emplacements ou des trajets dans l'espace relativement à un certain *repère*. Un repère est la donnée d'un point de référence appelé *origine*, ainsi que de trois vecteurs deux à deux non colinéaires. En pratique, on choisit un repère standard $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ "orthonormé de type main droite", où O est l'origine et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont trois vecteurs de longeur 1, deux à deux orthogonaux, et orientés comme suit :



Une fois ce repère fixé, on peut associer chaque point P de l'espace un triplet de réels (P_x, P_y, P_z) appelé *coordonnées* de P, en convenant du fait que $\vec{OP} = P_x \times \vec{i} + P_y \times \vec{j} + P_z \times \vec{z}$. De même, à chaque vecteur $\vec{U}$ est associé un certain triplet (U_x, U_y, U_z) appelé *coordonnées* (ou *composantes*) de $\vec{U}$, et égales au coordonnées du point P tel que $\vec{U} = \vec{OP}$. Noter que O et $\vec{O}$ sont de coordonnées $(0, 0, 0)$.

1.2 Opérations sur les coordonnées

Dans la suite, on identifiera le plus souvent les points et vecteurs avec leurs coordonnées, en écrivant "*étant donné un point* $A = (A_x, A_y, A_z) \ldots$" ou encore "*soit* $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z) \ldots$", etc. En fonction du contexte, un triplet de réels pourra donc être vu soit comme un point, soit comme un vecteur. A moins d'un besoin particulier, un tel triplet sera toujours interprété dans le repère standard.

L'addition des vecteurs et la multiplication d'un réel et d'un vecteur définis plus haut se transposent naturellement en opérations sur les coordonnées, en posant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

et, pour tout réel $k \in \mathbb{R}$,

$$k \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \\ k \times z \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-1) \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix}$$

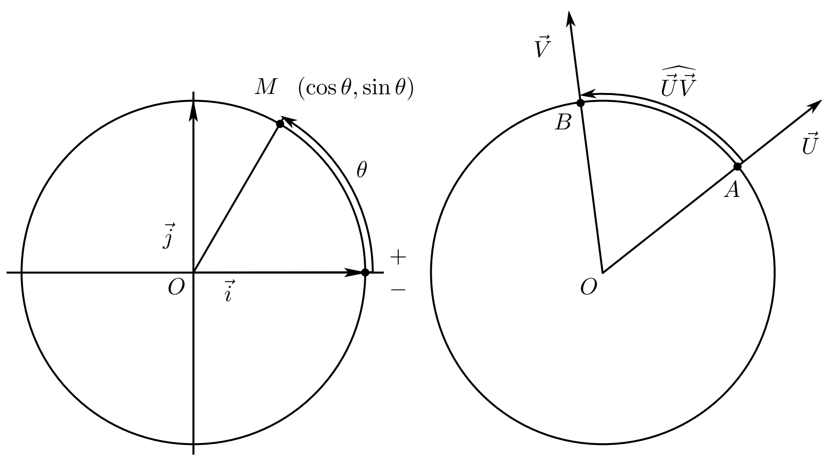
Avec ces conventions, et en identifiant librement points et vecteurs avec leurs coordonnées, on a

- $\vec{AB} = B - A$.
- $||\vec{U}|| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$ (dans le repère standard).

Toutes ces définitions se spécialisent aux couples de $\mathbb{R}^2$, représentant les positions de points dans l'espace à deux dimensions : il suffit d'oublier la troisième composante de chaque triplet, ou encore de lui donner une valeur toujours nulle.

2 Angles, sinus et cosinus

Un *angle* est la longueur signée d'un trajet le long d'un cercle de rayon 1. Le signe de cet angle est positif si ce trajet tourne dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre), négatif s'il tourne dans le sens indirect.



Supposons le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et ce cercle unité centré en 0. Soit M un point quelconque du cercle, et soit θ un trajet circulaire allant du point $(1, 0)$ à M. Les composantes des coordonnées de M sont appelées *cosinus* et *sinus* de θ, notées $\cos\theta$, $\sin\theta$.

Soient à présent $\vec{U}$, $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls. Soient A, B deux points du cercle tels que $\vec{U}$ et $\vec{OA}$ d'une part, $\vec{V}$ et $\vec{OB}$ d'autre part, soient colinéraires. L'*angle formé par* $\vec{U}$*,* $\vec{V}$ est défini comme la longueur du trajet circulaire allant de A à B dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Il se note $\widehat{\vec{U}\vec{V}}$.

3 Produit en croix (en dimension 2)

3.1 Définition

Le *produit croisé* ou *produit en croix* de deux vecteurs du plan est défini par:

$$\vec{U} \propto \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} = U_x V_y - U_y V_x$$

3.2 Propriétés

- *anti-commutatif* : $\vec{U} \propto \vec{V} = -(\vec{U} \propto \vec{V})$
- *associatif* avec le produit d'un réel et d'un vecteur :
  $(\alpha \times \vec{U}) \propto \vec{V} = \alpha \times (\vec{U} \propto \vec{V})$
- *distributif* par rapport à l'addition des vecteurs :
  $\vec{U} \propto (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \propto \vec{V}) + (\vec{U} \propto \vec{W})$

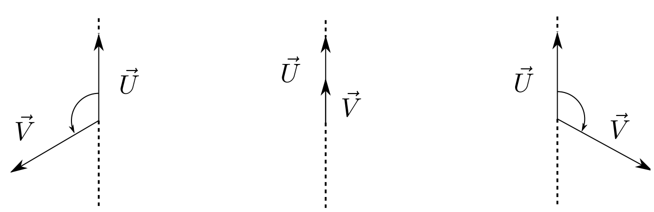
3.3 Interprétation

Le produit croisé permet de déterminer la colinéarité de deux vecteurs. Il fournit d'autre part un test de placement d'un point relativement à une droite. On a :

$$\vec{U} \propto \vec{V} = \| \vec{U} \| \times \| \vec{V} \| \times \sin \widehat{\vec{U}\ \vec{V}}$$

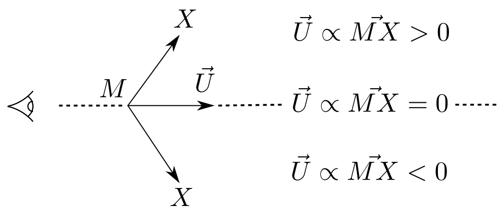
Supposons $\vec{U}$ et $\vec{V}$ non nuls. On a $\vec{U} \propto \vec{V} = 0$ si et seulement si l'angle formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est nul ou égal à π, c'est-à-dire si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.

Sinon, $\vec{U} \propto \vec{V}$ a même signe que l'angle formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$. La rotation de $\vec{U}$ alignant $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tourne alors : dans le sens *direct* si $\vec{U} \propto \vec{V} > 0$ (sens inverse des aiguilles d'une montre); dans le sens *indirect* si $\vec{U} \propto \vec{V} < 0$.



$\vec{U} \propto \vec{V} > 0$ $\qquad$ $\vec{U} \propto \vec{V} = 0$ $\qquad$ $\vec{U} \propto \vec{V} < 0$

Soit à présent $\mathcal{D}$ une droite contenant un point M, et de vecteur directeur $\vec{U}$ (X appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si : ou bien $X = M$; ou bien $\vec{MX}$ et $\vec{U}$ sont colinéaires). Pour un observateur placé en M et regardant dans la direction $\vec{U}$:



- $\vec{U} \propto \vec{MX} = 0 \Longleftrightarrow X$ est sur D
- $\vec{U} \propto \vec{MX} > 0 \Longleftrightarrow X$ est "à gauche" de D
- $\vec{U} \propto \vec{MX} < 0 \Longleftrightarrow X$ est "à droite" de D

Noter que le produit en croix permet de retrouver l'équation de la droite $\mathcal{D}$ à partir de la donnée de M et de $\vec{U}$. Pour $X = (x, y)$, on a :

$$X \in D \Longleftrightarrow \vec{U} \propto \vec{MX} = 0 \Longleftrightarrow U_x \times (y - M_y) - U_y \times (x - M_x) = 0$$

4 Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

4.1 Définition

Le *produit scalaire* de deux vecteurs de l'espace (ou du plan, en oubliant la composante z), est défini par :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = (U_x \times V_x) + (U_y \times V_y) + (U_z \times V_z)$$

4.2 Propriétés

- $\vec{U} \cdot \vec{U} = \| \vec{U} \|^2$
- *commutatif* $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
- *associatif* avec le produit d'un réel et d'un vecteur :
  $(\alpha \times \vec{U}) \cdot \vec{V} = \alpha \times (\vec{U} \cdot \vec{V})$
- *distributif* par rapport à l'addition des vecteurs :
  $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{V}) + (\vec{U} \cdot \vec{W})$

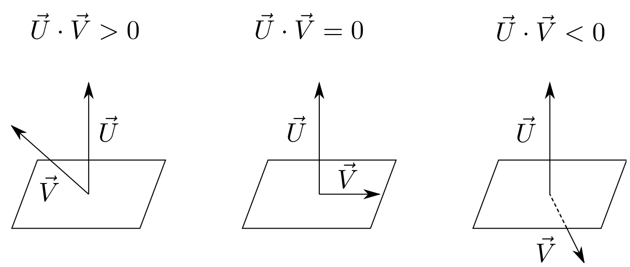
4.3 Interprétation

Le produit scalaire permet de déterminer la forme (aigu, droit, ou obtus) de l'angle formé par deux vecteurs non nuls. En 3D, il fournit également un test de placement d'un point relativement à un plan. On a :

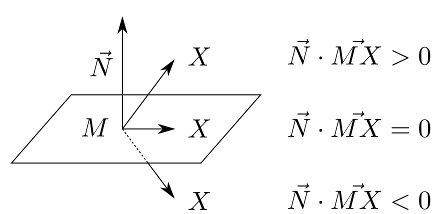
$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \parallel \vec{U} \parallel \times \parallel \vec{V} \parallel \times \cos \widehat{\vec{U}\ \vec{V}}$$

On en déduit :

- $\vec{U} \cdot \vec{V} > 0 \Leftrightarrow |\widehat{\vec{U}\ \vec{V}}| < \pi/2 \Leftrightarrow \vec{U}$ et $\vec{V}$ forment un angle aigu (strictement plus petit que l'angle droit)
- $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow |\widehat{\vec{U}\ \vec{V}}| = \pi/2 \Leftrightarrow \vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux
- $\vec{U} \cdot \vec{V} < 0 \Leftrightarrow |\widehat{\vec{U}\ \vec{V}}| > \pi/2 \Leftrightarrow \vec{U}$ et $\vec{V}$ forment un angle obtus (strictement plus grand que l'angle droit)



Soit à présent un plan Π contenant un point M, et de normale $\vec{N}$ (*i.e.* $\vec{N}$ est un vecteur orthogonal au plan). On a :



- $\vec{N} \cdot \vec{MX} = 0 \Longleftrightarrow X$ appartient à Π
- $\vec{N} \cdot \vec{MX} > 0 \Longleftrightarrow X$ est du même côté du plan que $\vec{N}$.
- $\vec{N} \cdot \vec{MX} < 0 \Longleftrightarrow X$ est du côté du plan opposé à $\vec{N}$.

L'équation du plan est $\Pi(X) = 0$, avec $\Pi(X) = \vec{N} \cdot \vec{MX}$, soit:

$$N_x \times (x - M_x) + N_y \times (y - M_y) + N_z \times (z - M_z) = 0$$

5 Produit vectoriel (dimension 3)

5.1 Définition

Le *produit vectoriel* de deux vecteurs de l'espace est défini par :

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} U_y & V_y \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_yV_z - U_zV_y \\ -U_xV_z + U_zV_x \\ U_xV_y - U_yV_x \end{pmatrix}$$

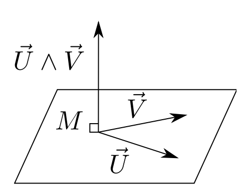
5.2 Propriétés

- anti-commutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$
- *associatif* avec le produit d'un réel et d'un vecteur :
  $(k \times U) \wedge \vec{V} = k \times (U \wedge V)$.
- *distributif* par rapport à l'addition des vecteurs :
  $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$.
- non associatif.

5.3 Interprétation

En dimension 3, le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls et non colinéaires produit un nouveau vecteur non nul, et orthogonal aux deux premiers (si $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ est nul, ou si $\vec{U}, \vec{V}$ sont colinéaires, leur produit vectoriel est le vecteur nul).

Il permet en particulier de calculer une normale $\vec{N}$ au plan engendré par un point M et deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (l'ensemble des points X tels que $\vec{MX} = \alpha \times \vec{U} + \beta \times \vec{V}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).



Noter que $\vec{V} \wedge \vec{U}$ est une normale au plan de direction opposée - le test de placement d'un point obtenu à partir de cette normale opposée fournit l'oppsé de la réponse obtenue en choisissant pour normale au plan le produit $\vec{U} \wedge \vec{V}$. Les propriétes suivantes sont démontrables :

- $\parallel \vec{U} \wedge \vec{V} \parallel = \parallel \vec{U} \parallel \times \parallel \vec{V} \parallel \times \sin\theta$ où $\theta = \widehat{\vec{U}\ \vec{V}}$.
- Si $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \neq \vec{0}$, $(M, \vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$ est un repère local de type "main droite" (la rotation continue de $\vec{U}$ alignant $\vec{U}$ avec $\vec{V}$ puis avec $(\vec{U} \wedge \vec{V})$ tourne dans le sens direct).

6 Matrice de Transformations

Les transformations de points ou de groupes de points telles que translations, rotations, changements d'échelle (scaling) sont habituellement représentées, à une dimension donnée (2 ou 3), par des matrices carrées, dont le côté est égal à la dimension courante plus 1. On traitera ici le cas de la dimension 3, avec des transformations uniformément représentées par des matrices 4×4. Toutes ces matrices seront de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.1 Rappels

Rappelons que le produit de deux matrices $n \times p$ et $p \times q$ est une matrice $n \times q$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

où $c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + \ldots + a_{ip} \times b_{pj}$. Pour toute matrice $\mathcal{M}$ de taille $n \times p$ et pour tout $X = (x_1, \ldots, x_p)$, on notera $(\mathcal{M}\,X)$ le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times x_1 + \ldots + a_{1p} \times x_p \\ \vdots \\ a_{n1} \times x_1 + \ldots + a_{np} \times x_p \end{pmatrix}$$

6.2 Calcul du transformé d'un point

La méthode pour calculer le transformé d'un point P par une transformation T représentée par la matrice $\mathcal{M}_T$ est toujours la même :

- On ajoute à P une coordonnée, toujours égale à 1.

  On obtient un point $P' = (P_x, P_y, P_z, 1)$.

- On calcule la valeur de $\mathcal{M}_T \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ 1 \end{pmatrix}$

  A noter que la matrice $\mathcal{M}_T$ est toujours construite de manière à ce que le dernier coefficient du résultat soit égale à 1 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}P_x + a_{12}P_y + a_{13}P_z + a_{14} \\ a_{21}P_x + a_{22}P_y + a_{23}P_z + a_{24} \\ a_{31}P_x + a_{32}P_y + a_{33}P_z + a_{34} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- On oublie la dernière composant de $Q' = (Q_x, Q_y, Q_z, 1)$ On obtient un point $Q = (Q_x, Q_y, Q_z)$ qui est l'image de P par T.

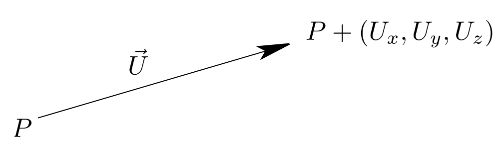
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{M} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}$$

6.3 Transformations usuelles

La *composition* des transformations se fait par simple produit de leurs matrices : $\mathcal{M}_{T \circ T'} = \mathcal{M}_T \times \mathcal{M}_{T'}$ Si T est inversible, l'*inverse* de T a pour matrice l'inverse de la matrice de T : $\mathcal{M}_{T^{-1}} = \mathcal{M}_T^{-1}$. Voici la forme des matrices correspondant à diverses transformations usuelles :

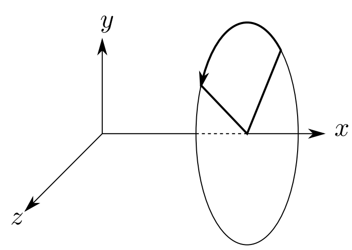
- *Translation* d'un point par un vecteur $\vec{U}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & U_x \\ 0 & 1 & 0 & U_y \\ 0 & 0 & 1 & U_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x + U_x \\ P_x + U_y \\ P_x + U_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



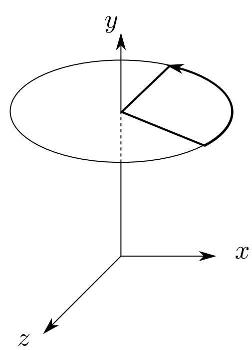
- *Rotation* d'angle θ autour de l'axe des x :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \times cos\theta - P_z \times sin\theta \\ P_y \times sin\theta + P_z \times cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$



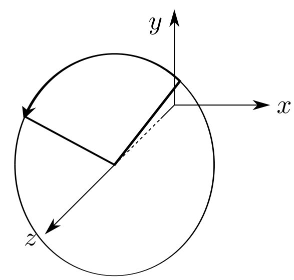
- *Rotation* d'angle θ autour de l'axe des y

$$\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \times cos\theta + P_z \times sin\theta \\ P_y \\ -P_x \times sin\theta + P_z \times cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$



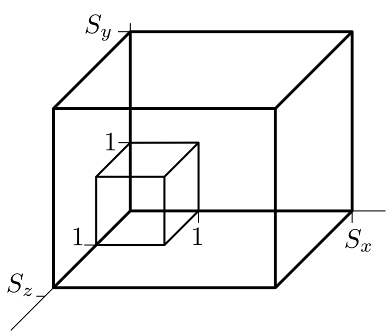
- *Rotation* d'angle θ autour de l'axe des z :

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \times cos\theta - P_y \times sin\theta \\ P_x \times sin\theta + P_y \times cos\theta \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



- *Changement d'échelle* non uniforme pour les trois axes, centré en l'origine :

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x \times P_x \\ S_y \times P_x \\ S_z \times P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



6.4 Autres transformations

Les rotations dont l'axe est une droite quelconque, toutes les formes de symétries, les cisaillements (shearing), se construisent facilement par composition de rotations, translations et changements d'échelles. Pour les déformations, en général les matrices ne suffisent plus.