Université Paris VII - Denis Diderot
D.E.A. Programmation : Sémantique, Preuves et Langages
Année universitaire 2000-2001

Rapport de stage

Présentation axiomatique de théorèmes de complétude forte en sémantique des jeux et en logique classique

Raphaël Montelatici

Directeur de stage
Paul-André Melliès

Stage effectué dans l'équipe Preuves, Programmes, Systèmes

Table des matières

Introduction

Un modèle pleinement adéquat est un modèle où deux termes syntaxiques sont identifiés si et seulement si ils ont la même sémantique opérationnelle.
La sémantique des jeux a permis de donner des modèles pleinement adéquats, construits de manière indépendante de la syntaxe, pour bon nombre de calculs ou de logiques (voir [2], [12] et le cours de DEA [4]). Les résultats de pleine adéquation s'obtiennent grâce à une propriété cruciale de définissabilité, qui permet de d'assurer que dans de tels modèles tous les morphismes proviennent de termes du calcul ou de preuves de la logique considérés.
Comme le fait remarquer Samson Abramsky dans [1], les constructions réalisées sont souvent très concrètes, et on n'a pas encore clairement identifié les propriétés clefs de ces constructions d'un point de vue plus abstrait. Dans ce même article, Abramsky donne des axiomes que doit vérifier certaines catégories afin d'obtenir des modèles de PCF vérifiant la propriété de définissabilité.
Du point de vue des jeux, le langage PCF correspond aux stratégies innocentes et bien parenthésées. En retirant la contrainte de bon parenthésage, on étend PCF avec des opérateurs de contrôle manipulant certaines formes de continuation. Du point de vue logique, cela revient à ajouter l'expressivité classique, par exemple au moyen de la formule de Pierce $((A \longrightarrow B) \longrightarrow A) \longrightarrow A$. Cela évoque le $\lambda\mu$-calcul, qui fournit une interprétation algorithmique de la logique classique.
D'autre part, la logique linéaire polarisée (LLP en abrégé) étudiée par Olivier Laurent (voir [11], [8]), une logique linéaire contrainte par des règles de polarisation, révèle des connexions intéressantes :

- la polarisation de LLP est à rapprocher de la dualité entre stratégies joueur et stratégies opposant : les catégories polaires décrites dans [4], qui permettent de faire cohabiter les stratégies joueur et opposant (et offrent une analyse du problème de Blass), sont des modèles de LLP,
- les réseaux disponibles pour LLP (dont l'étude est simplifiée par les contraintes de polarisation) offrent une syntaxe parallèle pour le calcul classique LC de Girard, mais aussi pour le $\lambda\mu$-calcul[1]. Par ailleurs, Peter Selinger a définit un $\lambda\mu$-calcul étendu avec des types disjonctifs dont il a étudié en détail la sémantique catégorique : les catégories de contrôle (cf. [14]),
- un résultat de définissabilité pour LLP a été obtenu par O. Laurent dans [10] vis-à-vis d'un modèle de jeux polarisés

Le présent mémoire de DEA commence par un compte-rendu synthétique de ces résultats.

Dans la première section, nous présentons la syntaxe et la sémantique (dans les catégories de continuation) de LLP sous forme de séquents. Nous étudierons les réseaux polarisés dans la deuxième section.
Dans la troisième section, nous nous inspirons de la démarche suivie par Samson Abramsky dans [2] en axiomatisant les propriétés utilisées par Olivier Laurent dans [10] pour obtenir le résultat de définissabilité par rapport à LLP.
Cela ne démontre pas encore de résultat analogue vis-à-vis du $\lambda\mu$-calcul. Cependant, nous montrons dans la quatrième section l'étroite correspondance (aux niveaux syntaxique et sémantique) entre le $\lambda\mu$-calcul avec disjonction de Selinger et les réseaux polarisés, et nous en déduisons un résultat de définissabilité pour le $\lambda\mu$-calcul avec disjonction.

[1]En se limitant à un sous-système des réseaux, voir [9].

Nous étendons ensuite notre analyse au $\lambda\mu$-calcul avec opérateur de point fixe.

Dans la cinquième section, nous proposons une “logique” avec point fixe LLP_Y basée sur la logique linéaire polarisée, qui est munie de réseaux de même facture. Sur le modèle de la section 3, nous énonçons une liste de propriétés conduisant à un théorème de définissabilité pour LLP_Y.
C'est pour nous l'occasion de rapprocher la sémantique des jeux et la théorie axiomatique des domaines développée par Gordon Plotkin et Alex Simpson dans [15], à partir des travaux de Freyd. En particulier, nous démontrons l'existence d'un opérateur de point fixe muni des propriétés requises en exhibant un jeu “entier naturel” à profondeur infinie qui est algèbre et co-algèbre libre de l'opérateur de suspension (ou *lift*).

Dans la dernière section de ce mémoire, nous étendons la correspondance $\lambda\mu$-calcul / LLP aux systèmes $\lambda\mu$-calcul avec point fixe / LLP_Y. Nous en déduisons un résultat de définissabilité pour le $\lambda\mu$-calcul avec point fixe.

1 Logique linéaire polarisée

1.1 Syntaxe

La logique linéaire polarisée LLP, définie par Olivier Laurent, est un système de déduction sur des formules munie d'une polarité (positive ou négative) écrites à l'aide des grammaires :

$$P \quad ::= \quad 1 \quad | \quad 0 \quad | \quad !N \quad | \quad P \oplus P \quad | \quad P \otimes P$$

$$N \quad ::= \quad \bot \quad | \quad \top \quad | \quad ?P \quad | \quad N \& N \quad | \quad N \parr N$$

On peut définir $A^{\perp}$ pour toute formule A en tenant compte des lois de De Morgan en logique linéaire. Ce méta-opérateur permet d'inverser la polarité des formules. Il est alors possible d'adopter la convention d'écriture suivante : les lettres A sont réservées aux formules positives et les formules négatives s'écrivent $A^{\perp}$.

Règles :
On les donne sous forme économe (monolatère).

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp}}ax \qquad \frac{\vdash \Gamma, A^{\perp} \quad \vdash \Delta, A}{\vdash \Gamma, \Delta}cut$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\otimes \qquad \frac{\vdash \Gamma, A^{\perp}, B^{\perp}}{\vdash \Gamma, A^{\perp} \parr B^{\perp}}\parr$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\oplus_1 \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\oplus_2 \qquad \frac{\vdash \Gamma, A^{\perp} \quad \vdash \Gamma, B^{\perp}}{\vdash \Gamma, A^{\perp} \& B^{\perp}}\&$$

$$\frac{}{\vdash 1}1 \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}\bot \qquad \frac{}{\vdash \Gamma, \top}\top$$

où le contexte de la règle $\top$ contient au plus une formule positive.

$$\frac{\vdash \mathcal{N}, A^{\perp}}{\vdash \mathcal{N}, !(A^{\perp})}! \quad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}?$$

où $\mathcal{N}$ est un contexte formé uniquement de formules négatives.

$$\frac{\vdash \Gamma, A^{\perp}, A^{\perp}}{\vdash \Gamma, A^{\perp}}c \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A^{\perp}}w \quad \frac{\vdash \Gamma, A^{\perp}, B^{\perp}, \Delta}{\vdash \Gamma, B^{\perp}, A^{\perp}, \Delta}x$$

Une induction structurelle immédiate donne le résultat :

Proposition 1.1 *Tout séquent $\vdash \Gamma$ conclusion d'une dérivation de LLP contient au plus une formule positive.*

1.2 Présentation alternative

Compte tenu du résultat précédent, il est possible de donner une présentation "positive" de LLP dans laquelle les séquents ont la forme $\Gamma \vdash \Pi$ où les contextes ne contiennent que des formules positives, Π contenant au plus une formule.

$$A \quad ::= \quad 1 \quad | \quad 0 \quad | \quad !(A^\perp) \quad | \quad A \oplus A \quad | \quad A \otimes A$$

et les règles sont :

$$\frac{}{A \vdash A}ax \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Pi \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash \Pi}cut$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Pi}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Pi}\parr \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\otimes$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Pi \quad \Gamma, B \vdash \Pi}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Pi}\& \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B}\oplus_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\oplus_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Pi}{\Gamma, 1 \vdash \Pi}\perp \qquad \frac{}{\vdash 1}1 \qquad \frac{}{\Gamma, 0 \vdash \Pi}\top$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, !(A^\perp) \vdash}? \qquad \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash !(A^\perp)}!$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Pi}{\Gamma, A \vdash \Pi}c \qquad \frac{\Gamma \vdash \Pi}{\Gamma, A \vdash \Pi}w \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Pi}x$$

1.3 Deux sous-systèmes remarquables : LLP^- et LLP_r

Nous définissons ici deux sous-systèmes importants de LLP : LLP_r et LLP^-.

SYSTÈME LLP_r :

Le système LLP_r est le fragment de LLP pour lequel le *contexte positif*[2] doit être vide pour toutes les règles.
Plus précisément, voici en notation positive le système de règles de LLP_r :

$$\frac{}{A \vdash A}ax \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash}cut^*$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash}{\Gamma, A \otimes B \vdash}\parr^* \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\otimes$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \quad \Gamma, B \vdash}{\Gamma, A \oplus B \vdash}\&^* \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B}\oplus_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\oplus_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, 1 \vdash}\perp^* \qquad \frac{}{\vdash 1}1 \qquad \frac{}{\Gamma, 0 \vdash}\top^*$$

[2]Il s'agit du contexte à droite du signe $\vdash$ noté Π dans les règles de LLP autres que x.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, !(A^{\perp}) \vdash}? \quad \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash !(A^{\perp})}!$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash}{\Gamma, A \vdash}c^* \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, A \vdash}w^* \quad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Pi}x$$

où les règles dont le nom est marqué par * sont celles qui ont été restreintes.

Système LLP^{-} :

C'est un sous-système de LLP moins restrictif que LLP_r : on demande que les *contextes positifs* Π soient vides seulement pour les règles $\&$ et $\top$.

1.4 Sémantique dans les catégories de continuations

Pour interpréter la logique LLP, nous partons des travaux de Selinger sur les catégories de contrôle, et plus particulièrement l'analyse donnée par Melliès et Selinger dans [5], ou dans le cours de DEA [4], où sont définies les catégories polaires :

Définition 1.2 (Catégorie polaire classique) *Une catégorie polaire classique est spécifiée par :*

- *une catégorie* positive $\mathcal{P}$ *à la fois cartésienne* $(\mathcal{P}, \otimes, 1)$ *et co-cartésienne* $(\mathcal{P}, \oplus, 0)$*, telle que le produit distribue sur la somme*
- *une catégorie* négative $\mathcal{N}$ *équivalente à la catégorie* $\mathcal{P}^{op}$ *par deux foncteurs :*

$$(\_)^{\perp} : \mathcal{P}^{op} \longrightarrow \mathcal{N} \qquad\qquad (\_)^{\perp} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}^{op}$$

  qui a donc une structure co-cartésienne $(\mathcal{N}, ⅋, \perp)$ *et cartésienne* $(\mathcal{P}, \&, \top)$*.*
- *deux foncteurs* $? : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N}$ *et* $! : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}$ *et des isomorphismes naturels :*

$$(?A)^{\perp} \simeq !(A^{\perp}) \qquad\qquad (!A)^{\perp} \simeq ?(A^{\perp})$$

- *pour tout objet positif* B*, une adjonction*

$$\frac{?(A \otimes B) \longrightarrow_{\mathcal{N}} C}{A \longrightarrow_{\mathcal{P}} !(B^{\perp} ⅋ C)}\Phi$$

L'idée des catégories polaires est de définir $A \multimap B$ comme $?A \longrightarrow_{\mathcal{N}} B$ ou $A \longrightarrow_{\mathcal{P}} !B$, et de reconstruire les catégories de contrôle associées comme la catégorie de co-Kleisli $cK_{?!}(\mathcal{N})$.
Les catégories polaires furent motivées initialement par une analyse des polarités en sémantique des jeux, cependant Melliès et Selinger montrent dans [5] que leur axiomatisation dans le cas "classique" se ramène à la notion habituelle de catégorie de continuation.

Définition 1.3 (Catégorie de continuation) *Une catégorie de continuation* $\mathcal{C}$ *est une catégorie :*

- *munie d'un objet terminal* 1 *et d'un bifoncteur* $\otimes$ *tels que* $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ *soit cartésienne*
- *munie d'un objet initial* 0 *et d'un bifoncteur* $\oplus$ *tels que* $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ *soit co-cartésienne*
- *telle que* $\otimes$ *distribue sur* $\oplus$
- *munie d'un objet* R *et d'un foncteur contravariant* $R^{(\_)} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{op}$ *tels qu'on ait une famille de bijections* $\Lambda_{A,B}$

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow R}{A \longrightarrow R^{B}}$$

  naturelle en A,B.

Les catégories polaires classiques sont des catégories de continuation ...

Proposition 1.4 *Soit une catégorie polaire classique (nous reprenons les notations de la définition). Alors $\mathcal{P}$ est une catégorie de continuation où l'on définit l'objet R et le foncteur $R^{(\_)}$ par :*

- $R = !\bot$
- $R^{(\_)} = !((\_)^{\bot})$

...et les catégories de continuation sont des catégories polaires classiques :

Proposition 1.5 *Soit une catégorie de continuation $\mathcal{C}$ et une catégorie $\mathcal{N}$ équivalente à la catégorie $\mathcal{C}^{op}$ par deux foncteurs : $(\_)^{\bot} : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{N}$ et $(\_)^{\bot} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{C}^{op}$ (bien sûr on peut prendre directement $\mathcal{N} = \mathcal{C}^{op}$).*
On obtient une catégorie polaire classique en définissant les foncteurs ! et ? par :

- $!(\_) = R^{(\_)\bot}$
- $?(\_) = (R^{(\_)})^{\bot}$

Ici, nous travaillerons essentiellement avec les catégories de continuation. Notre objectif sera donc de déplacer l'axiomatique d'Abramsky de la catégorie de co-Kleisli $cK_{?!}(\mathcal{N})$ vers la catégorie de continuation sous-jacente.

Explicitons la définition des catégories de continuation :

• La naturalité en A,B de la famille de bijections $\Lambda_{A,B}$

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow R}{A \longrightarrow R^B}$$

signifie que pour tous morphismes $f : A \otimes B \longrightarrow R$, $h_A : A' \longrightarrow A$ et $h_B : B' \longrightarrow B$, on a :

$$h_A; \Lambda_{A,B}(f); R^{h_B} = \Lambda_{A',B'}(h_A \otimes h_B; f)$$

• Le fait que $\otimes$ distribue sur $\oplus$ s'exprime précisement en disant que les morphismes canoniques

$$(A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \xrightarrow{(id_A \otimes in_l^{B,C})+(id_A \otimes in_r^{B,C})} A \otimes (B \oplus C)$$

et

$$(A \otimes C) \oplus (B \otimes C) \xrightarrow{(in_l^{A,B} \otimes id_C)+(in_r^{A,B} \otimes id_C)} (A \oplus B) \otimes C$$

ont chacun un inverse, que l'on note :

$$distrib_d^{A,B,C} : A \otimes (B \oplus C) \longrightarrow (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$
$$distrib_g^{A,B,C} : (A \oplus B) \otimes C \longrightarrow (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

Définissons la sémantique de LLP dans une catégorie de continuation :

• Interprétation des formules : introduisons la notation R^A pour $!(A^{\bot})$. Cela suggère de manière évidente l'interprétation dans une catégorie de continuation de toute formule par l'objet qui se note de la même manière.

• Interprétation des démonstrations : une preuve de $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ est interprétée par un morphisme de $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \longrightarrow B$ et une preuve de $A_1, \ldots, A_n \vdash$ par un morphisme de $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \longrightarrow R$, à l'aide des règles de formation suivantes :

- $\dfrac{}{A \vdash A} ax \rightsquigarrow id_A$
- $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Pi \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash \Pi} cut \rightsquigarrow$ à partir de $\left\{ \begin{array}{l} f : \Gamma \otimes A \longrightarrow \Pi \\ g : \Delta \longrightarrow A \end{array} \right.$ on forme $\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{id_\Gamma \otimes g} \Gamma \otimes A \xrightarrow{f} \Pi$
- $\dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Pi} x$

  $\rightsquigarrow$ on précompose $f : \Gamma \otimes A \otimes B \otimes \Delta \longrightarrow \Pi$ par $\Gamma \otimes B \otimes A \otimes \Delta \xrightarrow{id_\Gamma \otimes \gamma_{B,A} \otimes id_\Delta} \Gamma \otimes A \otimes B \otimes \Delta$
- $\dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Pi}{\Gamma, A \vdash \Pi} c \rightsquigarrow$ on précompose $f : \Gamma \otimes A \otimes A \longrightarrow \Pi$ par $\Gamma \otimes A \xrightarrow{id_\Gamma \otimes \Delta_A} \Gamma \otimes A \otimes A$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \Pi}{\Gamma, A \vdash \Pi} w \rightsquigarrow$ on précompose $f : \Gamma \longrightarrow \Pi$ par $\Gamma \otimes A \xrightarrow{id_\Gamma \otimes t_A} \Gamma$
- $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Pi}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Pi} \parr$ rien à faire
- $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \otimes \rightsquigarrow$ à partir de $\left\{ \begin{array}{l} f : \Gamma \longrightarrow A \\ g : \Delta \longrightarrow B \end{array} \right.$ on forme $\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes B$
- $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Pi \quad \Gamma, B \vdash \Pi}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Pi} \&$

  $\rightsquigarrow$ à partir de $\left\{ \begin{array}{l} f : \Gamma, A \longrightarrow \Pi \\ g : \Gamma, B \longrightarrow \Pi \end{array} \right.$ on forme $\Gamma \otimes (A \oplus B) \xrightarrow{distrib_d^{\Gamma,A,B}} (\Gamma \otimes A) \oplus (\Gamma \otimes B) \xrightarrow{f+g} \Pi$
- $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B} \oplus_1 \rightsquigarrow$ on postcompose $f : \Gamma \longrightarrow A$ par $in_l^{A,B}$
- $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B} \oplus_2 \rightsquigarrow$ on postcompose $f : \Gamma \longrightarrow B$ par $in_r^{A,B}$
- $\dfrac{}{\vdash 1} 1 \rightsquigarrow id_1$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \Pi}{\Gamma, 1 \vdash \Pi} \bot$ rien à faire
- $\dfrac{}{\Gamma, 0 \vdash \Pi} \top \rightsquigarrow \Gamma \otimes 0 \simeq 0 \xrightarrow{i_\Pi} \Pi$
- $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, !(A^\bot) \vdash} ? \rightsquigarrow$ à partir de $f : \Gamma \longrightarrow A$ on construit $R^f : R^A \longrightarrow R^\Gamma$

  et on forme $\Gamma \otimes R^A \xrightarrow{\gamma_{\Gamma,R^A}} R^A \otimes \Gamma \xrightarrow{\Lambda^{-1}_{R^A,\Gamma}(R^f)} R$
- $\dfrac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash !(A^\bot)} ! \rightsquigarrow$ à partir de $f : \Gamma \otimes A \longrightarrow R$ on forme $\Gamma \xrightarrow{\Lambda_{\Gamma,A}(f)} R^A$

Remarques :

• Nous avons muni la logique d'une règle d'échange x explicite. Dans les catégories de continuation, le passage de l'interprétation d'une preuve d'un séquent à celle du même séquent dont on aurait permuté les formules se fait en précomposant par des morphismes de structure. On a une propriété de cohérence qui nous dit que deux morphismes de même domaine obtenus à partir de preuves ne différant que par des utilisations de la règle x sont nécessairement égaux. Ainsi dans ce mémoire, on prendra la liberté de ne pas toujours mentionner les règles d'échanges utilisées dans les dérivations. Cela permet de donner une présentation plus légère de l'interprétation des réseaux de preuve, une autre forme de syntaxe étudiée dans la section suivante, et qui ne met pas en évidence d'ordre particulier sur les formules.

• Si on note $\nu_A : A \longrightarrow R^{R^A}$ où $\nu_A = \Lambda_{A,R^A}[\gamma_{A,R^A}; \Lambda^{-1}_{R^A,A}(id_{R^A})]$, la transformation indiquée pour la règle ? peut se réécrire :

$$\gamma_{\Gamma,R^A}; \Lambda^{-1}_{R^A,\Gamma}(R^f) = \Lambda^{-1}_{\Gamma,R^A}(f; \nu_A)$$

En effet : $\gamma_{\Gamma,R^A};\Lambda^{-1}_{R^A,\Gamma}(R^f) = \gamma_{\Gamma,R^A};id_{R^A} \otimes f;\Lambda^{-1}_{A,R^A}(id_{R^A}) = f \otimes id_{R^A};\gamma_{A,R^A};\Lambda^{-1}_{A,R^A}(id_{R^A}) = f \otimes id_{R^A};\Lambda^{-1}_{A,R^A}(\nu_A) = \Lambda^{-1}_{\Gamma,R^A}(f;\nu_A)$

Proposition 1.6 (Compositionnalité) *Soit π une dérivation de LLP dans laquelle on repère une occurrence de séquent $\Gamma \vdash \Pi$ notée o. Si π' est une dérivation obtenue en remplaçant dans π le sous-arbre de racine o par une démonstration de même sémantique, alors $[\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]$.*

Immédiat par induction sur la taille de la preuve.
□

Remarque : il est clair que la sémantique définie pour LLP s'adapte à LLP_r et LLP^-, qui s'interprètent donc dans les catégories de continuation.

2 Réseaux de preuve polarisés

Les réseaux de preuve pour la logique linéaire complète ont été introduits dans [7]. Il s'agit d'une nouvelle syntaxe représentant les preuves par des graphes. Cela permet d'identifier les démonstrations modulo commutations de règles, et permet de traiter facilement l'élimination des coupures. Leur spécialisation à la logique linéaire polarisée (qui possède un critère de correction très simple), est apparue dans le mémoire de DEA d'Olivier Laurent (voir [8]).
Nous choisissons de définir la β-réduction des preuves de LLP (c'est-à-dire l'élimination des coupures) directement à partir de la syntaxe des réseaux. Notre objectif est ensuite de définir la sémantique de ces réseaux dans les catégories de continuation.

Les réseaux que l'on définit pour LLP et LLP^- présentent des différences importantes. Dans ce mémoire nous traitons en détail les réseaux pour LLP^-, car ce sont ceux-là qui seront utiles lorsque nous nous intéresserons au $\lambda\mu$-calcul. Nous expliquerons ce qui se produit lorsque l'on tente une extension des réseaux au système LLP entier.

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Pré-réseaux pour LLP^-)

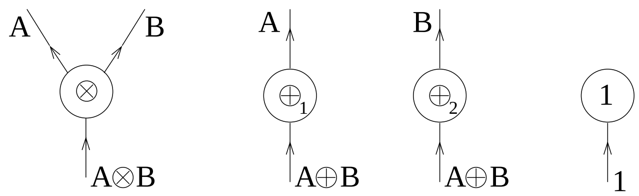


FIG. 1 – Les noeuds positifs

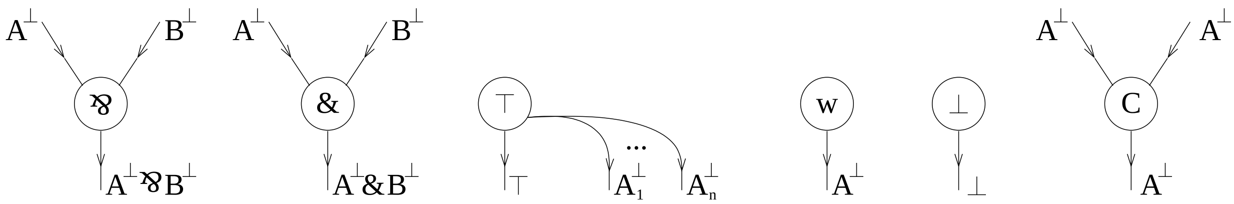


FIG. 2 – Les noeuds négatifs

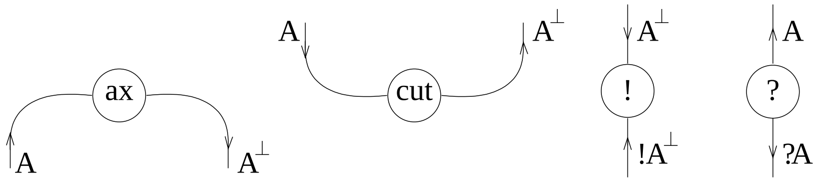
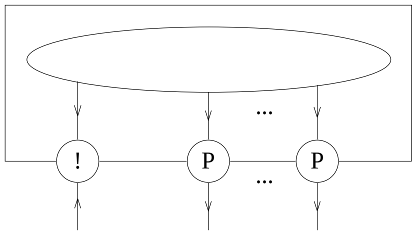
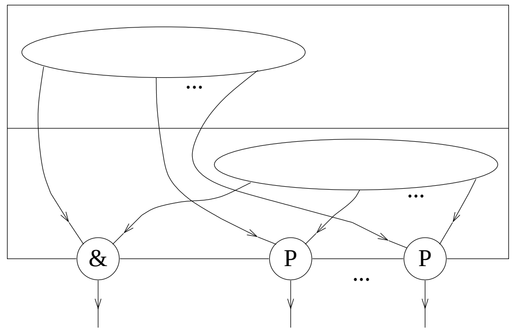


FIG. 3 – Les noeuds mixtes

A partir de cette grammaire, il est possible de traduire toute dérivation de LLP^- dans un pré-réseau. Pour cela, il convient d'utiliser des "boîtes" ! et $\&$, munies de portes secondaires toutes négatives :





Signalons que les portes P n'ont pas le status de noeud. D'autre part on définit la notion de niveau d'un sous-réseau comme d'habitude afin de mesurer son degré d'emboîtement.

C'est parce que le noeud $\top$ et la boîte $\&$ n'ont pas de conclusion positive que ces pré-réseaux conviennent à LLP^- et pas à LLP tout entier.

Nous ne détaillons pas la syntaxe des pré-réseaux ici. Elle est définie avec précision dans [11] et n'offre guère de surprise.
On note PN l'application qui à toute dérivation de LLP^- associe son pré-réseau correspondant.

Le problème qui se pose est celui de la sémantique des réseaux. Nous savons interpréter les dérivations de LLP dans une catégorie de continuation. Pour faire passer cette interprétation sur les réseaux, il est nécessaire de résoudre deux problèmes :
– Dans quelles circonstances un pré-réseau peut-il provenir d'une dérivation de LLP^- ?
– Les différentes dérivations conduisant à un pré-réseau donné ont-elles même sémantique ?
La réponse à ces questions, apportée dans les deux sections qui suivent, va permettre de définir la sémantique d'une classe de pré-réseaux appelés *corrects* (ce sont ceux qui proviennent d'une dérivation), comme la sémantique de n'importe quelle dérivation dont ils proviennent.

2.2 Pré-réseaux corrects et séquentialisation

Définition 2.2 (Graphe de correction) *Le graphe de correction d'un pré-réseau $\mathcal{R}$ est le graphe* orienté *obtenu à partir de $\mathcal{R}$ en remplaçant les* $!$*-boîtes et les* $\&$*-boîtes du niveau zéro par des noeuds axiomes généralisés. Tout comme pour les pré-réseaux, l'orientation des graphes de correction résulte de celle qui est donnée à chacun des noeuds.*

Définition 2.3 (Noeuds initiaux dans le graphe de correction) *Un noeud initial d'un graphe de correction est un noeud initial pour la relation d'orientation dont sont munis les graphes de correction.*

Définition 2.4 (Critère de correction) *Un pré-réseau est dit correct, ou que c'est un réseau de preuve, lorsque son graphe de correction est acyclique et possède exactement un noeud initial différent de w et $\perp$, et que récursivement tous les pré-réseaux contenus dans les boîtes* $!$ *ou* $\&$ *sont corrects.*

Remarques :
• Une conclusion positive d'un réseau de preuve est conclusion d'un noeud initial du graphe de correction, donc d'après le critère précédent un réseau de preuve a au plus une conclusion positive.

• L'acyclicité du graphe de correction d'un réseau de preuve permet de définir un ordre partiel sur les noeuds situés au niveau 0 à partir de l'orientation attribuée à chaque noeud. On parlera de l'ordre d'orientation.

Proposition 2.5 *Les pré-réseaux qui proviennent de dérivations séquentielles de LLP^{-} vérifient le critère de correction.*

Par induction et par cas ...
□

Nous montrons dans la suite de cette section la réciproque de cette proposition.

Définition 2.6 (Arbre positif) *Les arbres positifs se définissent par induction :*
- *Un noeud axiome, un noeud 1, et la !-boîte d'un réseau sont des arbres positifs,*
- *Deux arbres positifs dont les conclusions positives respectives sont prémisses d'un noeud $\otimes$ forment un arbre positif,*
- *Un arbre positif dont la conclusion positive est prémisse d'un noeud $\oplus$ forme un arbre positif.*

Dans un réseau $\mathcal{R}$, constituer un arbre positif de conclusion une arête positive donnée est équivalent à être le plus petit sous-réseau correct de $\mathcal{R}$ ayant cette conclusion positive (c'est son royaume*, cf. [8]).*

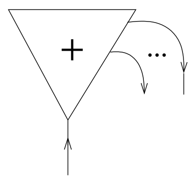


Fig. 4 – Représentation d'un arbre positif

En prémisse d'une arête typée par une formule positive, on est sûr de trouver un arbre positif. C'est une structure cernable et duplicable, qui en ce sens généralise les !-boîtes.

Définition 2.7 (Noeud de séquentialisation) *Dans un réseau de preuve, un noeud de séquentialisation est un noeud c, $\perp$, w, $\parr$, $\top$ ou & du niveau 0, qui est maximal pour l'ordre d'orientation.*

La proposition suivante est au coeur du théorème de séquentialisation, tel qu'il apparaît dans [11].

Proposition 2.8 *Tout réseau de preuve $\mathcal{R}$ est une instance d'un des 4 cas de figure (mutuellement exclusifs) suivants :*

• Cas 1 : $\mathcal{R}$ a un noeud de séquentialisation qui est un noeud c, w, $\perp$ ou $\parr$.

• Cas 2 : le réseau de preuve $\mathcal{R}$ n'a pas de noeud de séquentialisation c, w, $\perp$ ou $\parr$ et $\mathcal{R}$ a un noeud *cut* au niveau 0. En choisissant un noeud *cut* du niveau 0 maximal pour l'ordre d'orientation, $\mathcal{R}$ se présente comme sur la figure 6.

On considère un noeud *cut* du niveau 0 qui est maximal pour l'ordre d'orientation. Soit $\mathcal{R}_1$ le pré-réseau constitué des noeuds strictement supérieurs au *cut* dans l'ordre d'orientation (les noeuds formant la frontière de boîtes amenant la totalité de leur boîte avec eux). On note $\mathcal{R}_2$ le pré-réseau formé de $\mathcal{R}$ privé de $\mathcal{R}_1$ et du lien *cut*. L'examen des différents cas possibles pour le noeud dont la conclusion est la formule négative du *cut* montre que $\mathcal{R}_2$ vérifie le critère de correction (dans chaque cas où ce noeud est initial dans le graphe de correction de $\mathcal{R}_2$, il était déjà initial dans le graphe de correction de $\mathcal{R}$). D'autre part $\mathcal{R}_1$ est un réseau de preuve car il est réduit à l'arbre positif dont la formule positive du *cut* est la racine. En effet dans le cas contraire, l'arbre positif en question aurait un noeud sous l'une de ses feuilles. En suivant l'ordre d'orientation on traverserait d'abord des noeuds négatifs $\parr$ et c (C et $\&$ sont impossibles puisque le *cut* est au niveau 0) puis forcément un noeud mixte (même argument que dans le raisonnement du paragraphe précédent). Ce noeud mixte ne peut pas être un *cut* par maximalité du *cut* considéré au départ, ni un ! : contradiction. □

• Cas 3 : $\mathcal{R}$ a un noeud de séquentialisation (qui n'est pas un noeud c, w, $\perp$ ou $\parr$) et n'a pas de noeud *cut* au niveau 0. Alors $\mathcal{R}$ est comme représenté sur la figure 7.

Le noeud de séquentialisation en question est donc du type $\&$ ou $\top$. Les noeuds de séquentialisation $\&$ et $\top$ étant aussi des noeuds initiaux du graphe de correction, le critère de correction implique que $\mathcal{R}$ possède un unique noeud de séquentialisation N_s (qui est $\&$ ou $\top$).
Alors N_s est le seul noeud initial dans le graphe de correction.
En effet s'il n'était pas le seul, on aurait par ailleurs des noeuds initiaux w ou/et $\perp$. Leur conclusion doit être reliée à un autre noeud, sinon ils seraient des noeuds de séquentialisation. En parcourant le réseau de preuve dans le sens prémisses $\rightarrow$ conclusion à partir de ces noeuds, on traverse une succession (peut-être vide) de noeuds négatifs (uniquement des $\parr$ et c car $\&$ ou C obligeraient les noeuds de départ w ou/et $\perp$ à être contenus dans une boîte, et donc à ne pas être initiaux dans le graphe de correction). Puisqu'il n'y a pas de noeud *cut*, cette traversée s'arrête des conclusions du réseau de preuve ou des noeud mixtes. Mais puisque *cut* est interdit, un noeud mixte serait un noeud !, ce qui est impossible (car là encore les noeuds de départ devraient être dans une boîte). Donc la succession s'arrête sur des noeuds c, w, $\perp$ ou $\parr$ dont les conclusions sont conclusions du réseau de preuve : on serait en face de noeuds de séquentialisation autres que N_s, ce qui est contradictoire.
En définitive, N_s est à la fois le seul noeud initial du graphe de correction et le seul noeud de séquentialisation. Si $N_s = \top$, $\mathcal{R}$ est forcément réduit à ce seul noeud $\top$, et si $N_s = \&$, $\mathcal{R}$ est constitué uniquement d'une $\&$-boîte.
□

• Cas 4 : $\mathcal{R}$ n'a pas de noeud de séquentialisation et n'a pas de noeud *cut* au niveau 0. $\mathcal{R}$ est comme représenté sur la figure 8.

Par un raisonnement analogue, on se rend compte que $\mathcal{R}$ est un arbre positif dans le cas où il a une conclusion positive, ou un arbre positif juché sur un noeud ? sinon. □

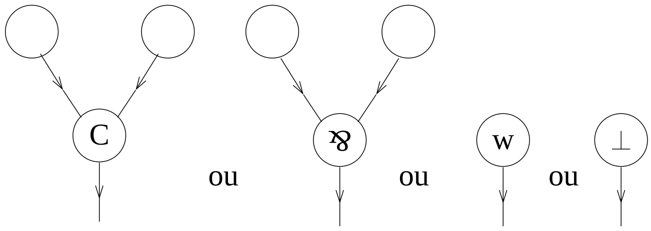


FIG. 5 – Cas 1

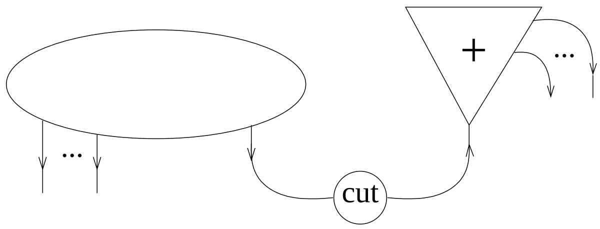


FIG. 6 – Cas 2

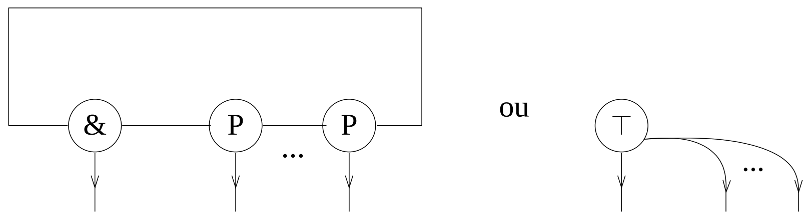


FIG. 7 – Cas 3

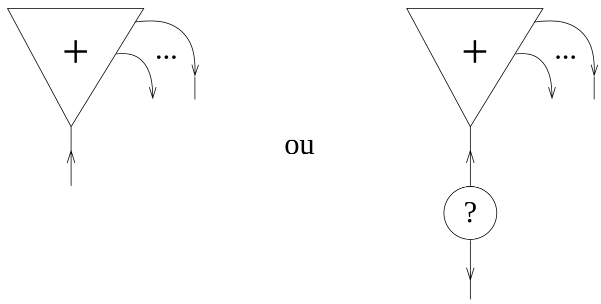


FIG. 8 – Cas 4

En fait tout réseau de preuve provient d'une dérivation en calcul des séquents, et on a une procédure dite de *séquentialisation* qui permet de construire une telle dérivation à partir d'un réseau de preuve :

Théorème 2.9 (Séquentialisation) *Pour tout réseau de preuve $\mathcal{R}$, il existe une dérivation π de LLP^- telle que $PN(\pi) = \mathcal{R}$. Une telle dérivation est obtenue par l'algorithme de séquentialisation décrit dans la démonstration qui suit.*

L'algorithme S construit récursivement la dérivation π du bas vers le haut. Il identifie un noeud du réseau de preuve qui va correspondre à l'application d'une règle finale, en procédant par cas sur $\mathcal{R}$.

• Cas 1 : $\mathcal{R}$ a un noeud de séquentialisation qui est un noeud c, w, $\perp$ ou $\parr$. Il est clair que l'on obtient la dérivation π à partir de la dérivation π' construite récursivement d'après le sous-réseau constitué de $\mathcal{R}$ privé d'un noeud de séquentialisation choisi, en terminant la preuve par la règle correspondant à ce noeud.

• Cas 2 : le noeud *cut* maximal du niveau 0 sépare $\mathcal{R}$ en deux réseaux de preuve. $\mathcal{R}$ se séquentialise en regroupant à l'aide de la règle *cut* les deux séquentialisations obtenues récursivement.

• Cas 3 : $\mathcal{R}$ est réduit à un noeud $\top$ ou est constitué d'une &-boîte : dans les deux cas la dernière étape de la dérivation est évidente.

• Cas 4 : si $\mathcal{R}$ est un arbre positif juché sur un noeud d, on séquentialise en terminant par une règle d. Et si $\mathcal{R}$ est un arbre positif, on procède par cas sur la racine de l'arbre positif ($\otimes$, $\oplus$, 1 ou !), chacun d'entre eux se laissant séquentialiser de manière évidente. □

Ainsi le critère de correction détermine exactement quels sont les pré-réseaux qui sont des preuves de LLP^- : les réseaux de preuve.

REMARQUES :
• L'algorithme précédent doit effectuer un certain nombre de choix dans la construction de la dérivation séquentielle. On parlera de *procédure de séquentialisation* pour désigner une exécution particulière de l'algorithme. Si on note $S(\mathcal{R})$ le calcul effectué par une procédure de séquentialisation, on a $PN(S(\mathcal{R})) = \mathcal{R}$.
Deux procédures distinctes peuvent calculer des dérivations différentes, si bien que S ne peut pas se représenter comme une fonction monovaluée.
• En suivant l'algorithme de séquentialisation, on s'aperçoit aisément qu'il associe à un réseau de preuve sans conclusion positive une dérivation de LLP_r (ce qui rejoint le résultat 3.8 de conservativité de LLP_r vis-à-vis de LLP).

2.3 Sémantique des réseaux de preuve

Lemme 2.10 *Soient π une dérivation et S une procédure de séquentialisation de $PN(\pi)$. Il existe une dérivation π' telle que :*
- $[\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]$
- $PN(\pi') = PN(\pi)$
- *la première étape de séquentialisation effectuée par S correspond à la dernière règle de π'.*

La première étape de la procédure de séquentialisation S détermine une règle ρ qui sera la dernière de la dérivation $S(PN(\pi))$, différente en général de la dernière règle de π. Cependant le noeud (et parfois la boîte) de $PN(\pi)$ qui est ainsi déterminé par S est contruit par PN à partir de π : on peut identifier dans la dérivation π le sous-arbre dont la dernière règle notée ρ' correspond à ce noeud. On démontre le lemme par récurrence sur la profondeur de ρ' dans π.
Si ρ' est la dernière règle de π, il n'y a rien à faire : la dérivation π répond déjà au problème.
Sinon, procédons par cas sur la structure de $PN(\pi)$. Les cas 3 et 4 obligent ρ' à être la dernière règle de π. Il suffit de regarder les cas 1 et 2. On note ρ'' la règle en dessous de ρ' dans π.
Dans le cas 1, S va choisir un noeud $\parr$, c, w ou $\perp$ séquentialisant. Par exemple dans le cas de $\parr$, la situation est la suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{\Gamma_0, A, B \vdash \Pi_0}}{\Gamma_0, A \parr B \vdash \Pi_0}\rho'}{\cdots}\rho''}{}\quad \cdots}{\Gamma, A \parr B \vdash \Pi}\rho$$

ρ'' ne peut pas être une règle ! ou & car le noeud $\parr$ est au niveau zéro. Donc ρ'' est une règle $\parr$, c, w, $\perp$, $\otimes$, $\oplus$, ? ou *cut*. Il est alors facile de voir qu'il est possible de permuter les règles ρ' et ρ'', de telle façon que la sémantique soit inchangée, de même que le réseau de preuve associé par PN : on s'est ramené à une nouvelle dérivation en ayant fait diminuer la profondeur de ρ'.
Les autres sous-cas du cas 1 sont similaires, et il en va de même pour le cas 2. On réussit toujours à faire diminuer la profondeur de ρ' par une permutation de règle, sans modifier le réseau de preuve associé ni la sémantique (ici encore parce que la règle en dessous de ρ' ne peut pas être & ou !). □

Corollaire 2.11 *Soit π une dérivation de LLP^- et S une procédure de séquentialisation de $PN(\pi)$. On a $[\![S(PN(\pi))]\!] = [\![\pi]\!]$.*

La démonstration se fait par induction sur la taille de $PN(\pi)$.
Si $PN(\pi)$ n'a qu'un noeud, le résultat est immédiat.
Sinon, on applique le lemme précédent, ce qui donne π' de même sémantique que π, tel que $PN(\pi') = PN(\pi)$ et dont la dernière règle correspond à la première étape de séquentialisation effectuée par S. Soient $\pi_1, \ldots, \pi_n$ les sous-arbres de π' qui correspondent aux prémisses de la dernière règle de π'. $PN(\pi_1), \ldots, PN(\pi_n)$ sont les réseaux de preuve obtenus après la première étape de S. Par hypothèse d'induction, $[\![S(PN(\pi_1))]\!] = [\![\pi_1]\!], \ldots, [\![S(PN(\pi_n))]\!] = [\![\pi_n]\!]$. Or la construction catégorique qui fait passer de $[\![\pi_1]\!], \ldots, [\![\pi_n]\!]$ à $[\![\pi']\!]$ est la même que celle qui fait passer de $[\![S(PN(\pi_1))]\!], \ldots, [\![S(PN(\pi_n))]\!]$ à $[\![S(PN(\pi'))]\!]$ et donc $[\![S(PN(\pi'))]\!] = [\![\pi']\!]$.
On peut donc conclure que $[\![S(PN(\pi))]\!] = [\![\pi]\!]$. $\square$

Corollaire 2.12 *Soient π et π' deux dérivations de LLP^-. On a*

$$PN(\pi) = PN(\pi') \Longrightarrow [\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]$$

Soit S une procédure de séquentialisation de $PN(\pi) = PN(\pi')$. On a $[\![\pi]\!] = [\![S(PN(\pi))]\!] = [\![S(PN(\pi'))]\!] = [\![\pi']\!]$.
$\square$

Ainsi on peut voir en quoi les réseaux de preuve polarisés constituent une syntaxe plus proche de la sémantique.
De plus cela permet de définir la sémantique d'un réseau de preuve polarisé dans les catégories de continuation :

Définition 2.13 *Soit $\mathcal{R}$ un réseau de preuve polarisé. On définit sa sémantique $[\![\mathcal{R}]\!]$ comme n'importe quel $[\![\pi]\!]$ où π est une dérivation de LLP^- telle que $PN(\pi) = \mathcal{R}$ (d'après le théorème de séquentialisation, un tel π existe toujours).*

Scholie 2.14 *Pour toute dérivation π, on a $[\![PN(\pi)]\!] = [\![\pi]\!]$.*

2.4 Elimination des coupures

Une coupure dans un réseau de preuve est une occurrence d'un noeud *cut*, qui relie deux fils typés par A et $A^\perp$. Il est possible de fournir des règles de réécriture des réseaux qui permettent d'éliminer toutes les coupures. Ces règles de β-réduction figurent ci-après.

Les propriétés suivantes ont été démontrées par Olivier Laurent :

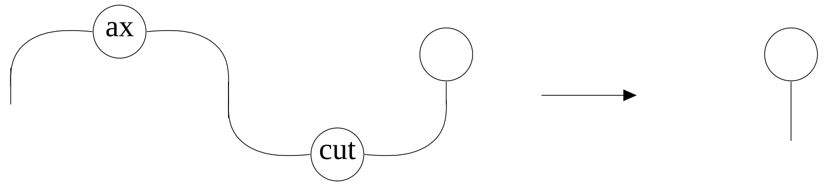
Proposition 2.15 *La correction des pré-réseaux est conservée par élimination des coupures.*

Proposition 2.16 *L'élimination des coupures est un processus confluent et fortement normalisant.*

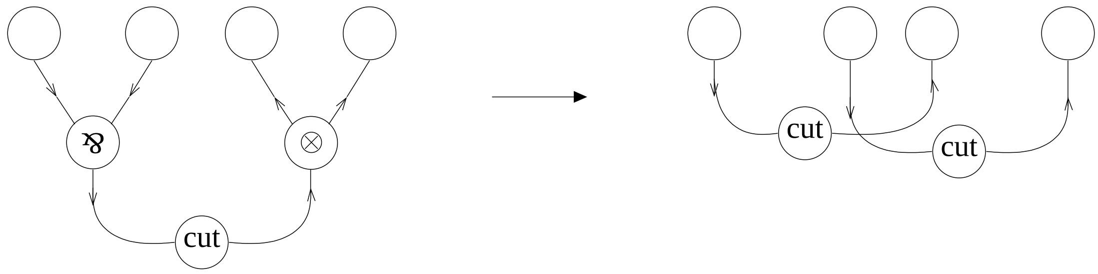
Théorème 2.17 (Soundness) *L'élimination des coupures dans les réseaux de preuve laisse la sémantique invariante.*

Règles d'élimination des coupures :

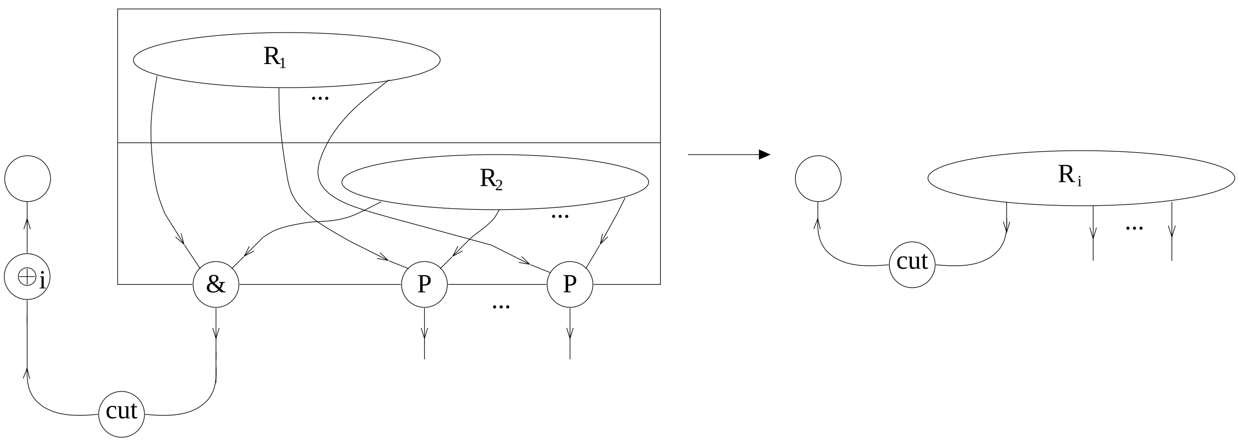
– Coupure axiome :



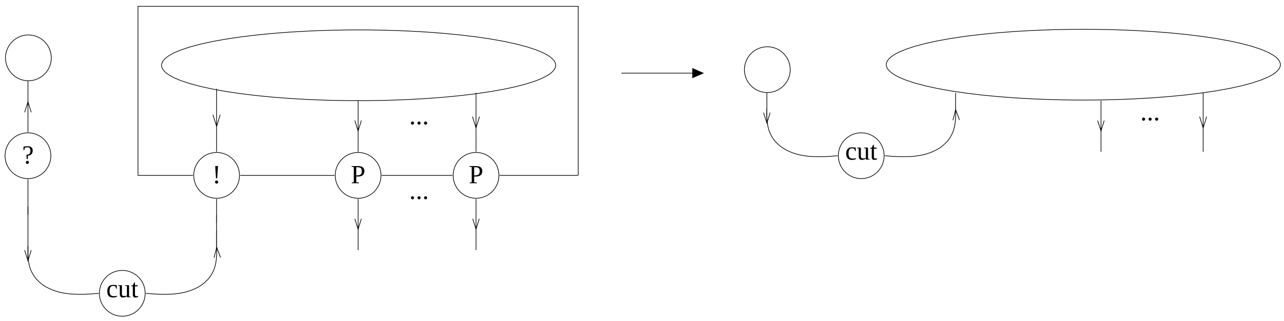
– Coupure multiplicative :



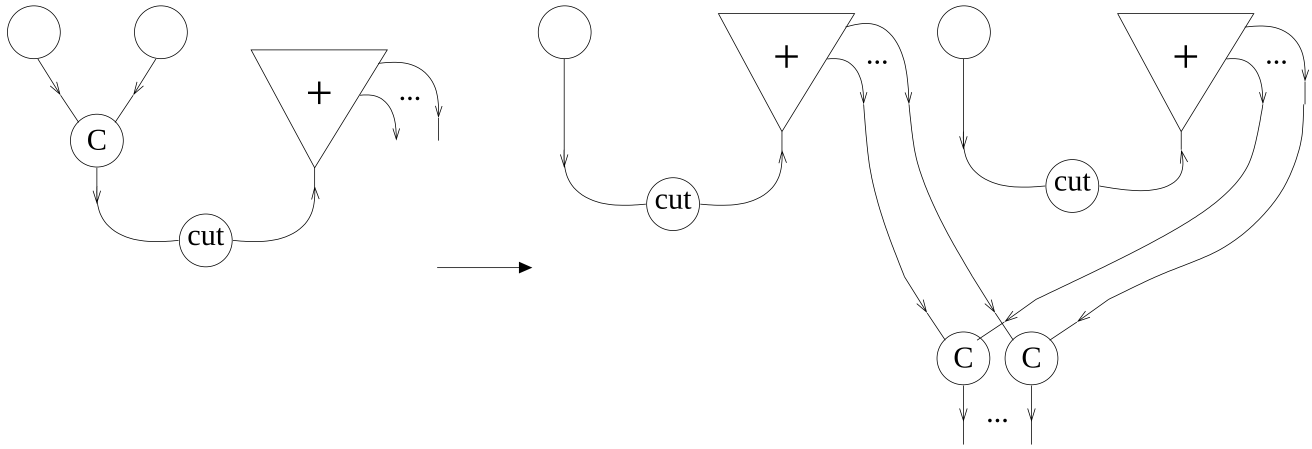
– Coupure additive :



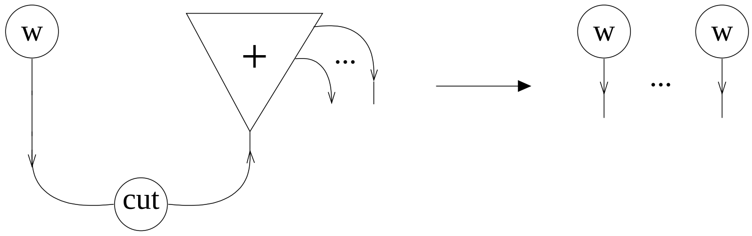
– Coupure déréliction :



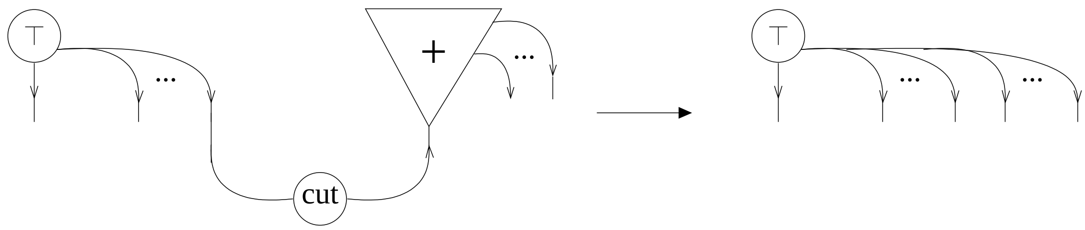
– Coupure contraction :



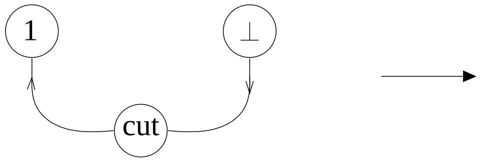
– Coupure affaiblissement :



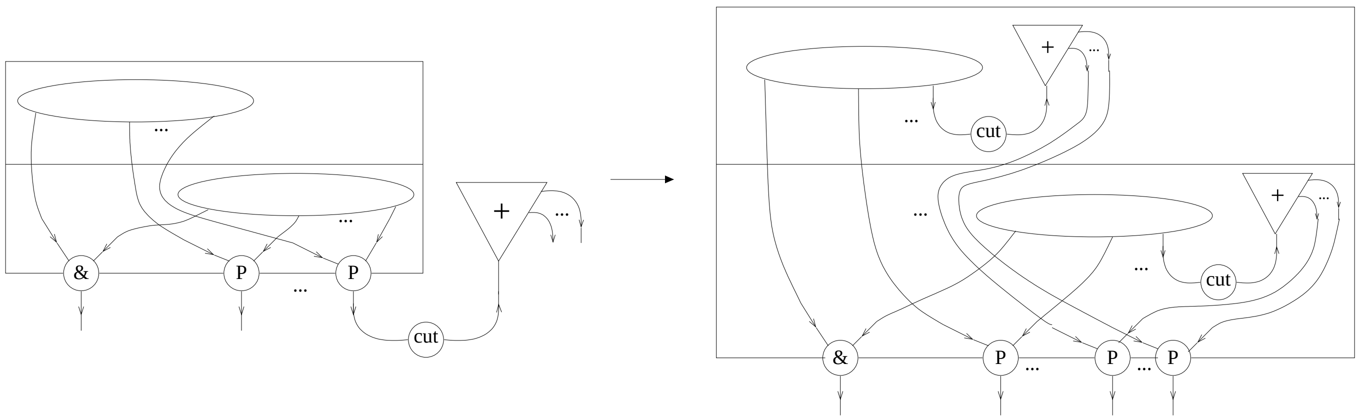
– Coupure auxilliaire constante additive :



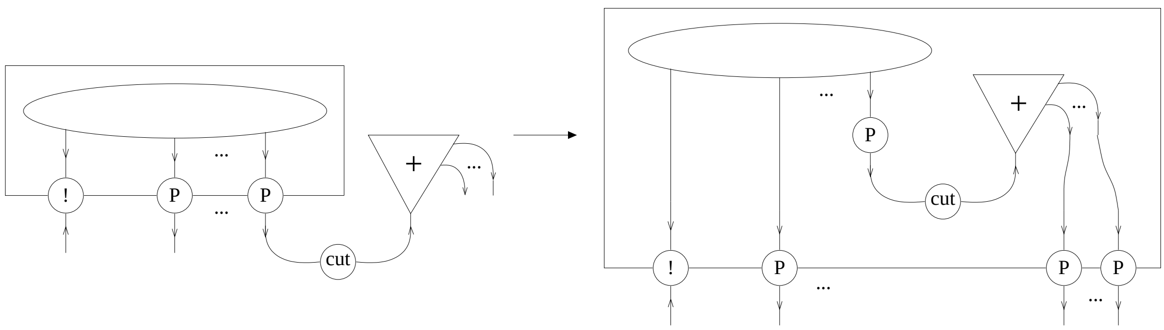
– Coupure constante multiplicative :



– Coupure auxilliaire additive :



– Coupure auxilliaire exponentielle :



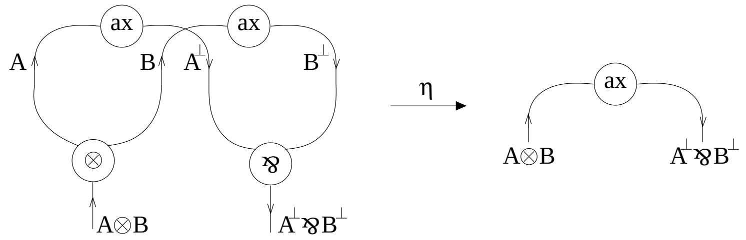
2.5 De LLP^- à LLP

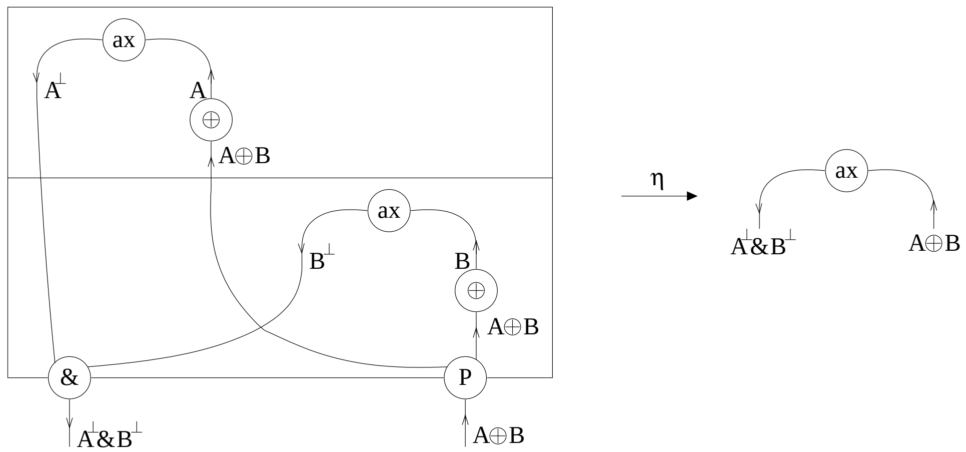
Les pré-réseaux pour les système LLP complet s'obtiennent en autorisant une porte positive pour la &-boîte, et en permettant une conclusion positive au noeud $\top$.

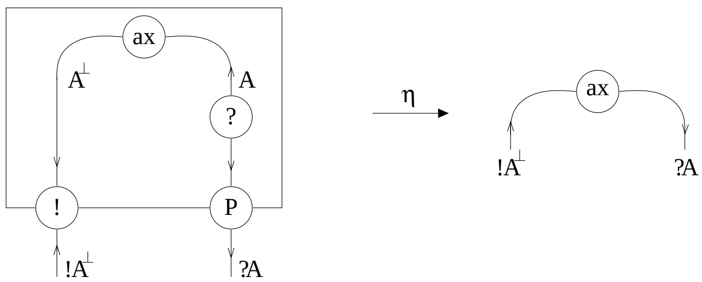
Ce sont ces réseaux qui ont été étudiés les premiers par O. Laurent (voir [8]).
L'apparition de conclusions positives sur des noeuds n'en possédant pas a plusieurs conséquences. La notion d'arbre positif perd toute sa commodité, et l'élimination des coupures doit traiter de nouveaux cas.
Plusieurs propriétés demeurent. Le critère de correction est le même, et la propriété de séquentialisation (vers LLP) est valide.
On peut encore définir la sémantique d'un pré-réseau correct comme celle de n'importe quelle dérivation de LLP dont il provient. On a la propriété que deux dérivations de LLP ayant

même réseau de preuve ont même sémantique.
La β-réduction a toujours la propriété de *soundness* pour les catégories de continuation.

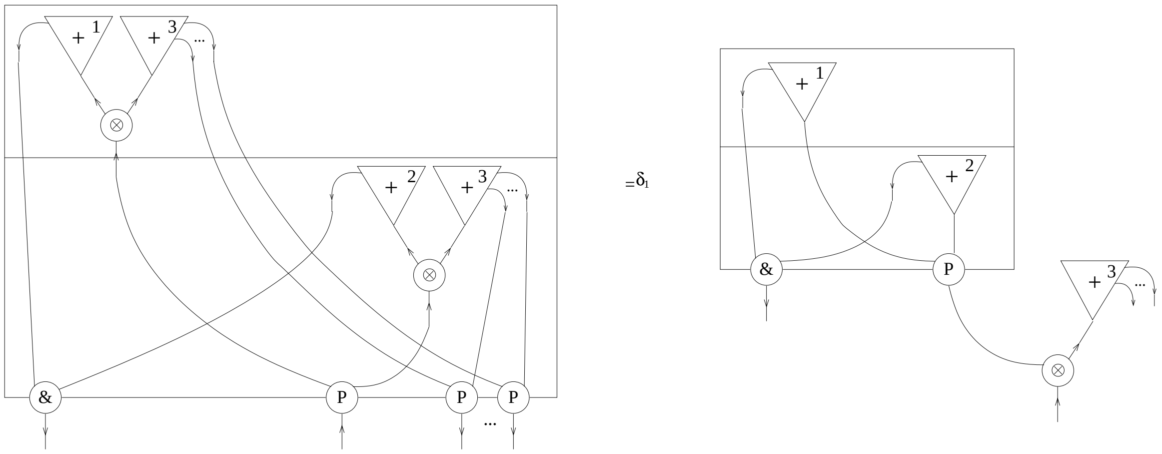
D'autres règles de réécriture sur les réseaux polarisés généraux sont *sound*, en particulier les règles de η-réduction :

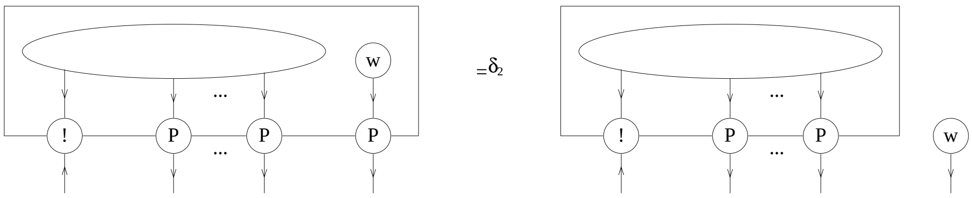


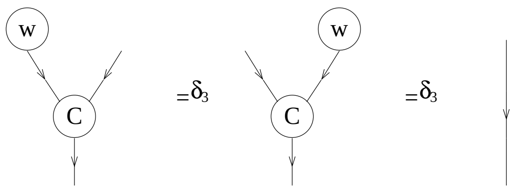


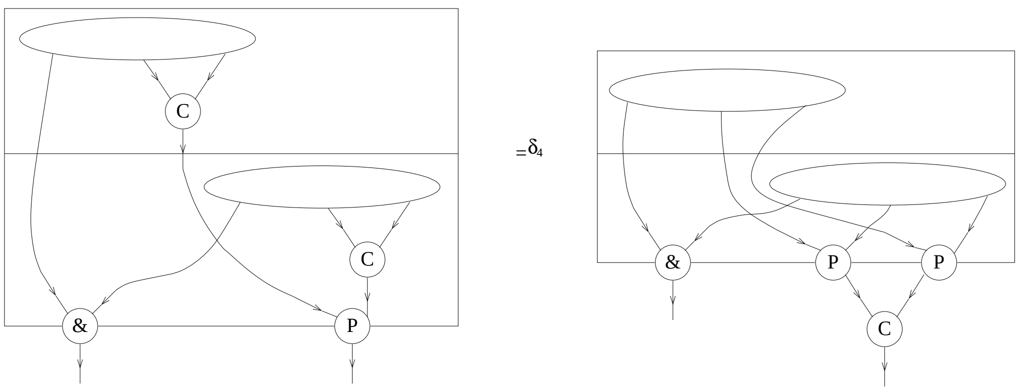


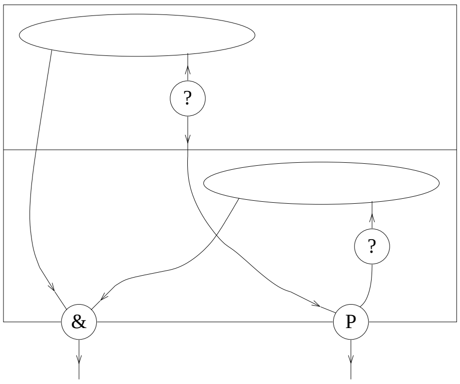
ainsi que différentes δ-règles, dont celles qui nous seront utiles par la suite se trouvent énumérées ci-dessous :


+ 1
+ 3
+ 2
⊗
&
P
=δ1

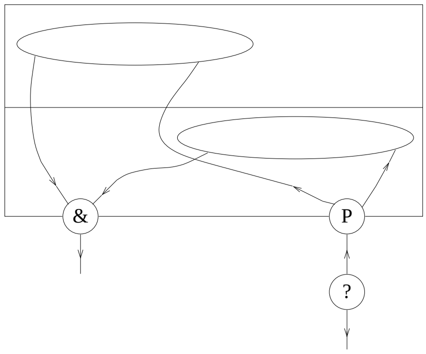

w
!
P
...
=δ2

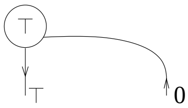

w
C
=δ3
=δ3


C
&
P
=δ4

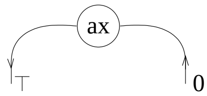


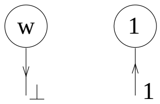
$=_{\delta_5}$



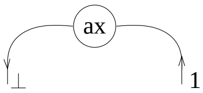


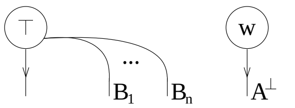
$=_{\delta_6}$



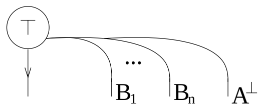


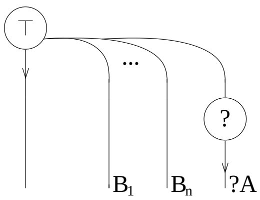
$=_{\delta_7}$



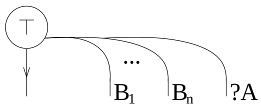


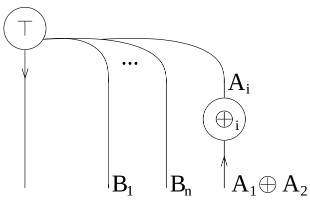
$=_{\delta_8}$



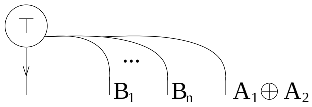


$=_{\delta_9}$





$=_{\delta_{10}}$



Nous utiliserons les résultats[3] concernant les réseaux de LLP à quelques reprises dans la section suivante. A chaque fois que cela sera fait, il aurait été possible d'obtenir les résultats

[3]Tous ces résultats seront énoncés et démontrés dans la thèse d'Olivier Laurent.

correspondants par des preuves ayant recours à la sémantique, mais il est plus juste de montrer que ce sont des propriétés réellement syntaxiques. Cela concerne les lemmes 3.2 et 3.4 ainsi que la propriété 3.8.

3 Axiomes pour la définissabilité

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de continuation. Le problème est de trouver quelles propriétés donner à $\mathcal{C}$ pour que l'on puisse identifier les morphismes qui sont l'interprétation d'une preuve.

On vise le résultat suivant : tout morphisme entre interprétations de formules de LLP , est définissable par une preuve de LLP.

3.1 Réduction du problème aux types additifs

Les formules additives sont les formules de LLP qui s'écrivent à l'aide de la grammaire suivante :

$$A \quad ::= \quad 0 \quad | \quad \bigoplus_{j=1}^{n} !(A_j^{\perp})$$

Nous allons démontrer que dans une catégorie de continuation, le problème de la définissabilité se ramène à celui de la définissabilité pour les formules additives. Pour cela nous avons besoin de la notion d'isomorphisme syntaxique :

Définition 3.1 (Isomorphisme syntaxique) *Deux formules A, B de LLP sont syntaxiquement isomorphes (on note $A \cong B$) lorsque il existe deux réseaux de preuve de conclusions respectives $A^{\perp}, B$ et $B^{\perp}, A$ tels que les deux réseaux obtenus en ajoutant un noeud cut, soit sous les conclusions $A^{\perp}, A$, soit sous $B^{\perp}, B$, sont respectivement $\beta\eta\delta$-équivalents aux noeuds axiome $B^{\perp} - B$ et $A^{\perp} - A$.*

Lemme 3.2 *La relation $\cong$ vérifie les propriétés suivantes (pour toutes formules A, B, C, A', B') :*
- $A \cong A$
- $A \cong B$ *implique* $B \cong A$
- $A \cong B$ *et* $B \cong C$ *implique* $A \cong C$
- $A \cong B$ *et* $A' \cong B'$ *implique* $A \oplus A' \cong B \oplus B'$
- $A \cong B$ *et* $A' \cong B'$ *implique* $A \otimes A' \cong B \otimes B'$
- $A \cong B$ *implique* $R^A \cong R^B$

Ces isomorphismes se démontrent uniquement à l'aide de la β-réduction et de la η-expansion. Le cas $A \oplus A' \cong B \oplus B'$ nécessite la β-réduction sur les réseaux de LLP complet.

□

Voici en quoi la notion d'isomorphisme syntaxique est intéressante pour des problèmes de définissabilité :

Proposition 3.3 *Soient A, A', B, B' des formules de LLP telles que $A \cong A'$ et $B \cong B'$. A tout morphisme (dans une catégorie de continuation) $f : A \longrightarrow B$ (resp. $f : A \longrightarrow R$) correspond de manière bijective un morphisme $f' : A' \longrightarrow B'$ (resp. $f : A' \longrightarrow R$) dont la définissabilité est équivalente à celle de f.*

Prenons le cas $f : A \longrightarrow R$. On a en hypothèse $A \cong A'$: les deux réseaux de preuve associés à la propriété d'isomorphisme syntaxique s'interprètent comme des morphismes $h_1 : A \longrightarrow A'$ et $h_2 : A' \longrightarrow A$ qui sont inverses l'n de l'autre (par définition d'isomorphisme syntaxique et parce que la $\beta\eta\delta$-équivalence est *sound* pour l'interprétation). Il est alors clair que f définissable $\Longleftrightarrow$ $h_2; f$ définissable, puisque la propriété d'être définissable est stable par composition.

Le cas $f : A \longrightarrow B$ est similaire : f' s'obtient en précomposant et en postcomposant f par les morphismes déduits de $A \cong A'$ et $B \cong B'$... $\square$

Lemme 3.4 *On a les isomorphismes syntaxiques remarquables :*
- $A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
- $(A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
- $R^A \otimes R^B \cong R^{A \oplus B}$
- $1 \cong R^0$
- $(A \oplus 0) \cong (0 \oplus A) \cong A$

En plus de la β-réduction et de la η-expansion, on a recours aux règles :
- δ_1 pour $A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
- la symétrique (vis-à-vis des prémisses de $\otimes$) de δ_1 pour $(A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
- δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 pour $R^A \otimes R^B \cong R^{A \oplus B}$
- δ_6, δ_7, δ_8, δ_9 pour $1 \cong R^0$
- δ_6, δ_{10} pour $A \oplus 0 \cong 0 \oplus A \cong A$

$\square$

Voyons les conséquences :

Proposition 3.5 *Pour toute formule F de LLP, il existe une formule additive F^a telle que $F \cong F^a$.*

La démonstration se fait par induction sur la taille de la formule, et par cas :
- $F = 0$ ce cas est trivial.
- $F = 1$ d'après le lemme 3.4 on peut prendre $F^a = R^0$.
- $F = R^G$ c'est immédiat par induction et d'après le lemme 3.2
- $F = G \oplus H$ c'est immédiat par induction et d'après le lemme 3.2, en prenant garde toutefois d'éliminer les sommes du type $0 \oplus A$ ou $A \oplus 0$ au profit de A
- $F = G \otimes H$ alors par hypothèse d'induction on a $G \cong G^a$ et $H \cong H^a$ où G^a et H^a sont des formules additives. On peut écrire $G^a = \bigoplus_{j=1}^{n} R^{G_j}$ et $H^a = \bigoplus_{j=1}^{m} R^{H_j}$. En appliquant plusieurs fois les lemmes 3.4 et 3.2, on obtient $F \cong \bigoplus_{j,j'} (R^{G_j} \otimes R^{H_{j'}})$, mais comme $R^{G_j} \otimes R^{H_{j'}} \cong R^{G_j \oplus H_{j'}}$, on peut conclure.

$\square$

Corollaire 3.6 *A tout morphisme (dans une catégorie de continuation) $f : A \longrightarrow B$ (resp. $f : A \longrightarrow R$) correspond de manière bijective un morphisme $f^a : A^a \longrightarrow B^a$ (resp. $f^a : A^a \longrightarrow R$) dont la définissabilité équivaut à celle de f. f^a s'obtient par pré et post-composition de f par des isomorphismes.*

3.2 Axiomes pour la définissabilité

On considère $\mathcal{C}$ une catégorie de continuation *normée*, c'est-à-dire munie d'une norme $|\_|$ sur les morphismes, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On réclame que $(\mathcal{C}, |\_|)$ vérifie les axiomes suivants :

- (a_1) "Transversalité" :

si J est un ensemble fini,

$$\bigsqcup_{j \in J} \mathcal{C}(R^A, B_j) \longrightarrow \mathcal{C}(R^A, \bigoplus_{j \in J} B_j)$$

$$(j_0, f) \mapsto f; in_{j_0}$$

est une bijection préservant $|\_|$.

- (a_2) "Bang lemma" :

  Pour tout $f \in \mathcal{C}(A, R^B)$ (avec $A \neq 0$) on a $\Lambda^{-1}_{A,B}(f) \in \mathcal{C}(A \otimes B, R)$ et

$$|\Lambda^{-1}_{A,B}(f)| < |f|$$

- (a_3) "Désentrelacement + totalité" :

  La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(R^A, A) & \longrightarrow & \mathcal{C}(R^A, R) \\ f & \mapsto & \Delta_{R^A}; \Lambda^{-1}_{R^A,R^A}(R^f) \end{array}$$

est telle que tout élément de $\mathcal{C}(R^A, R)$ a un antécédent de même norme.

- (a_4) :

  Tout isomorphisme $f : A \xrightarrow{\simeq} B$ préserve la norme :

  pour tous morphismes $g : A' \longrightarrow A$ et $h : B \longrightarrow B'$, on a $|g; f| = |g|$ et $|f; h| = |h|$.

- (a_5) :

  pour tout $f : A \oplus B \longrightarrow C$, on a :

$$|in^{A,B}_l; f| \leq |f| \qquad \text{et} \qquad |in^{A,B}_r; f| \leq |f|$$

- (a_6) $f \in \mathcal{C}(A, B)$ vérifie $|f| = 0$ si et seulement si $A = 0$

Remarques :

1. L'axiome (a_1) énonce que tout objet R^A est π-atomique (cf. [1]). Notons bien que dans le cas particulier où $J = \emptyset$, cet axiome énonce que

$$\mathcal{C}(R^A, 0) = \emptyset$$

2. Une conséquence de (a_1) est $\mathcal{C}(R^0, 0) = \emptyset$ ce qui implique grâce à (a_3) :

$$\mathcal{C}(R^0, R) = \emptyset$$

Dans [5], on observe que la catégorie cartésienne close des jeux HO et stratégies innocentes (voir [2] ou [12]) provient d'une catégorie polaire (autrement dit de continuation). On peut se restreindre à la catégorie dont

– Les objets sont les jeux dont l'arène est finie.

– Les morphismes sont les stratégies transverses innocentes totales dont les P-vues sont finies et en nombre fini.

Dans ce cas, il faut prendre pour $|\_|$:
– Si $f : A \longrightarrow B$, $|f|$ est la somme des tailles des $P-vues$ de la stratégie innocente sur $A^{\perp} \invamp \uparrow B$.
– Si $f : A \longrightarrow R$, $|f|$ est la somme des tailles des $P-vues$ de la stratégie innocente sur $A^{\perp} \invamp B^{\perp}$ associée.

Les axiomes $(a_1)-(a_6)$ sont vérifiés dans ce modèle de jeux :
– (a_1) : Dans le cas où $J \neq \emptyset$, une stratégie entre R^A et $\bigoplus_{j \in J} B_j$ joue son premier coup dans R^A (c'est l'unique coup initial $*$ de R^A), et son deuxième coup (qui est toujours possible par transversalité) dans $\bigoplus_{j \in J} B_j$, c'est-à-dire dans un des B_j. Par déterminisme, et puisque le premier coup joué est toujours $*$, la stratégie joue toujours son deuxième coup dans le même B_{j_0}, et par structure des parties de $\bigoplus_{j \in J} B_j$, aucun coup ne sera jamais joué dans les autres B_j.
Dans le cas où $J = \emptyset$, remarquons qu'il n'y a pas de stratégies transverses entre R^A et 0 puisqu'elles ne peuvent pas répondre au coup initial.
– (a_2) : les P-vues de f sont toujours plus longues que celles de la stratégie sur $A^{\perp} \invamp B^{\perp}$ associée $\Lambda^{-1}(f)$ car dans cette dernière les occurrences du coup initial $*$ du jeu R^B disparaissent.
– (a_3) : les stratégies totales transverses entre R^A et R sont la même chose que les stratégies totales sur R^A. Celles-ci peuvent jouer dans plusieurs "copies" de A, identifiées par chaque coup justifié par le coup initial $*$ de R^A. On peut en dériver une stratégie jouant entre R^A et A qui se comporte en jouant sur A comme la stratégie de départ joue sur la première copie de A (correspondant au premier coup justifié par $*$) et jouant sur R^A comme la stratégie de départ joue sur les autres copies de A (remarque : il est possible que la stratégie n'utilisait qu'une seule copie, auquel cas la nouvelle stratégie ne joue pas dans R^A). Il est clair que la nouvelle stratégie qui est un désentrelacement de la première, a la même norme.
– (a_4) : dans le modèle de jeux, les isomorphismes sont forcément des isomorphismes d'arènes, c'est-à-dire qu'ils ne procèdent qu'à des renommages de jeux. La composition par un morphisme de ce type n'a aucune conséquence sur la norme.
– (a_5) : la précomposition par les stratégies in_l et in_r ne fait que diminuer les P-vues.
– (a_6) : les stratégies de norme nulle sont les stratégies vides. Or les seules stratégies transverses vides sont celles dont le domaine est vide.

3.3 Les résultats de définissabilité

Théorème 3.7 (Définissabilité pour LLP) *Dans toute catégorie de continuation $\mathcal{C}$ vérifiant les propriétés axiomatiques $(a_1)-(a_6)$, tout morphisme $f : A \longrightarrow \Pi$ entre interprétations de formules de LLP est définissable par une preuve de LLP.*

D'après le corollaire 3.6, il suffit de démontrer le résultat suivant : tout morphisme $f : A \longrightarrow \Pi$, où A (resp. Π s'il est non vide) est une formule additive, est définissable par une preuve de LLP .
Soit $\Pi = C$ si $f : [\![A]\!] \longrightarrow [\![C]\!]$ et Π vide si $f : [\![A]\!] \longrightarrow R$.
La preuve est par récurrence sur l'ordre lexicographique $(|f|, |A|+|\Pi|)$ (où $|\_|$ sur les formules désigne leur taille).

• Si $A = 0$, on a forcément $f = i_{\Pi}$ qui est l'interprétation de la preuve par $\top$
• Si $A = (\bigoplus_{i=1}^{n} R^{B_i}) \oplus R^C$ avec $n \geq 1$, par induction $in_l^{\bigoplus_{i=1}^{n} R^{B_i}, R^C} ; f$ et $in_r^{\bigoplus_{i=1}^{n} R^{B_i}, R^C} ; f$ sont définies par des preuves π_1 et π_2 (ces morphismes ont une norme inférieure à celle de f d'après (a_5), et leurs objets de départ

sont de taille strictement inférieure). On peut alors définir f par :

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\bigoplus_{i=1}^n R^{B_i} \vdash \Pi} \quad \dfrac{\pi_2}{R^C \vdash \Pi}}{(\bigoplus_{i=1}^n R^{B_i}) \oplus R^C \vdash \Pi}$$

- Si $A = R^B$ et $\Pi = C$ (C formule additive).
  - Si $C = 0$, f n'existe pas (axiome (a_1)).
  - Si $C = \bigoplus_{j=1}^n R^{C_j}$ avec $n > 1$, (a_1) permet d'écrire $f = g; in_{j_0}$ avec $|g| = |f|$. Le homset de g étant de complexité inférieure, on conclut que g est définissable par une preuve π, et donc que f l'est aussi par une preuve de la forme :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{!(B^{\perp}) \vdash !(C_{j_0}^{\perp})}}{\cdots}\oplus}{!(B^{\perp}) \vdash \bigoplus_{j=1}^n !(C_j^{\perp})}\oplus$$

  - Si $C = R^D$, alors (a_2) permet d'écrire $f = \Lambda_{R^B,D}(g)$ avec $|g| < |f|$. D'après l'axiome (a_4), le morphisme g^a correspondant (entre formules additives) vérifie $|g^a| = |g|$, et on peut donc utiliser l'hypothèse d'induction pour obtenir une preuve π le définissant, si bien que f est l'interprétation de :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{[!(B^{\perp}) \otimes D]^a \vdash} \quad \dfrac{\cdots}{!(B^{\perp}), D \vdash [!(B^{\perp}) \otimes D]^a}}{!(B^{\perp}), D \vdash}}{!(B^{\perp}) \vdash !(D^{\perp})}$$

- Si $A = R^B$ et $\Pi = R$.

Remarquons qu'on a forcément $B \neq 0$ (axiome (a_1)). L'axiome (a_3) indique qu'on peut associer à f un morphisme g de même norme tel que $f = \Delta_{R^B}; \Lambda^{-1}_{R^B,R^B}(R^g)$ avec $g \in \mathcal{C}(R^B, B)$.
$B \neq 0$ s'écrit $\bigoplus_{j=1}^n !(B_i^{\perp})$ avec $n \geq 1$. Si $n > 1$ on se ramène au cas $n = 1$ par (a_1) (sans changer la norme du morphisme) : on peut donc supposer que $g : R^B \longrightarrow R^{B_{i_0}}$. On applique (a_2) qui donne un morphisme $h \in \mathcal{C}(R^B \otimes B_{i_0}, R)$ tel que $|h| < |f|$, et on passe au morphisme h^a entre formules additives (de même norme d'après l'axiome (a_4)) qui est définissable par induction. Ainsi f peut se définir par :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{[!(B^{\perp}) \otimes B_{i_0}]^a \vdash} \quad \dfrac{\cdots}{!(B^{\perp}), B_{i_0} \vdash [!(B^{\perp}) \otimes B_{i_0}]^a}}{!(B^{\perp}), B_{i_0} \vdash}}{!(B^{\perp}) \vdash !(B_{i_0}^{\perp})}}{\cdots}}{!(B^{\perp}) \vdash B}}{!(B^{\perp}), !(B^{\perp}) \vdash}}{!(B^{\perp}) \vdash}$$

□

Nous pouvons également donner un résultat de définissabilité pour LLP_r :

Proposition 3.8 (Conservativité de LLP_r) *Pour toute dérivation π de LLP d'un séquent de la forme $\Gamma \vdash$, il existe une démonstration π' de LLP_r du même séquent, telle que $[\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]$*

Appelons règles incorrectes les règles de LLP qui ne sont pas valides dans LLP_r. Si R est une règle de π incorrecte, on note $n(R)$ le nombre de règles situées en dessous de R. On démontre la propriété par induction sur $\sum_{(R \text{ incorrecte de } \pi)} n(R)$
Si π ne contient que des règles de LLP_r, le résultat est prouvé. Sinon, considérons une règle R de π incorrecte, telle que $n(R)$ est minimal. R ne peut pas être la dernière règle de π (puisque les règles incorrectes ont toutes

en commun d'avoir pour conclusion un séquent ayant une formule à droite) et par minimalité, il n'y a pas de règle incorrecte en dessous de R. Soit R' la règle (correcte) située juste au dessous de R. Un de ses séquents prémisses contient une formule à droite : R' est nécessairement une règle *cut*, ?, $\otimes$ ou $\oplus$.
Si R est un règle *cut*, c, w, $\perp$ ou $\parr$, on permute les deux règles, ce qui fait diminuer la mesure d'induction. On constate également que le réseau associé reste inchangé.
Si R est une règle $\top$, on remplace l'ensemble $R - R'$ par une règle $\top$ portant sur la conclusion de R'. On constate qu'au niveau des réseaux, il y a une modification, mais qu'elle est invisible au niveau de la sémantique.
Si R est une règle $\&$, on permute R et R' en appliquant R' sur chacune des prémisses de R. Ici encore, le réseau est modifié, mais sans que sa sémantique soit changée.
Ainsi, on a transformé la preuve π en une preuve π' de LLP_r, telle que $R(\pi')$ s'obtient à partir de $R(\pi)$ par l'application de règles *sound*, ce qui entraîne $[\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]$.
□

Ceci a pour corollaire :

Théorème 3.9 (Définissabilité pour LLP_r) *Dans toute catégorie de continuation $\mathcal{C}$ vérifiant les propriétés axiomatiques $(a_1) - (a_6)$, tout morphisme $f : A \longrightarrow R$ dont le domaine est l'interprétation d'une formule de LLP est définissable par une preuve de LLP_r.*

D'après le théorème 3.3, il existe une dérivation π de LLP telle que $[\![\pi]\!] = f$. Il suffit d'appliquer la propriété précédente pour conclure. □

Enfin, ce dernier résultat, joint au scholie 2.14, donne :

Théorème 3.10 (Définissabilité pour les réseaux) *Dans toute catégorie de continuation $\mathcal{C}$ vérifiant les propriétés axiomatiques $(a_1) - (a_6)$, tout morphisme $f : A \longrightarrow R$ dont le domaine est l'interprétation d'une formule de LLP est définissable par un réseau.*

Bien entendu, le résultat analogue pour les réseaux du système LLP complet est également valide.

4 $\lambda\mu$-calcul

4.1 Le $\lambda\mu$-calcul avec disjonction de Selinger

Définissons le $\lambda\mu$-calcul avec disjonction introduit par P. Selinger dans [14] :

- Types :

$$A, B \quad ::= \quad \mathbf{V} \quad | \quad \mathbf{F} \quad | \quad A \longrightarrow B \quad | \quad A \wedge B \quad | \quad A \vee B$$

- Termes :

$$M, N \quad ::= \quad x \mid * \mid \lambda x.M \mid (M)N \mid \ < M, N > \ \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M \mid \mu\alpha.M \mid [\alpha]M \mid \mu(\alpha,\beta).M \mid [\alpha,\beta]M$$

- Règles de typage :

$$\frac{}{x : A \vdash x : A \mid}var \qquad \frac{}{\Gamma \vdash * : \mathbf{V} \mid \Delta}*$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \longrightarrow B \mid \Delta}abs \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \longrightarrow B \mid \Delta \quad \Gamma' \vdash N : A \mid \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash (M)N : B \mid \Delta, \Delta'}app$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \mid \Delta \quad \Gamma \vdash N : B \mid \Delta}{\Gamma \vdash < M, N >: A \wedge B \mid \Delta}paire \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \wedge B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \pi_1 M : A \mid \Delta}proj_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \wedge B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \pi_2 M : B \mid \Delta}proj_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathbf{F} \mid \alpha : A, \Delta}{\Gamma \vdash \mu\alpha.M : A \mid \Delta}\mu abs \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \mid \Delta}{\Gamma \vdash [\alpha]M : \mathbf{F} \mid \alpha : A, \Delta}nommage$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathbf{F} \mid \alpha : A, \beta : B, \Delta}{\Gamma \vdash \mu(\alpha,\beta).M : A \vee B \mid \Delta}\mu abs_d \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \vee B \mid \Delta}{\Gamma \vdash [\alpha,\beta]M : \mathbf{F} \mid \alpha : A, \beta : B, \Delta}nommage_d$$

Les règles abs, μabs et μabs_d contiennent des affaiblissements implicites dans le cas où la variable d'abstraction n'apparaît pas dans le contexte.
Les règles $nommage$ et $nommage_d$ contiennent des contractions implicites dans le cas où une ou plusieurs variables nommées apparaissent dans le contexte, ainsi que pour app afin d'éviter l'apparition de doublons dans les contextes après application de la règle.

4.2 Interprétation du $\lambda\mu$-calcul dans les réseaux

Il est possible de définir la sémantique des dérivations de typage du $\lambda\mu$-calcul dans les catégories de continuation en passant par l'intermédiaire d'une traduction des termes du $\lambda\mu$-calcul dans les réseaux polarisés.

Les types du $\lambda\mu$-calcul sont interprétés par des types **négatifs** de LLP, de la façon suivante :
- $\mathbf{V} \leadsto \top$
- $\mathbf{F} \leadsto \bot$

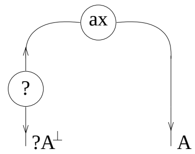
– $A \longrightarrow B \rightsquigarrow ?A^{\perp} \parr B$
– $A \wedge B \rightsquigarrow A \& B$
– $A \vee B \rightsquigarrow A \parr B$

Une dérivation de typage de conclusion $\Gamma \vdash t : A \mid \Delta$ sera traduite par un réseau (sans conclusion positive) de LLP, dont certaines arêtes sont décorées par des variables de termes ou de continuation, et ayant pour conclusions $?\Gamma^{\perp}$, Δ et A.

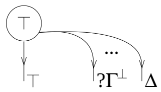
En raison de la prédominance des formules négatives, dans cette partie nous adoptons une convention opposée à la précédente pour les formules : A est négative et $A^{\perp}$ positive.

La traduction se définit par induction sur la dérivation de typage, de la manière suivante :

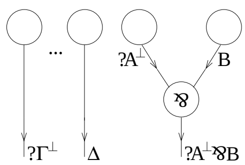
– *var* :



– $*$:

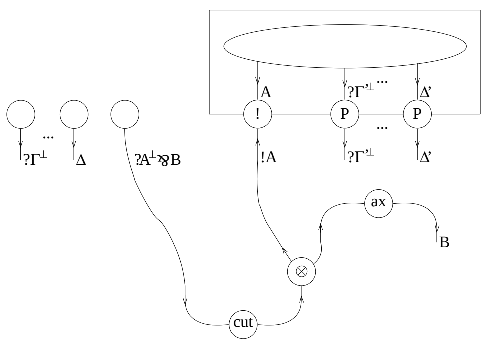


– *abs* :



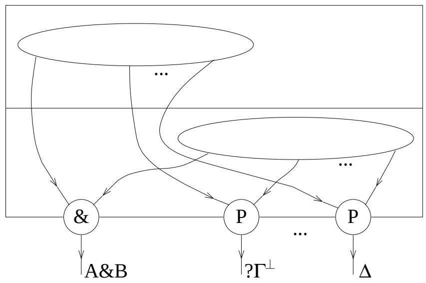
où la formule $?A^{\perp}$ provient de l'ajout d'un noeud w dans le cas où un affaiblissement implicite est nécessaire dans la règle *abs*.

– *app* :

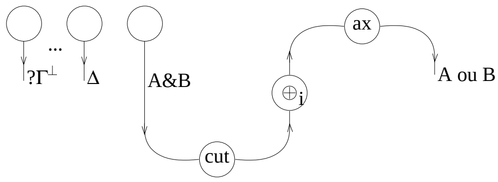


où il faut éventuellement introduire des noeuds contractions portant sur les contextes.

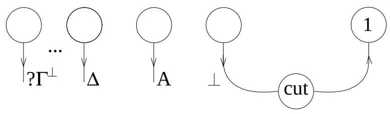
– *paire* :



– $proj_i$:

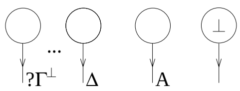


– μabs :



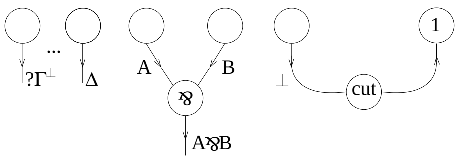
où la conclusion A est introduite par un noeud w si la règle suppose un affaiblissement implicite.

– *nommage* :



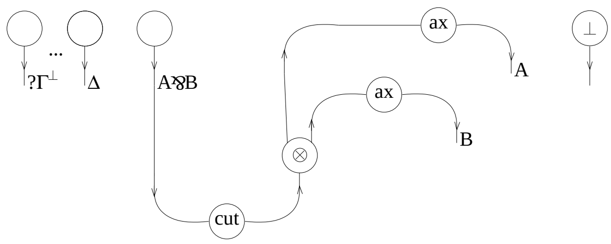
où il faut éventuellement rajouter un noeud c sur A.

– μabs_d :



où la conclusion A (resp. B) est introduite par un noeud w si la règle suppose un affaiblissement implicite.

– *nommage$_d$* :



où il faut éventuellement rajouter un noeud c sur A (resp. B).

L'interprétation dans les réseaux que nous venons de donner permet de donner immédiatement une sémantique du $\lambda\mu$-calcul dans les catégories de continuation.

4.3 Comparaison avec la sémantique de Selinger

Dans [14], Peter Selinger étudie en détail la sémantique du $\lambda\mu$-calcul avec disjonction (à la fois en appels par nom et par valeur) dans ce qu'il appelle les *catégories de contrôle*. Il va même jusqu'à définir les règles de réduction de son calcul à partir de la sémantique.
Il est important de souligner que la sémantique de Selinger et la nôtre sont en réalité identiques (pour l'appel par nom). Ainsi le $\lambda\mu$-calcul sur lequel nous travaillons, auquel il convient d'ajouter le comportement calculatoire par nom défini dans [14], et muni de la sémantique que nous venons de définir, est rigoureusement le même calcul que celui de Selinger.

La sémantique du $\lambda\mu$-calcul en appel par nom est définie par Selinger à partir d'une CPS-traduction (par nom) du $\lambda\mu$-calcul vers un calcul qui s'interprète dans toute catégorie de continuation $\mathcal{C}$. Il manipule cette interprétation pour l'amener dans la catégorie[4] $R^{\mathcal{C}}$, qui est une catégorie de contrôle. Cela permet de définir la sémantique du $\lambda\mu$-calcul dans n'importe quelle catégorie de contrôle, puisqu'un théorème de structure de [14] assure que toute catégorie de contrôle est isomorphe à la catégorie $R^{\mathcal{D}}$ d'une catégorie de continuation $\mathcal{D}$.

De notre côté, nous définissons la sémantique du $\lambda\mu$-calcul dans les catégories de continuation $\mathcal{C}$. Dans le langage des catégories polaires, cette sémantique peut se comprendre au niveau de la catégorie[5] cartésienne close $cK_{?!}(\mathcal{N})$, qui se trouve être une catégorie de contrôle.

Les deux points de vue se rejoignent parfaitement. En effet, la catégorie $R^{\mathcal{C}}$ est isomorphe à $(K_{R^{R^{(\_)}}}(\mathcal{C}))^{op}$, elle-même isomorphe à $cK_{?!}(\mathcal{C}^{op})$, et il est facile au niveau de ces catégories de vérifier que les deux sémantiques coïncident.

4.4 Le théorème de définissabilité pour le $\lambda\mu$-calcul

On prouve un résultat de définissabilité pour le $\lambda\mu$-calcul, vis-à-vis des catégories de continuation.
Pour cela, on va utiliser le théorème 3.3 ainsi qu'une méthode de séquentialisation des réseaux sans conclusion positive vers le $\lambda\mu$-calcul.

[4]$R^{\mathcal{C}}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ des objets de la forme R^C (pour tout C objet de $\mathcal{C}$).
[5]C'est la catégorie qui correspond aux jeux HO habituels, voir [4]

Remarquons que les types de LLP ne sont pas tous l'interprétation d'un type du $\lambda\mu$-calcul. Un type de la forme $?(A^\perp)$ n'est pas connu du $\lambda\mu$-calcul, mais est proche de $?(A^\perp)⅋\perp$, qui est l'interprétation d'un type de la forme $A \longrightarrow \mathbf{F}$. Nous exploitons dans la suite le fait que l'écart entre ces deux types est minime.

Définition 4.1 (ι-expansion) *On définit d'abord la ι-expansion A^ι de toute formule A de LLP :*

- $\perp^\iota = \perp$
- $\top^\iota = \top$
- $(A\&B)^\iota = A^\iota \& B^\iota$
- $(A⅋B)^\iota = A^\iota ⅋ B^\iota$
- $(?A^\perp)^\iota = ?(A^\iota)^\perp ⅋ \perp$

la transformation sur les formules positives s'en déduisant de telle sorte que $(A^\perp)^\iota = (A^\iota)^\perp$.

Ensuite, faire la ι-expansion $\mathcal{R}^\iota$ d'un réseau $\mathcal{R}$ consiste, dans le réseau où les contenus des boîtes ont été déjà récursivement ι-expansés, à transformer simultanément au niveau 0 :

- *les noeud axiomes $A - A^\perp$ en noeuds axiomes $A^\iota - (A^\iota)^\perp$*
- *les noeuds $\top$ de conclusions $\top, \Delta$ en noeuds $\top$ de conclusions $\top, \Delta^\iota$*
- *les noeuds w introduisant A en noeuds w introduisant A^ι*
- *les noeuds $\perp$ en noeuds w introduisant $\perp$*
- *les noeuds ? en un ensemble formé du noeud ? dont la conclusion est reliée par un ⅋ à un noeud $\perp$.*
- *les boîtes ! de telle sorte que la conclusion du noeud ! se retrouve reliée par un $\otimes$ à un noeud 1.*

Remarques importantes :
• Pour toute formule négative A, A^ι est un type du $\lambda\mu$-calcul.
• Si un réseau de preuve a pour conclusions Δ, sa ι-expansion est aussi un réseau de preuve, et a pour conclusions Δ^ι.
• La ι-expansion d'un arbre positif est un arbre positif.
• Si $\mathcal{R}$ n'a pas de lien *cut* alors $\mathcal{R}^\iota$ n'a pas de lien *cut*.
• Un réseau et sa ι-expansion ont même sémantique dans les catégories de continuation.

Proposition 4.2 *Pour tout réseau polarisé $\mathcal{R}$ de conclusions $A, A_1, \ldots, A_n$ toutes négatives et sans coupure, il existe un réseau $\mathcal{R}'$ de conclusions $A^\iota, A_1^\iota, \ldots, A_n^\iota$ tel que :*

- *$\mathcal{R}'$ se β-réduit en $\mathcal{R}^\iota$.*
- *$\mathcal{R}'$ est l'interprétation d'un terme du $\lambda\mu$-calcul typé de la forme :*

$$\vdash t : A^\iota \mid \alpha_1 : A_1^\iota, \ldots, \alpha_n : A_n^\iota$$

Remarquons tout d'abord que si un réseau $\mathcal{R}'$ est l'interprétation d'un terme typé de la forme $\vdash t : A \mid \beta : B, \Delta$, le réseau $\mathcal{R}''$ interprétant $\vdash \mu\beta.[\alpha]t : B \mid \alpha : A, \Delta$ (où α n'apparaît pas dans Δ) s'obtient en ajoutant à $\mathcal{R}'$ un noeud $\perp$ et un noeud 1 reliés par un noeud *cut*, et donc vérifie $\mathcal{R}'' \longrightarrow^\beta \mathcal{R}$.
Ainsi, à β-réduction sur les réseaux près, on a toute latitude de décider quelle conclusion d'un réseau issu du $\lambda\mu$-calcul prend place en position active.
Nous raisonnons par induction sur la taille de $\mathcal{R}^\iota$, et par cas (seuls les cas 1, 3 et 4 peuvent apparaître puisque $\mathcal{R}$ est sans coupure).

• Cas 1 :

- Si $\mathcal{R}^\iota$ a pour noeud de séquentialisation un noeud ⅋, alors en appliquant l'hypothèse d'induction au sous-réseau sans le noeud ⅋, on obtient un réseau $\mathcal{R}'_0$ qui est l'interprétation d'un terme typé $\vdash t : A^\iota \mid \beta : B^\iota, \Delta^\iota$

où A et B sont les prémisses du noeud $\parr$ de $\mathcal{R}^\iota$ (comme on l'a expliqué en préambule, on peut toujours s'arranger pour que les formules soient disposées selon notre bon vouloir).
La dérivation suivante s'interprète en $\mathcal{R}'$ qui à un ensemble $\{\bot, cut, 1\}$ près, est $\mathcal{R}'_0$ muni du noeud $\parr$ convenable supplémentaire, et qui répond donc au problème :

$$\cfrac{\cfrac{\vdash t : A^\iota \mid \beta : B^\iota, \Delta^\iota}{\vdash [\alpha]t : \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \beta : B^\iota, \Delta^\iota}}{\vdash \mu(\alpha,\beta).[\alpha]t : A^\iota \vee B^\iota \mid \Delta^\iota}$$

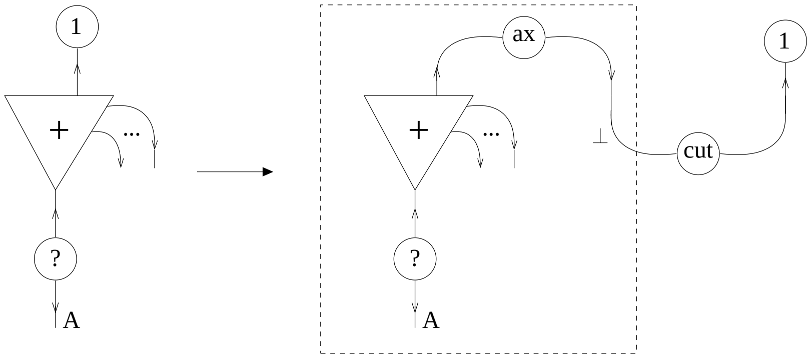
(où α est une variable fraîche).

- Si $\mathcal{R}^\iota$ a pour noeud de séquentialisation un noeud c, alors en appliquant l'hypothèse d'induction au sous-réseau sans le noeud c, on obtient un réseau $\mathcal{R}'_0$ qui est l'interprétation d'un terme typé $\vdash t : A^\iota \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota$ où les deux conclusions A sont les prémisses du noeud c de $\mathcal{R}^\iota$.
  La dérivation suivante s'interprète en $\mathcal{R}'$ qui à un ensemble $\{\bot, cut, 1\}$ près, est $\mathcal{R}'_0$ muni du noeud c supplémentaire convenable :
  $$\cfrac{\cfrac{\vdash t : A^\iota \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota}{\vdash [\alpha]t : \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota}}{\vdash \mu\alpha.[\alpha]t : A^\iota \mid \Delta^\iota}$$
  (où γ et δ sont des variables fraîches).
- Si $\mathcal{R}^\iota$ a pour noeud de séquentialisation un noeud w introduisant une conclusion A, alors en appliquant l'hypothèse d'induction au sous-réseau sans le noeud w, on obtient un réseau $\mathcal{R}'_0$ qui est l'interprétation d'un terme typé $\vdash t : C^\iota \mid \Delta^\iota$ où C est une conclusion arbitraire du sous-réseau sans le noeud w. La dérivation suivante s'interprète en $\mathcal{R}'$ qui à un ensemble $\{\bot, cut, 1\}$ près, est $\mathcal{R}'_0$ auquel est ajouté un noeud w introduisant A^ι :
  $$\cfrac{\cfrac{\vdash t : C^\iota \mid \Delta^\iota}{\vdash [\gamma]t : \mathbf{F} \mid \gamma : C^\iota, \Delta^\iota}}{\vdash \mu\delta.[\gamma]t : A^\iota \mid \gamma : C^\iota, \Delta^\iota}$$

- Cas 3 :
  - Si $\mathcal{R}^\iota$ est un noeud $\top$, ses conclusions sont de la forme $\top, A_1^\iota, \ldots, A_n^\iota$, et il est l'interprétation du terme suivant :
    $$\cfrac{}{\vdash * : \mathbf{V} \mid \alpha_1 : A_1^\iota, \ldots, \alpha_n : A_n^\iota}$$
  - Si $\mathcal{R}^\iota$ est une boîte $\&$ de conclusions $A\&B, \Delta$ formée autour des deux réseaux $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, alors par induction si on note t_1 et t_2 les termes dont les interprétations respectives sont $\mathcal{R}'_1$ et $\mathcal{R}'_2$, alors le terme suivant a pour interprétation un $\mathcal{R}'$ convenable :
    $$\cfrac{\vdash t_1 : A^\iota \mid \Delta^\iota \quad \vdash t_2 : B^\iota \mid \Delta^\iota}{\vdash < t_1, t_2 >: (A\&B)^\iota \mid \Delta^\iota}$$
- Cas 4 :

Le réseau $\mathcal{R}^\iota$ n'ayant pas de conclusion positive, le cas 4 se réduit au cas d'un arbre positif juché sur un noeud ?.
Notons de plus que la mesure d'induction pour les arbres positifs est la somme des nombres de noeuds $\otimes$, $\oplus$, 1 et de !-boîtes.

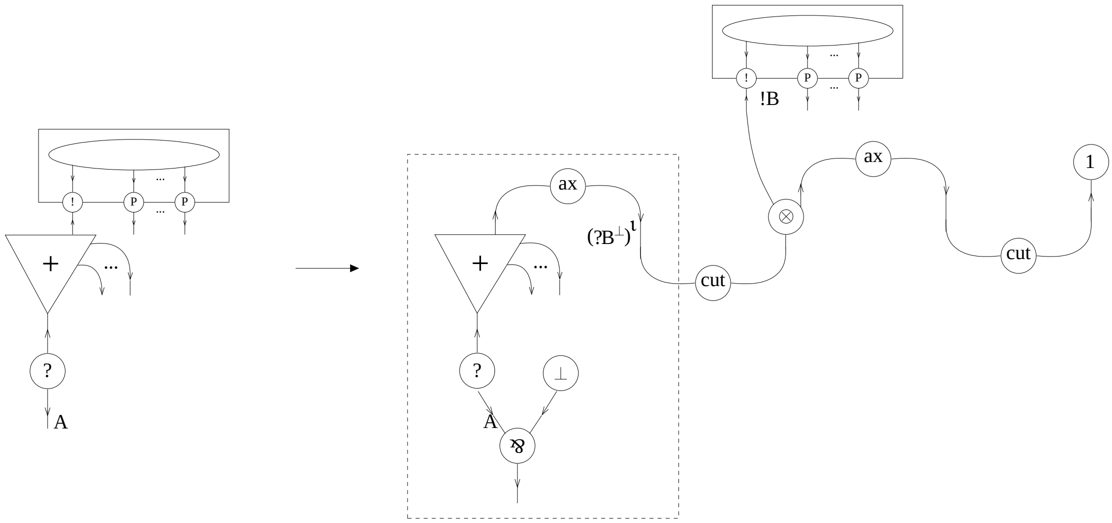
- Si l'arbre positif comporte un noeud 1 :



(sur cette figure et les suivantes, la boîte en pointillés isole le sous-réseau $\mathcal{R}_0$ auquel on applique l'hypothèse d'induction).
Par hypothèse d'induction, on a un terme $\vdash t : \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota$ qui s'interprète en un réseau $\mathcal{R}'_0$ qui se β-réduit en $(\mathcal{R}_0)^\iota$. Le terme t qui convient pour $\mathcal{R}'$ s'obtient ainsi :

$$\frac{\vdash t : \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota}{\vdash \mu\alpha.t : A^\iota \mid \Delta^\iota}$$

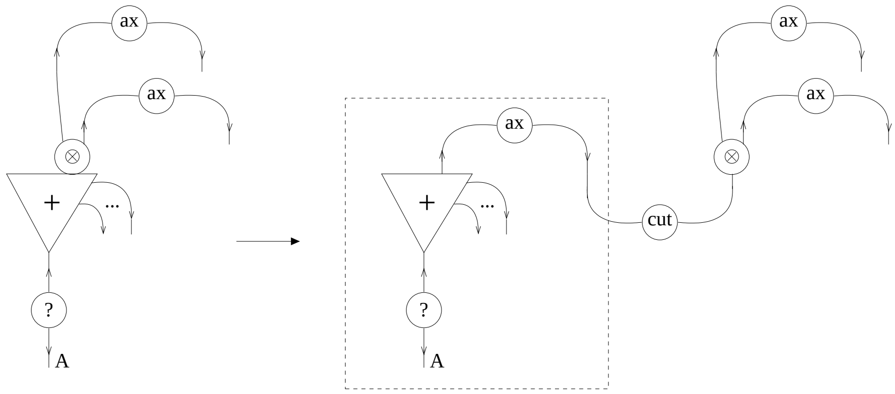
– Si l'arbre positif comporte une !-boîte, alors elle est forcément juché sur un lien $\otimes$ dont l'autre prémisse est un lien 1, par structure des réseaux ι-expansés :



on a un terme $\vdash t : B^\iota \longrightarrow \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota$ qui s'interprète en un réseau $\mathcal{R}'_0$, et un terme $\vdash u : B^\iota \mid \Delta'^\iota$ qui s'interprète en un réseau $\mathcal{R}'_1$ (se $\beta\iota$-réduisant vers le réseau contenu dans la !-boîte). On construit $\mathcal{R}'$ ainsi :

$$\cfrac{\cfrac{\vdash t : B^\iota \longrightarrow \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota \quad \vdash u : B^\iota \mid \Delta'^\iota}{\vdash (t)u : \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota, \Delta'^\iota}}{\vdash \mu\alpha.(t)u : A \mid \Delta^\iota, \Delta'^\iota}$$

– Sinon, si l'arbre positif comporte à son sommet un noeud $\otimes$:

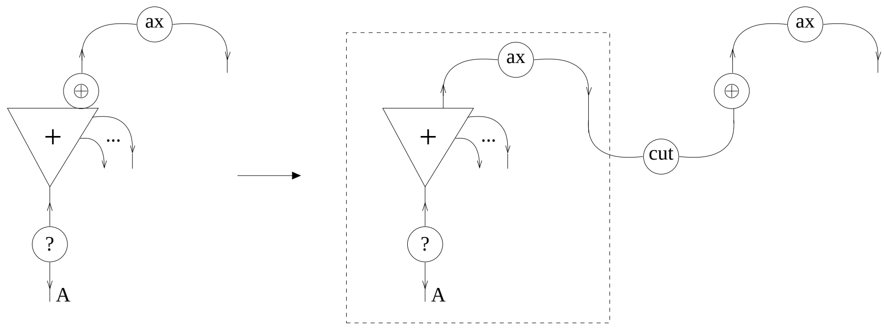


on a un terme $\vdash t : B^\iota \vee C^\iota \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota$ qui s'interprète en $\mathcal{R}'_0$, et on construit $\mathcal{R}'$ ainsi :

$$\dfrac{\dfrac{\vdash t : B^\iota \vee C^\iota \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota}{\vdash [\beta, \gamma]t : \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \beta : B^\iota, \gamma : C^\iota, \Delta^\iota}}{\vdash \mu\alpha.[\beta, \gamma]t : A^\iota \mid \beta : B^\iota, \gamma : C^\iota, \Delta^\iota}$$

(où β et γ sont des variables fraîches).

– Sinon, si l'arbre positif comporte a son sommet un noeud $\oplus$:



on a un terme $\vdash t : B_1^\iota \wedge B_2^\iota \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota$ qui s'interprète en $\mathcal{R}'_0$, et on construit $\mathcal{R}'$ ainsi :

$$\dfrac{\vdash t : B_1^\iota \wedge B_2^\iota \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota}{\vdash \pi_i t : B_i^\iota \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota}$$

– Sinon, l'arbre positif est réduit à un noeud *ax* de conclusions B^ι et $B^{\iota\perp}$. Le réseau $\mathcal{R}'$ qui répond au problème est celui engendré par :

$$\dfrac{\dfrac{\overline{x : B^\iota \vdash x : B^\iota \mid}}{x : B^\iota \vdash [\beta]x : \mathbf{F} \mid \beta : B^\iota}}{\vdash \lambda x.[\beta]x : B^\iota \longrightarrow \mathbf{F} \mid \beta : B^\iota}$$

□

Remarquons que les β-réductions dont il est question dans l'énoncé de la proposition précédente sont des éliminations de coupures ne portant que sur des noeuds *ax* ou 1.

On en déduit finalement :

Théorème 4.3 (Définissabilité) *Dans toute catégorie de continuation $\mathcal{C}$ vérifiant les propriétés axiomatiques $(a_1) - (a_6)$, tout morphisme $f : A \longrightarrow R$ dont le domaine est l'interprétation d'une formule de LLP est définissable par un terme du $\lambda\mu$-calcul typé.*

D'après le théorème 3.3, il existe un réseau $\mathcal{R}_0$ qui définit f. Soit $\mathcal{R}$ la forme normale de $\mathcal{R}_0$ pour l'élimination des coupures, par soundness de l'interprétation des réseaux, il s'interprète lui aussi en f. On peut appliquer le résultat précédent, ce qui donne un réseau provenant d'un terme typé du $\lambda\mu$-calcul t, dont la sémantique est la même que $\mathcal{R}$. En conclusion, l'interprétation de la dérivation de typage de t est égale à f. $\square$

5 Réseaux polarisés avec point fixe

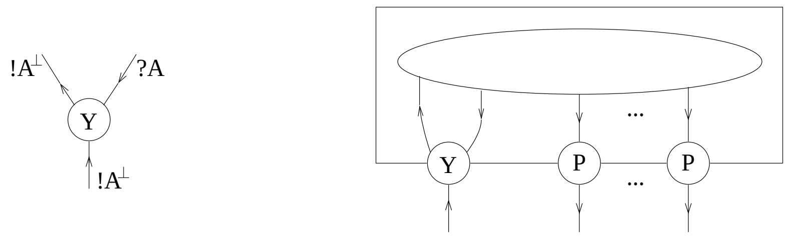
La catégorie des jeux est suffisamment riche pour interpréter des langages munis de point fixe. Nous nous proposons ici de prolonger notre étude à LLP munie d'un point fixe. Le but est à nouveau de dégager des propriétés axiomatiques suffisantes pour obtenir un résultat de définissabilité.
Nous montrons à cette occasion comment utiliser des résultats de théorie axiomatique des domaines pour prouver l'existence d'un opérateur de point fixe en sémantique des jeux.

5.1 Syntaxe

La "logique" linéaire polarisée avec point fixe LLP_Y s'obtient en ajoutant à LLP la règle suivante :

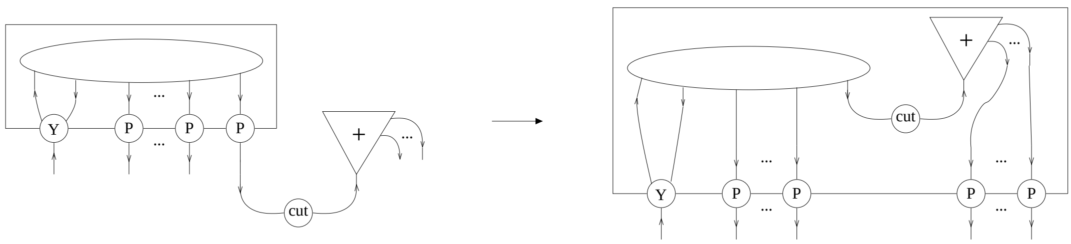
$$\frac{\Gamma, !(A^\perp) \vdash !(A^\perp)}{\Gamma, \vdash !(A^\perp)} Y$$

Nous définissons une syntaxe par réseaux pour LLP_Y, en ajoutant aux réseaux de LLP un noeud Y et une boîte Y :

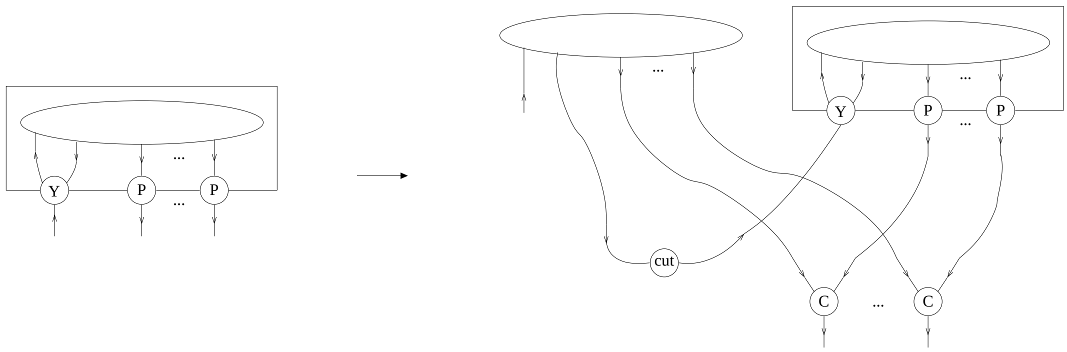


La boîte Y a le même type de conclusions que la !-boîte. On étend la notion d'arbre positif aux boîtes Y. Il n'y a aucune rupture avec la présentation des réseaux que nous avons donnée précédemment.
Le critère de correction reste le même et le théorème de séquentialisation est identique (en particulier les 4 cas possibles dans la classification des réseaux de preuve demeurent, le seul changement étant l'enrichissement de la définition d'arbre positif).

Des nouveaux redex apparaissent pour l'élimination des coupures, ce qui nous amène à donner deux nouvelles règles de réduction, une β-règle et une règle Y d'itération :



et



Ce sont les seuls ajouts. Les autres règles sont inchangées ; elles tiennent compte de la boîte Y dans la mesure où celle-ci fait maintenant partie des arbres positifs.

Il faut remarquer :

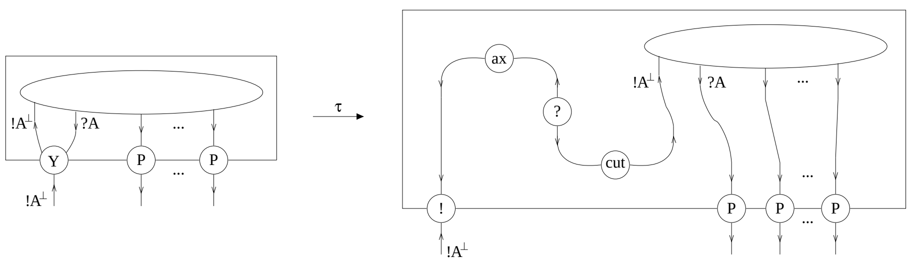
– Il n'y a pas de règle pour éliminer directement une coupure entre la porte principale d'une boîte Y et un noeud ?.
– On distingue la βY-réduction qui tient compte de toutes les règles (y compris la règle Y d'itération) et la β-réduction qui ne considère pas Y.
– On perd la normalisation forte pour la βY-réduction.

Cependant :

Proposition 5.1 *La β-réduction pour les réseaux polarisés avec point fixe est un processus confluent et fortement normalisant.*

Nous laissons de côté la confluence, qui ne semble pas poser de problèmes particuliers.
Pour ce qui est de la normalisation forte, nous exhibons une traduction τ des réseaux de LLP_Y vers LLP telle que si u se β-réduit en une étape vers u' (u et u' étant des réseaux de LLP_Y), alors $\tau(u)$ se β-réduit en au moins une étape vers $\tau(u')$. On conclut alors à l'aide du résultat de normalisation pour LLP obtenu par Olivier Laurent.

La traduction τ se définit par induction sur la profondeur du réseau, et ne modifie que les boîtes Y de la façon suivante :



□

Les formes β-normales n'ont plus de lien *cut* à l'exception de certains reliant la porte principale d'une boîte Y et un lien ?.

5.2 Sémantique

Nous restons dans le cadre des catégories de continuation.
Si $\mathcal{R}$ est un réseau de conclusions $\Gamma, ?A, !(A^\perp)$, ayant pour interprétation le morphisme

$f : \Gamma \otimes R^A \longrightarrow R^A$, la boîte Y contenant le réseau $\mathcal{R}$ doit avoir pour sémantique un morphisme $f^\dagger : \Gamma \longrightarrow R^A$.

La *soundness* de la β-réduction comportant les nouvelles règles représentées sur les figures précédentes donne des conditions sur la famille de fonctions $(\_)^\dagger : \mathcal{C}(\Gamma \otimes R^A, R^A) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma, R^A)$, qui sont précisément satisfaites par les *opérateurs de point fixe*, dont nous rappelons la définition en toute généralité :

Définition 5.2 (Opérateur de point fixe) *Soit* $(\mathcal{D}, \times, 1)$ *une catégorie cartésienne avec objet terminal. Un opérateur de point fixe avec paramètre est une famille de fonctions* $(\_)^\nabla : \mathcal{D}(X \times A, A) \longrightarrow \mathcal{D}(X, A)$ *satisfaisant :*

1. *(Propriété de point fixe) Pour tout* $f : X \times A \longrightarrow A$*,*
$$< id_X, f^\nabla >; f = f^\nabla$$
2. *(Naturalité) Pour tout* $f : X \times A \longrightarrow A$ *et* $g : Y \longrightarrow X$*,*
$$(g \times A; f)^\nabla = g; f^\nabla$$

La propriété de point fixe (resp. la naturalité) rend la première règle de réduction (resp. deuxième règle de réduction) *sound.*
On demande donc que la catégorie $\mathcal{C}$ soit munie d'un opérateur de point fixe avec paramètre noté $(\_)^\dagger$.

5.3 Opérateurs de point fixe en théorie axiomatique des domaines : application en sémantique des jeux

Nous nous intéressons maintenant à une façon de montrer l'existence d'un tel opérateur.
On peut trouver dans l'article [15] une condition suffisante pour obtenir un opérateur de point fixe, dans le cas où $\mathcal{D}$ est la catégorie de co-Kleisli d'une catégorie $\mathcal{S}$ sur une comonade L :

Proposition 5.3 (Proposition 6.1 dans [15]) *Si* $L : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ *a une algèbre bi-libre, alors* $\mathcal{D}$ *possède un opérateur de point fixe.*

où une algèbre bi-libre est la donnée d'un couple (A, a) avec $a : LA \longrightarrow A$ qui est une L-algèbre initiale et tel que a^{-1} est une L-coalgèbre terminale[6].

En termes de diagrammes, dire que (A, a) est une L-algèbre bi-libre signifie que pour tout $b : LB \longrightarrow B$ (resp. $c : C \longrightarrow LC$), il existe un unique morphisme $f : A \longrightarrow B$ (resp. $g : C \longrightarrow A$) tel que :

$$\begin{tikzcd} LA \arrow[r, "Lf"] \arrow[d, "a"] & LB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "a^{-1}"] & C \arrow[l, "Lg"'] \arrow[d, "c"] \\ LA & LC \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

Cela correspond tout à fait à notre situation, en prenant :
- $\mathcal{S} = \mathcal{N}$, où $\mathcal{N} = \mathcal{C}^{op}$
- $L =$?!

[6]Le lemme de Lambek (cf. [16]) énonce qu'une algèbre initiale est un isomorphisme.

– $\mathcal{D} = cK_{?!}(\mathcal{N})$

Afin de prouver l'existence d'une !?-algèbre bi-libre, nous nous servons du résultat suivant :

Lemme 5.4 (Smyth-Plotkin) *Soit $\mathcal{K}$ une catégorie avec un objet initial $\perp$ et L un endofoncteur de $\mathcal{K}$. Supposons que les deux co-cônes*

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dotted, no head] & \\
L^2\perp \arrow[ddr, "\mu_2"] & \\
L\perp \arrow[u, "L(i_{L\perp})"] \arrow[dr, "\mu_1"] & \\
\perp \arrow[u, "i_{L\perp}"] \arrow[r, "\mu_0"] & \omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dotted, no head] & \\
L^3\perp \arrow[ddr, "L(\mu_2)"] & \\
L^2\perp \arrow[u, "L^2(i_{L\perp})"] \arrow[dr, "L(\mu_1)"] & \\
L\perp \arrow[u, "L(i_{L\perp})"] \arrow[r, "L(\mu_0)"] & L\omega
\end{tikzcd}$$

sont des co-limites. Si on définit le morphisme $s : L\omega \longrightarrow \omega$ par :

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dotted, no head] & & \\
L^2\perp \arrow[rr, "\mu_2"] \arrow[ddr, "L(\mu_1)"'] & & \omega \\
L\perp \arrow[u, "L(i_{L\perp})"] \arrow[rru, "\mu_1"] \arrow[dr, "L(\mu_0)"'] & & \\
& L\omega \arrow[ruu, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

alors (ω, s) est une L-algèbre initiale.

Nous appliquons ce lemme dans la catégorie $\mathcal{N}$ des jeux négatifs ***, où $L =?!$ et $\perp$ est le jeu $\{*\}$.
Soit ω le jeu formé sur l'arène $0 \vdash 0 \vdash 1 \vdash 1 \vdash \ldots \vdash n \vdash n \vdash \ldots$.
Les morphismes $\mu_k : (?!)^k\perp \longrightarrow \omega$ sont définis par :

$$\begin{array}{ccc}
(?!)^k\perp & \longrightarrow & \omega \\
 & & 0 \\
* & & \\
* & & \\
 & & 0 \\
 & \ldots & \\
 & & k-1 \\
* & & \\
* & & \\
 & & k-1 \\
 & & k \\
* & &
\end{array}$$

Ils réalisent l'interprétation du jeu $(?!)^k\perp$ comme troncature au niveau k de ω.

Les co-cônes formés à partir des μ_k comme dans le lemme 5.4 sont des co-limites. En effet si on a pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
(?!)^{k+1}\bot \arrow[dr, "\alpha_{k+1}"] & \\
(?!)^{k}\bot \arrow[u, "(?!)^k(i_{?!\bot})"] \arrow[r, "\alpha_k"] & A
\end{tikzcd}$$

C'est que chaque α_k prolonge tous les α_i où $i < k$. Il existe alors un unique morphisme $\alpha : \omega \longrightarrow A$ faisant commuter les diagrammes suivants, c'est le prolongement commun de tous les α_k à ω.

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[dr, "\alpha"] & \\
(?!)^{k}\bot \arrow[u, "\mu_k"] \arrow[r, "\alpha_k"] & A
\end{tikzcd}$$

Le deuxième co-cône est aussi une co-limite par le même type d'argument.

Ainsi d'après le lemme 5.4, il existe une L-algèbre initiale $s : ?!\omega \longrightarrow \omega$.

De plus, on voit que la stratégie s ainsi définie est :

$$\begin{array}{ccc}
?!\omega & \longrightarrow & \omega \\
 & & 0 \\
* & & \\
* & & \\
 & & 0 \\
 & \cdots & \\
 & & k \\
k-1 & & \\
k-1 & & \\
 & & k \\
 & \cdots &
\end{array}$$

Il est possible de montrer par la même technique que s^{-1} est une L-coalgèbre terminale. Pour cela, on montre qu'on a les co-limites suivantes dans $\mathcal{P}$:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dash, dotted] & \\
(!?)^2 0 \arrow[ddr, "\nu_2^\bot"] & \\
(!?)0 \arrow[u, "(!?)(i_{(!?)0})"] \arrow[dr, "\nu_1^\bot"] & \\
0 \arrow[u, "i_{(!?)0}"] \arrow[r, "\nu_0^\bot"] & \omega^\bot
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dash, dotted] & \\
(!?)^3 0 \arrow[ddr, "(!?)(\nu_2^\bot)"] & \\
(!?)^2 0 \arrow[u, "(!?)^2(i_{(!?)0})"] \arrow[dr, "(!?)(\nu_1^\bot)"] & \\
(!?)0 \arrow[u, "(!?)(i_{(!?)0})"] \arrow[r, "(!?)(\nu_0^\bot)"] & (!?)\omega^\bot
\end{tikzcd}$$

où les morphismes $\nu_k : \omega \longrightarrow (?!)^k\top$ sont définis par :

$$\begin{array}{ccc}
\omega & \longrightarrow & (?!)^k\top \\
 & & * \\
0 & & \\
0 & & \\
 & & * \\
 & \cdots & \\
 & & * \\
k-1 & & \\
k-1 & & \\
 & & *
\end{array}$$

on en déduit par le lemme 5.4 une ?!-coalgèbre terminale $r : \omega \longrightarrow ?!\omega$. On démontre que $r = s^{-1}$ en faisant jouer la propriété d'unicité de la co-limite, et parce que pour chaque $k \geq 0$ le diagramme suivant commute dans $\mathcal{N}$:

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[dr, "\nu_{k+1}"] & \\
(?!)\omega \arrow[u, "s"] \arrow[r, "(?!)\nu_k"'] & (?!)^{k+1}\bot
\end{tikzcd}$$

Ainsi (ω, s) est une ?!-algèbre bi-libre, et d'après la proposition 5.3, $cK_{?!}(\mathcal{N})$ possède un opérateur de point fixe.

Nous pouvons étendre cette analyse aux opérateurs de point fixe avec paramètre.
Nous trouvons également dans [15] la propriété :

Proposition 5.5 (Proposition 6.5 dans [15]) *Si chaque endofoncteur $L(X \times (\_))$ de $\mathcal{S}$ a une algèbre bi-libre, alors $\mathcal{D}$ possède un opérateur de point fixe avec paramètre.*

On procède de même que pour la preuve du résultat pour l'opérateur de point fixe sans paramètre, en utilisant le lemme 5.4.

Nous avons obtenu ainsi un point fixe avec paramètre sur $cK_{?!}(\mathcal{N})$ plutôt que sur $\mathcal{C}$ qui était notre but. Cependant, l'adaptation est possible :

Proposition 5.6 *Supposons que $cK_{?!}(\mathcal{N})$ possède un opérateur de point fixe avec paramètre $(\_)^\nabla$, alors on peut construire à partir de celui-ci un opérateur de point fixe avec paramètre $(\_)^\dagger$.*

On a $(\_)^\nabla : cK_{?!}(\mathcal{N})(X\&A, A) \longrightarrow cK_{?!}(\mathcal{N})(X, A)$.
De façon équivalente, on a une famille $(\_)^\nabla : \mathcal{N}(?!(X\&A), A) \longrightarrow \mathcal{N}(?!X, A)$, pour laquelle la propriété de point fixe et la naturalité s'écrivent[7] :

1. Pour tout $f : ?!(X\&A) \longrightarrow A$,
$$?\eta_{!X}; ?! < \epsilon_X, f^\nabla >; f = f^\nabla$$
2. Pour tout $f : ?!(X\&A) \longrightarrow A$ et $g : ?!Y \longrightarrow X$,
$$[?\eta_{!(Y\&A)}; ?! <?!\pi_1^{Y,A}; g\ ,\ ?!\pi_2^{Y,A}; \epsilon_A >; f]^\nabla = ?\eta_{!Y}; ?!g; f^\nabla$$

[7]Les morphismes η_P et ϵ_N sont définis par $\eta_P : P \xrightarrow{\Phi(id_{?P})} !?P$ et $\epsilon_N : ?!N \xrightarrow{\Phi^{-1}(id_{!N})} N$.

On peut ensuite définir une famille de fonctions $(\_)^\dagger : \mathcal{C}(R^B \otimes R^A, R^A) \longrightarrow \mathcal{C}(R^B, R^A)$ par :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f : R^B \otimes R^A \xrightarrow{\mathcal{C}} R^A}{f : R^{B\oplus A} \xrightarrow{\mathcal{C}} R^A}}{\Phi^{-1}(f) : ?!(B^\perp \& A^\perp) \xrightarrow{\mathcal{N}} A^\perp}}{[\Phi^{-1}(f)]^\nabla : ?!B^\perp \xrightarrow{\mathcal{N}} A^\perp}}{\Phi([\Phi^{-1}(f)]^\nabla) : R^B \xrightarrow{\mathcal{C}} R^A}$$

que l'on peut ensuite étendre en $(\_)^\dagger : \mathcal{C}(\Gamma \otimes R^A, R^A) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma, R^A)$ par :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f : \Gamma \otimes R^A \longrightarrow R^A}{f : (\bigoplus_{i=1}^k R^{B_i}) \otimes R^A \longrightarrow R^A}}{f : \bigoplus_{i=1}^k (R^{B_i} \otimes R^A) \longrightarrow R^A}}{\ldots h_i : R^{B_i} \otimes R^A \longrightarrow R^A \ldots}}{\ldots (h_i)^\dagger : R^{B_i} \longrightarrow R^A \ldots}}{h_1^\dagger + \ldots + h_k^\dagger : \bigoplus_{i=1}^k R^{B_i} \longrightarrow R^A}}{h_1^\dagger + \ldots + h_k^\dagger : \Gamma \longrightarrow R^A}$$

Nous avons utilisé le fait que dans le modèle particulier des jeux, on a :
- $R^{B\oplus A} = R^B \otimes R^A$
- Tout jeu Γ peut s'écrire sous la forme $\bigoplus_{i=1}^k R^{B_i}$
- $\bigoplus_{i=1}^k (R^{B_i} \otimes R^A) = (\bigoplus_{i=1}^k R^{B_i}) \otimes R^A$

Il est alors possible de montrer (via l'axiome (a_1) de π-atomicité qui est vérifié dans la catégorie de jeux) que les propriétés 1 et 2 de l'opérateur $(\_)^\nabla$ impliquent la propriété de point fixe et la naturalité pour $(\_)^\dagger$.
□

5.4 Axiomes pour la définissabilité

On considère $\mathcal{C}$ une catégorie de continuation *normée*, où la norme est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Les morphismes de norme finie sont appelés *compacts*.
On demande de plus que $\mathcal{C}$ soit munie d'un opérateur de point fixe avec paramètre $(\_)^\dagger : \mathcal{C}(\Gamma \times R^A, R^A) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma, R^A)$.

L'opérateur $(\_)^\dagger$ permet de définir certains morphismes typiques de la divergence de point fixe :

$$\perp_{\Gamma, R^A} : \Gamma \xrightarrow{t_\Gamma; id^\dagger_{R^A}} R^A$$

On réclame de plus que $(\mathcal{C}, |\_|)$ vérifie les axiomes suivants :

• (a_1') "Transversalité" :

si J est un ensemble fini,

$$\bigsqcup_{j\in J} \mathcal{C}(R^A, B_j) \longrightarrow \mathcal{C}(R^A, \bigoplus_{j\in J} B_j)$$

$$(j_0, f) \mapsto f; in_{j_0}$$

est une bijection préservant $|\_|$.

- (a'_2) “Bang lemma” :

  Si $f \in \mathcal{C}(A, R^B)$ (avec $A \neq 0$) est compacte alors $\Lambda^{-1}_{A,B}(f) \in \mathcal{C}(A \otimes B, R)$ et

$$|\Lambda^{-1}_{A,B}(f)| < |f|$$

- (a'_3) “Désentrelacement” :

  La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(R^A, A) & \longrightarrow & \mathcal{C}(R^A, R) \\ f & \mapsto & \Delta_{R^A}; \Lambda^{-1}_{R^A,R^A}(R^f) \end{array}$$

se factorise en :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(R^A, A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{C}(R^A, R) \\ & \mathcal{C}(R^A, R)\backslash\{\Lambda^{-1}_{R^A,1}(\perp_{R^A,R^1})\} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

  et tout élément de $\mathcal{C}(R^A, R)\backslash\{\Lambda^{-1}_{R^A,1}(\perp_{R^A,R^1})\}$ a un antécédent de même norme.

- (a'_4) :

  Tout isomorphisme $f : A \xrightarrow{\simeq} B$ préserve la norme :

  pour tous morphismes $g : A' \longrightarrow A$ et $h : B \longrightarrow B'$, on a $|g; f| = |g|$ et $|f; h| = |h|$.

- (a'_5) :

  pour tout $f : A \oplus B \longrightarrow C$, on a :

$$|in^{A,B}_l; f| \leq |f| \qquad \text{et} \qquad |in^{A,B}_r; f| \leq |f|$$

- (a'_6) $f \in \mathcal{C}(A, B)$ vérifie $|f| = 0$ si et seulement si $A = 0$

Remarques :

1. L'axiome (a_1) énonce que tout objet R^A est π-atomique (cf. [1]). Notons bien que dans le cas particulier où $J = \emptyset$, cet axiome énonce que

$$\mathcal{C}(R^A, 0) = \emptyset$$

2. Une conséquence de (a_1) est $\mathcal{C}(R^0, 0) = \emptyset$ ce qui implique grâce à (a_3) :

$$\mathcal{C}(R^0, R) = \{\Lambda^{-1}_{R^0,1}(\perp_{R^0,R^1})\}$$

Soit le modèle de jeux formé par la catégorie dont :
– Les objets sont les jeux positifs semi-simples.
– Les morphismes sont les stratégies transverses innocentes.

Comme précédemment, il faut prendre pour $|\_|$:
- Si $f : A \longrightarrow B$, $|f|$ est la somme des tailles des $P - vues$ de la stratégie innocente sur $A^{\perp} \parr \uparrow B$.
- Si $f : A \longrightarrow R$, $|f|$ est la somme des tailles des $P - vues$ de la stratégie innocente sur $A^{\perp} \parr B^{\perp}$ associée.

Les axiomes $(a'_1) - (a'_6)$ sont vérifiés dans ce modèle de jeux :
- Les axiomes (a'_1), (a'_2), (a'_4),(a'_5) et (a'_6) sont vérifiés pour les mêmes raisons que celles évoquées pour la catégories des morphismes transverses totaux car la totalité n'intervenait pas dans leur justification.
- (a_3) : à l'exception de la stratégie jouant seulement deux coups (le coup initial de R^A puis le coup initial de R), les stratégies transverses entre R^A et R sont la même chose que les stratégies non vides totales sur R^A. Celles-ci peuvent jouer dans plusieurs "copies" de A, identifiées par chaque coup justifié par le coup initial $*$ de R^A. On peut en dériver une stratégie jouant entre R^A et A qui se comporte en jouant sur A comme la stratégie de départ joue sur la première copie de A (correspondant au premier coup justifié par $*$) et jouant sur R^A comme la stratégie de départ joue sur les autres copies de A (remarque : il est possible que la stratégie n'utilisait qu'une seule copie, auquel cas la nouvelle stratégie ne joue pas dans R^A). Il est clair que la nouvelle stratégie qui est un désentrelacement de la première, a la même norme.
  De plus la stratégie jouant seulement deux coups, vue comme morphisme entre R^A et R^1, s'identifie à $t_{R^A}; id^{\dagger}_{R^1}$.

5.5 Le résultat de définissabilité

Théorème 5.7 (Définissabilité pour LLP_Y) *Dans toute catégorie de continuation $\mathcal{C}$ avec opérateur de point fixe paramétrique, vérifiant les propriétés axiomatiques $(a'_1) - (a'_6)$, tout morphisme compact $f : A \longrightarrow \Pi$ entre interprétations de formules de LLP est définissable par une preuve de LLP_Y.*

De la même façon que précédemment, il suffit de démontrer le résultat suivant : tout morphisme $f : A \longrightarrow \Pi$, où A (resp. Π s'il est non vide) est une formule additive, est définissable par une preuve de LLP_Y .
Soit $\Pi = C$ si $f : [\![A]\!] \longrightarrow [\![C]\!]$ et Π vide si $f : [\![A]\!] \longrightarrow R$.
La preuve est par récurrence sur l'ordre lexicographique $(|f|, |A|+|\Pi|)$ (où $|\_|$ sur les formules désigne leur taille).

• Si $A = 0$, on a forcément $f = i_{\Pi}$ qui est l'interprétation de la preuve par $\top$
• Si $A = (\bigoplus_{i=1}^{n} R^{B_i}) \oplus R^C$ avec $n \geq 1$, par induction $in_l^{\bigoplus_{i=1}^{n} R^{B_i}, R^C}; f$ et $in_r^{\bigoplus_{i=1}^{n} R^{B_i}, R^C}; f$ sont définies par des preuves π_1 et π_2 (ces morphismes ont une norme inférieure à celle de f d'après (a'_5), et leurs objets de départ sont de taille strictement inférieure). On peut alors définir f par :

$$\frac{\dfrac{\pi_1}{\bigoplus_{i=1}^{n} R^{B_i} \vdash \Pi} \quad \dfrac{\pi_2}{R^C \vdash \Pi}}{(\bigoplus_{i=1}^{n} R^{B_i}) \oplus R^C \vdash \Pi}$$

• Si $A = R^B$ et $\Pi = C$ (C formule additive).

– Si $C = 0$, f n'existe pas (axiome (a_1')).
– Si $C = \bigoplus_{j=1}^{n} R^{C_j}$ avec $n > 1$, (a_1') permet d'écrire $f = g; in_{j_0}$ avec $|g| = |f|$. Le homset de g étant de complexité inférieure, on conclut que g est définissable par une preuve π, et donc que f l'est aussi par une preuve de la forme :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{!(B^\perp) \vdash !(C_{j_0}^\perp)}\oplus}{\ldots}\oplus}{!(B^\perp) \vdash \bigoplus_{j=1}^{n} !(C_j^\perp)}$$

– Si $C = R^D$, alors (a_2) permet d'écrire $f = \Lambda_{R^B,D}(g)$ avec $|g| < |f|$. D'après l'axiome (a_4), le morphisme g^a correspondant (entre formules additives) vérifie $|g^a| = |g|$, et on peut donc utiliser l'hypothèse d'induction pour obtenir une preuve π le définissant, si bien que f est l'interprétation de :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{[!(B^\perp) \otimes D]^a \vdash} \qquad \dfrac{\ldots}{!(B^\perp), D \vdash [!(B^\perp) \otimes D]^a}}{!(B^\perp), D \vdash}}{!(B^\perp) \vdash !(D^\perp)}$$

• Si $A = R^B$ et $\Pi = R$.
Il y a deux cas :
– Si $\Lambda_{R^B,1}(f) = \perp_{R^B,R^1}$, alors f est définissable par la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R^1 \vdash R^1}\,Y}{\vdash R^1}}{R^B \vdash R^1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \vdash 1}}{R^1, 1 \vdash} \qquad \dfrac{}{\vdash 1}}{R^1 \vdash}}{R^B \vdash}$$

(remarquons que si $B = 0$ seul ce premier cas est envisageable)
– Sinon, l'axiome (a_3') indique qu'on peut associer à f un morphisme g de même norme tel que $f = \Delta_{R^B}; \Lambda^{-1}_{R^B,R^B}(R^g)$ avec $g \in \mathcal{C}(R^B, B)$.
Ici nous avons $B \neq 0$, donc on peut écrire $B = \bigoplus_{j=1}^{n} !(B_i^\perp)$ avec $n \geq 1$. Si $n > 1$ on se ramène au cas $n = 1$ par (a_1') (sans changer la norme du morphisme) : on peut donc supposer que $g : R^B \longrightarrow R^{B_{i_0}}$. On applique (a_2') qui donne un morphisme $h \in \mathcal{C}(R^B \otimes B_{i_0}, R)$ tel que $|h| < |f|$, et on passe au morphisme h^a entre formules additives (de même norme d'après l'axiome (a_4')) qui est définissable par induction. Ainsi f peut se définir par :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{[!(B^\perp) \otimes B_{i_0}]^a \vdash} \qquad \dfrac{\ldots}{!(B^\perp), B_{i_0} \vdash [!(B^\perp) \otimes B_{i_0}]^a}}{!(B^\perp), B_{i_0} \vdash}}{!(B^\perp) \vdash !(B_{i_0}^\perp)}}{\ldots}}{!(B^\perp) \vdash B}}{!(B^\perp), !(B^\perp) \vdash}}{!(B^\perp) \vdash}$$

□

Nous pouvons également donner un résultat de définissabilité pour LLP_{rY}.

L'opérateur de point fixe $(\_)^\dagger$, dans le cas concret du modèle de jeux précédemment cité, vérifie les propriétés additionnelles suivantes :
– Pour tous morphismes $f : X \otimes \Gamma \otimes R^A \longrightarrow R^A$ et $g : Y \otimes \Gamma \otimes R^A \longrightarrow R^A$, on a :

$$[distrib_g^{X,Y,\Gamma\otimes R^A}; (f+g)]^\dagger = distrib_g^{X,Y,\Gamma}; (f^\dagger + g^\dagger) \tag{1}$$

– Pour tout morphisme $f : \Gamma \longrightarrow R^A$

$$[\pi_1^{\Gamma,R^A}; f]^\dagger = f \tag{2}$$

Proposition 5.8 (Conservativité de LLP_{rY}) *Soit une catégorie de continuation avec opérateur de point fixe vérifiant les propriétés 1 et 2.*
Pour toute dérivation π de LLP_Y d'un séquent de la forme $\Gamma \vdash$, il existe une démonstration π' de LLP_{rY} du même séquent, telle que $[\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]$

La démonstration est analogue à celle de la propriété 3.8. Des nouveaux cas sont à considérer lorsque l'on tente de permuter la règle incorrecte R et la règle correcte R' immédiatement en dessous, puisque R' peut être une règle Y.
Si R est un règle c, w portant sur le contexte de Y, $\perp$ ou $⅋$, on permute les deux règles sans changer la sémantique (grâce en particulier à la propriété de "naturalité" des opérateurs de point fixe).
Si R est un w portant sur la formule effacée par la règle Y, on élimine la succession R, R'. La sémantique est inchangée car l'opérateur vérifie 2
Si R est une règle $\&$, on permute les règles appliquant une règle Y sur chacune des deux prémisses de $\&$. La sémantique est inchangée car l'operateur vérifie 1. $\square$

Ceci a pour corollaire :

Théorème 5.9 (Définissabilité pour LLP_{rY}) *Dans toute catégorie de continuation $\mathcal{C}$ avec opérateur de point fixe vérifiant les propriétés axiomatiques $(a'_1) - (a'_6)$ et telle que l'opérateur de point fixe vérifie les propriétés 1 et 2, tout morphisme compact $f : A \longrightarrow R$ dont le domaine est l'interprétation d'une formule de LLP est définissable par une preuve de LLP_{rY}.*

6 $\lambda\mu$-calcul avec point fixe

6.1 Définition

Ce calcul est obtenu en ajoutant au $\lambda\mu$-calcul étudié précédemment :

• Termes :

$$t \quad ::= \quad \dots \quad | \quad FIX(t)$$

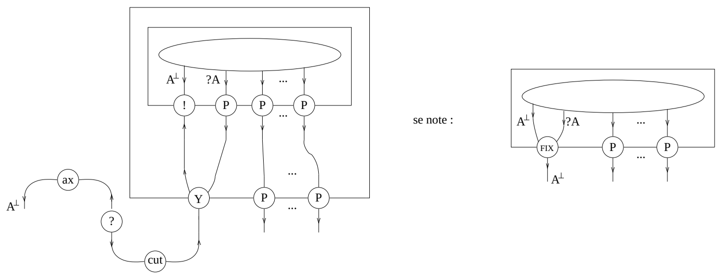
• Règles de typage :

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \longrightarrow A \mid \Delta}{\Gamma \vdash FIX(t) : A \mid \Delta} FIX$$

6.2 Traduction dans LLP_{rY}

Il nous faut ajouter la construction pour traduire FIX.

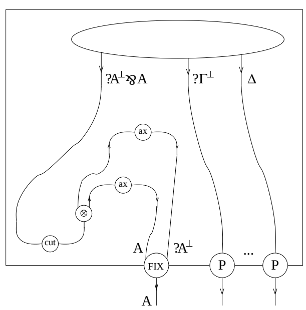
Pour cela, nous introduisons une pseudo-boîte dans les réseaux avec point fixe, qui n'est qu'une abréviation pour une construction plus riche :



Nous introduisons le vocabulaire suivant, qui nous sera utile dans la section suivante :

– Les réseaux avec boîte Y pouvant être lus comme des réseaux avec boîte FIX uniquement au lieu de boîtes Y sont appelés ici *réseaux de type FIX*.
– Les réseaux de type FIX tels que toute “boîte” FIX apparaît comme immédiatement emboîtée dans une !-boîte (c'est-à-dire que la boîte ! contient un réseau qui est exactement la boîte FIX) sont appelés *réseaux de type FIX!*.

Nous traduisons la règle FIX ainsi :

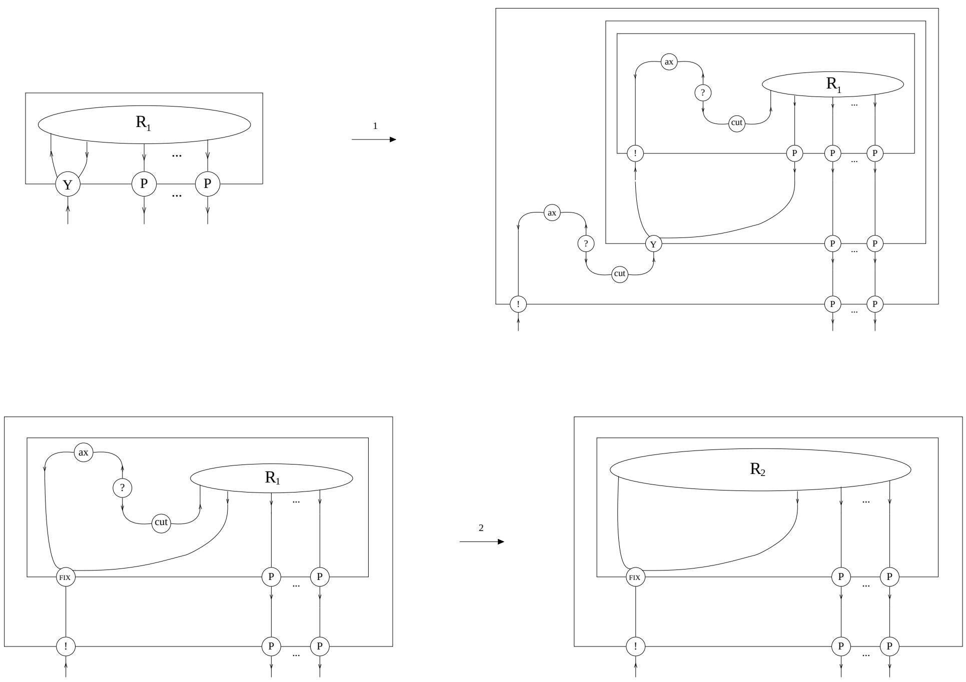


6.3 Le résultat de définissabilité

Nous procédons de la même manière que précédemment. Il nous faut une méthode de séquentialisation des réseaux avec point fixe sans conclusion positive vers le $\lambda\mu$-calcul avec point fixe.
Nous allons profiter de la soundness de l'interprétation dans les catégories de continuation pour ne travailler qu'avec des réseaux β-normaux.
Remarquons tout d'abord que la traduction du $\lambda\mu$-calcul vers les réseaux ne génère que des boîtes FIX et pas de boîtes Y générales. Il est toutefois possible de surmonter cette difficulté :

Proposition 6.1 *Soit $\mathcal{R}$ un réseau polarisé avec boîtes Y, β-normal. Il existe un réseau polarisé de type $FIX!$, ayant mêmes conclusions et même sémantique dans les catégories de continuation, et dont les seuls noeuds cut éventuels relient un noeud ? à un noeud ! ou Y.*

La démonstration se fait par induction sur le nombre d'emboîtements de boîtes Y du réseau $\mathcal{R}$.
On transforme simultanément toutes les boîtes Y du niveau zéro de la manière suivante :



Remarquons d'abord que la transformation 1 ne modifie pas la sémantique dans les catégories de continuation. Ensuite, nous appliquons l'hypothèse d'induction au réseau $\mathcal{R}_1$ qui se transforme donc en un réseau $\mathcal{R}_1'$ de type $FIX!$ avec pour seuls noeuds *cut* éventuels ceux reliant un noeud ? à un noeud ! ou Y. Dans le réseau constitué de l'ensemble (ax - ? - cut - $\mathcal{R}_1'$), la prémisse positive du noeud *cut* peut être reliée à un noeud *ax* (auquel cas on élimine cette coupure) ou un noeud ! (auquel cas on ne fait rien). Dans les deux cas on aboutit à un réseau $\mathcal{R}_2$ de type $FIX!$ et dont les seuls noeuds *cut* éventuels relient un noeud ? à un noeud ! ou Y. $\square$
Remarque : les seuls noeuds *cut au niveau zéro* dans les réseaux de type $FIX!$ obtenus via la proposition 6.1 relient un noeud ? à un noeud !.

Nous devons définir à présent la ι-expansion pour des réseaux de type FIX (nous conservons la définition antérieure de la ι-expansion des formules) :

Définition 6.2 (ι-expansion) *La ι-expansion $\mathcal{R}^\iota$ d'un réseau $\mathcal{R}$ consiste, dans le réseau où les contenus des boîtes ont été déjà récursivement ι-expansés, à transformer simultanément au* *niveau 0 :*

- *les noeud axiomes $A - A^\perp$ en noeuds axiomes $A^\iota - (A^\iota)^\perp$*
- *les noeuds $\top$ de conclusions $\top, \Delta$ en noeuds $\top$ de conclusions $\top, \Delta^\iota$*
- *les noeuds w introduisant A en noeuds w introduisant A^ι*
- *les noeuds $\perp$ en noeuds w introduisant $\perp$*
- *les noeuds ? en un ensemble formé du noeud ? dont la conclusion est reliée par un $\parr$ à un noeud $\perp$.*
- *les boîtes ! de telle sorte que la conclusion du noeud ! se retrouve reliée par un $\otimes$ à un noeud 1.*
- *les boîtes FIX comme sur la figure 6.3.*

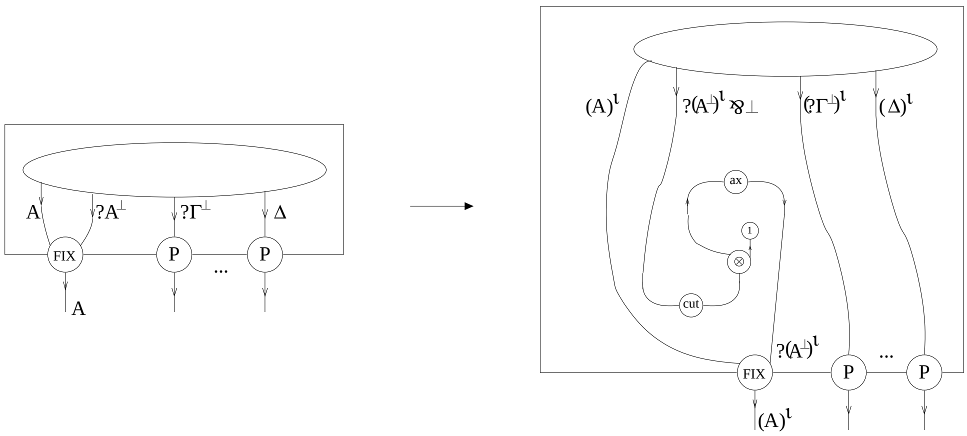


FIG. 9 – ι-expansion d'une boîte FIX

La ι-expansion transforme un réseau de type FIX (resp. $FIX!$) en un réseau de type FIX (resp. $FIX!$).

Nous avons alors la propriété suivante :

Proposition 6.3 *Pour tout réseau polarisé avec point fixe $\mathcal{R}$ de type $FIX!$ de conclusions $A, A_1, \ldots, A_n$ toutes négatives et dont les seuls noeuds cut éventuels relient un noeud ? à un noeud ! ou Y, il existe un réseau $\mathcal{R}'$, de conclusions $A^\iota, A_1^\iota, \ldots, A_n^\iota$, tel que :*

- *$\mathcal{R}'$ se $\beta\eta$-réduit en $\mathcal{R}^\iota$.*
- *$\mathcal{R}'$ est l'interprétation d'un terme du $\lambda\mu$-calcul typé avec point fixe de la forme :*

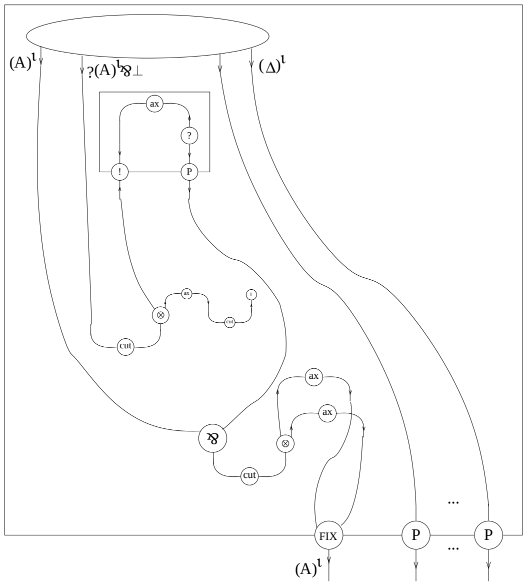
$$\vdash t : A^\iota \mid \alpha_1 : A_1^\iota, \ldots, \alpha_n : A_n^\iota$$

La démonstration se fait par induction sur la taille de $\mathcal{R}^\iota$ et par cas. Signalons une différence importante avec la preuve de la proposition 4.2 : l'induction passe un peu plus difficilement car le contenu d'une !-boîte d'un réseau de type $FIX!$ n'est en général qu'un réseau de type FIX et pas de type $FIX!$.
Plus précisément :

- lorsque le contenu de la !-boîte n'est pas réduit à une "boîte" FIX alors ce contenu est de type $FIX!$,
- lorsque le contenu de la !-boîte est exactement une "boîte" FIX alors ce contenu n'est que de type FIX, mais le contenu de la boîte FIX est lui de type $FIX!$.

Ainsi on ne peut pas appliquer directement l'hypothèse d'induction au contenu de la !-boîte dans le deuxième cas. Cependant le contenu de la boîte ! est tout de même le $\beta\eta$-réduit d'un réseau qui est l'interprétation d'un terme typé du $\lambda\mu$-calcul avec point fixe. Nous le démontrons en expliquant comment la ι-expansion d'une "boîte" FIX dont le contenu est un réseau de type $FIX!$ dont les seuls noeuds *cut* éventuels relient un noeud ? à un noeud ! ou Y est le $\beta\iota$-réduit d'un réseau provenant du $\lambda\mu$-calcul.
On applique l'hypothèse d'induction à la ι-expansion du contenu de la "boîte" FIX. Alors la ι-expansion de la

boîte FIX et de son contenu, est bien le $\beta\eta$-réduit du réseau représenté sur la figure suivante :



Ce réseau pouvant se calculer comme un terme du $\lambda\mu$-calcul de la manière suivante, si $\vdash t : A^\iota \longrightarrow \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash t : A^\iota \longrightarrow \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota \qquad \dfrac{}{x : A^\iota \vdash x : A^\iota \mid}}{x : A^\iota \vdash (t)x : \mathbf{F} \mid \alpha : A^\iota, \Delta^\iota}}{x : A^\iota \vdash \mu\alpha.(t)x : A^\iota \mid \Delta^\iota}}{\vdash \lambda x.\mu\alpha.(t)x : A^\iota \longrightarrow A^\iota \mid \Delta^\iota}}{\vdash FIX(\lambda x.\mu\alpha.(t)x) : A^\iota \mid \Delta^\iota}$$

Ainsi nous venons de montrer que lorsqu'on a une boîte ! dans $\mathcal{R}^\iota$, son contenu est par induction le $\beta\eta$-réduit d'un réseau provenant d'un terme du $\lambda\mu$-calcul typé avec point fixe.

Ceci connu, les différents cas pour la structure de $\mathcal{R}^\iota$ se traitent sur le modèle de la démonstration de 4.2 :
• Cas 1 : comme pour la proposition 4.2.
• Cas 2 : au niveau zéro de $\mathcal{R}^\iota$ ne peut exister de noeud *cut* qu'entre des noeuds ? et !. La ι-expansion ne rajoutant pas de *cut* au niveau zéro, les seuls noeuds *cut* restant au niveau zéro proviennent des *cut* entre des noeuds ? et !, qui via ι-expansion sont devenus des *cut* entre noeuds $\parr$ et $\otimes$.
Par hypothèse d'induction, le réseau situé en premisse négative du noeud *cut* est le $\beta\eta$-réduit d'un réseau provenant d'un terme type de la forme $\vdash t : A^\iota \longrightarrow \mathbf{F} \mid \Delta^\iota$ et de même pour le contenu de la boîte ! surplombant le noeud $\otimes$ prémisse du noeud *cut*, auquel on peut associer un terme $\vdash t' : A^\iota \mid \Delta^\iota$. Le réseau $\mathcal{R}^\iota$ apparaît alors comme la $\beta\eta$-réduction d'un réseau provenant d'un terme de la forme $[\gamma](t)t'$ (les détails techniques sont identiques à ceux expliqués dans la démonstration de la proposition 4.2).
• Cas 3 : ce cas se traite comme dans la proposition 4.2
• Cas 4 : ce cas se traite exactement comme dans la proposition 4.2, car lorsque $\mathcal{R}^\iota$ est constitué d'un arbre positif juché sur un noeud ?, cet arbre ne peut pas contenir de boîte Y au niveau zéro puisque $\mathcal{R}^\iota$ est de type FIX!. □

Corollaire 6.4 *Pour tout réseau polarisé avec point fixe β-normal $\mathcal{R}$ de conclusions $A, A_1, \ldots, A_n$ toutes négatives, il existe un réseau $\mathcal{R}'$, de conclusions $A^\iota, A_1^\iota, \ldots, A_n^\iota$, tel que :*
– $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$ ont même sémantique dans les catégories de continuation.

– $\mathcal{R}'$ *est l'interprétation d'un terme du $\lambda\mu$-calcul typé avec point fixe de la forme :*

$$\vdash t : A^\iota \mid \alpha_1 : A_1^\iota, \ldots, \alpha_n : A_n^\iota$$

On en déduit finalement :

Théorème 6.5 (Définissabilité) *Dans toute catégorie de continuation $\mathcal{C}$ avec opérateur de point fixe paramétrique, vérifiant les propriétés axiomatiques $(a_1') - (a_6')$, et telle que l'opérateur de point fixe vérifie les propriétés additionnelles 1 et 2, tout morphisme compact $f : A \longrightarrow R$ dont le domaine est l'interprétation d'une formule de LLP est définissable par un terme du $\lambda\mu$-calcul typé avec point fixe.*

Références

[1] Samson Abramsky. Axioms for definability and full completeness. In C. Stirling G. Plotkin and M. Tofte, editors, *Proof, Language and Interaction : Essays in Honour of Robin Milner*, pages 55–75. MIT Press, 2000.

[2] Samson Abramsky and Guy McCusker. Game semantics. In H. Schwichtenberg and U. Berger, editors, *Logic and Computation : Proceedings of the 1997 Marktoberdorf Summer School*. Springer-Verlag, 1998.

[3] Andrea Asperti and Giuseppe Longo. *Categories, Types and Structures. An introduction to Category Theory for the working computer scientist*. M.I.T. Press, 1991.

[4] Vincent Danos et Paul-André Melliès. Sémantique des jeux, 2001. Notes de cours du DEA Programmation.

[5] Paul-André Melliès et Peter Selinger. Polarized categories and games. Manuscrit, 2001.

[6] M.P. Fiore. Axiomatic domain theory. *Domains and denotational semantics : History, accomplishments and open problems, number 59 of Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, pages 227–256, 1996.

[7] Jean-Yves Girard. Proof-nets : the parallel syntax for proof-theory. In Ursini and Agliano, editors, *Logic and Algebra*. Marcel Dekker, 1996.

[8] Olivier Laurent. Logique linéaire polarisée et logiques classiques. Mémoire du magistère M.M.F.A.I., Ecole Normale Supérieure de Paris, Septembre 1999.

[9] Olivier Laurent. Polarized proof-nets and $\lambda\mu$-calculus. To appear in *Theoretical Computer Science*, 2000.

[10] Olivier Laurent. Polarized games for classical logic (extended abstract). January 2001.

[11] Olivier Laurent, Myriam Quatrini, and Lorenzo Tortora de Falco. Polarized and focalized linear and classical proofs. Prépublication 24, Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille, France, September 2000.

[12] Guy McCusker. *Games and Full Abstraction for a Functional Metalanguage with Recursive Types*. PhD thesis, Imperial College, University of London, 1996. Published in Springer-Verlag's Distinguished Dissertations in Computer Science series, 1998.

[13] Saunders McLane. *Categories for the working mathematician*. Springer, Berlin, 1971.

[14] Peter Selinger. Control categories and duality : on the categorical semantics of the lambda-mu calculus. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11 :207–260, 2001.

[15] Alex K. Simpson and Gordon D. Plotkin. Complete axioms for categorical fixed-point operators. In *Logic in Computer Science*, pages 30–41, 2000.

[16] M. B. Smyth and G. D. Plotkin. The category-theoretic solution of recursive domain equations. *SIAM Journal on Computing*, 11(4) :761–783, November 1982.