INTRODUCTION

L'étude des réseaux de démonstration de la Logique Linéaire, inaugurée par [Gir1] et poursuivie entre autres dans [Dan], [DR], [Ret] a mis en évidence la structure combinatoire originale de *graphe apparié*—en bref un graphe où l'on distingue certaines paires d'arètes coïncidentes.

Notre étude part de la simple remarque que l'on peut associer à un tel objet G, comme on le fait pour un graphe ordinaire, un complexe de groupes abéliens libres

$$0 \longrightarrow C_1(G) \xrightarrow{\partial} C_0(G) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

et par conséquent une homologie $H_*(G)$.
On s'aperçoit alors que celle-ci caractérise les réseaux, fournissant par là un nouveau critère de correction—directement décidable en temps polynomial au moyen d'un algorithme courant. Elle permet en outre de préciser la structure de G, au-delà du seul problème de correction.

Parmi les conséquences de cette approche, on retiendra

- une interprétation topologique des connecteurs linéaires *tenseur* et *par* fondée sur la représentation des réseaux par des CW-complexes d'homologie convenable. La géométrie du *par* se trouvera en particulier liée de façon inattendue à celle du ruban de Moebius.
- une formulation alternative de la notion de *module* au sens de [DR] et [Tro] faisant intervenir l'homologie relative d'un module par rapport à sa frontière.
- de nouvelles intuitions sur la prouvabilité des formules multiplicatives: à la lumière des critères homologiques de recollement des modules on pourra en effet plonger le problème dans un cadre euclidien où s'expriment très naturellement des conditions métriques de prouvabilité.

On trouvera également un prolongement des résultats de [LW] sur la complexité du fragment multiplicatif, à savoir que le problème de la décision des formules dans sa version abstraite est NP-complet. Si l'homologie n'intervient pas ici de façon essentielle, elle simplifie quelque peu la rédaction des preuves.

Le lecteur percevra sans difficulté l'arbitraire de la définition (1), même si les résultats que nous venons de citer justifient a posteriori notre choix.
Aussi avons nous montré qu'aucune théorie homologique H raisonnable des graphes appariés ne peut caractériser les réseaux par la condition $H_*(G) = 0$, ce qui nous laisse peut d'espoir de simplifier substantiellement notre critère.

Les éléments de Logique Linéaire et de Topologie Algébrique étant rappelés ici de façon très brève, nous renvoyons à [Gir1], [Tro] pour la première, et à [Gib] ou aux premiers chapitres de [Mun] pour la seconde.
Evoquons pour terminer deux tâches qui nous paraissent prolonger naturellement le présent travail: (1) obtenir, pour des réseaux plus généraux, des invariants géométriques analogues à nos groupes d'homologie et (2) approfondir la représentation métrique citée plus haut, et dans laquelle la décision des formules apparaît comme un problème d'optimisation.

REMERCIEMENTS

Je remercie Jean-Yves Girard d'avoir accepté de diriger ma thèse. Ses encouragements, ses conseils et la source inépuisable d'inspiration que représentent ses travaux m'ont permis de la mener à bien.

Je remercie Alain Prouté. Cette étude doit beaucoup à ses exposés d'Homologie et à ses remarques sur la partie topologique du texte.

Merci infiniment à Yves Lafont et à Jean Gallier pour l'attention qu'ils ont portée à ce travail, ainsi qu'à Jacqueline Vauzeilles et à Jean-Louis Krivine qui ont accepté de participer au jury.

Je remercie également Vincent Danos, Eric Duquesne, Arnaud Fleury, Jean-Baptiste Joinet, Jean-François Lacarra, Laurent Régnier, Christian Rétoré, Harold Schellinx et Jacques van de Wiele. J'ai largement profité de leurs propres recherches et de leurs questions, critiques et suggestions.

Je remercie enfin Michel Parigot de m'avoir soutenu et encouragé tout au long de ce travail ainsi que Pascal Manoury, Christophe Raffalli et Paul Rozière pour leur aide TEXnique.

CHAPITRE 1

Logique linéaire multiplicative

1.1. Calcul des séquents linéaires

Les formules multiplicatives de la logique linéaire sont construites sur les variables propositionnelles $a_1, \ldots, a_i, \ldots$ et $a_1^\perp, \ldots, a_i^\perp, \ldots$ au moyen des connecteurs binaires $\wp$ (*par*) et $\otimes$ (*tenseur*).
A et B désigneront des formules quelconques, et Γ, Δ des multiensembles de formules.
La *négation linéaire* $(.)^\perp$ est l'involution de l'ensemble des formules définie inductivement par $(a_i)^\perp = a_i^\perp$, $(A \wp B)^\perp = A^\perp \otimes B^\perp$ et $(A \otimes B)^\perp = A^\perp \wp B^\perp$.
Les *séquents* sont les expressions de la forme $\vdash \Gamma$ et les règles du calcul s'écrivent *

- axiome

$$\vdash A, A^\perp$$

- coupure

$$\frac{\vdash \Gamma, A \vdash A^\perp, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

- tenseur

$$\frac{\vdash \Gamma, A \vdash B, \Delta}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Delta}$$

- par

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B}$$

* Les preuves de ce texte ont été composées grâce aux macros de Paul Taylor

Dans une preuve donnée, les occurrences des formules sur lesquelles les règles portent effectivement seront dites *actives*—ici A, $A^\perp$, B, $A \otimes B$ et $A \wp B$. Ce sont respectivement les *prémisses principales* et les *conclusions principales* des règles correspondantes.
On notera ce système LLM (logique linéaire multiplicative) et L(a) le fragment construit sur les seules variables propositionnelles a et $a^\perp$.
Nous rencontrerons également le fragment neutre N, dont les formules sont construites sur les seuls atomes 1 et $\perp = 1^\perp$ et dont les règles sont, outre les règles *coupure*, *tenseur* et *par* ci-dessus, l'axiome

$$\vdash 1$$

et l'affaiblissement

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp}$$

On peut enfin étendre ce calcul en construisant les formules à partir des prédicats atomiques $px_1 \ldots x_k$ et leur négation linéaire $p^\perp x_1 \ldots x_k$ et en ajoutant aux règles précédentes les règles habituelles des quantificateurs:

- Pour tout

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall x A}$$

  où l'on suppose que x n'est pas libre dans Γ.

- Il existe

$$\frac{\vdash \Gamma, A[t/x]}{\vdash \Gamma, \exists x A}$$

1.2. Réseaux

Soit π une preuve dans LLM. On lui associe le graphe G_π construit de la manière suivante: Les sommets de G_π sont les occurrences actives des formules de π.
On trace une arête entre deux formules de G_π si et seulement si (1) ce sont les deux conclusions d'un axiome ou (2) ce sont les deux prémisses principales d'une coupure ou enfin (3) ce sont respectivement une prémisse principale et la conclusion principale d'une même règle logique.

G_π est le *réseau* associé à π.

$\triangleright$ Exemple.
Si π est

$$\dfrac{\dfrac{\vdash a_1, a_1^\perp \quad \vdash a_2^\perp, a_2}{\vdash a_1, a_1^\perp \otimes a_2^\perp, a_2}}{\vdash a_1, (a_1^\perp \otimes a_2^\perp) \wp a_2}$$

G_π est le graphe de la figure 1.2.1.

figure 1.2.1

$\triangleleft$

On prendra l'habitude de distinguer graphiquement les paires d'arètes provenant d'une règle *par*, comme sur la figure précédente.
Les preuves se représentent donc naturellement comme des graphes dans lesquels on a distingué certaines paires d'arètes coincidentes: c'est précisément la structure géométrique de ces objets que nous allons étudier.
Remarquons enfin en suivant [Gir2] que le procédé se généralise aux quantificateurs: on trace alors des arètes supplémentaires entre (1) la prémisse et la conclusion principale d'une règle $\exists$ et (2) toute formule où x est libre et la conclusion principale de la règle $\forall$ pour laquelle x est variable propre (en convenant au préalable de ne pas employer deux fois la même variable propre et de remplacer par une constante toute variable libre qui n'est pas variable propre d'une règle $\forall$).

CHAPITRE 2

Graphes et réseaux

2.1. Graphes appariés

Par *graphe* on entend comme d'habitude un couple $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ où $\mathcal{S}$ est un ensemble fini et $\mathcal{A}$ est un ensemble de paires d'éléments de $\mathcal{S}$. Les éléments de $\mathcal{S}$ sont les *sommets* et ceux de $\mathcal{A}$ les *arètes* du graphe. Si u et v sont deux sommets, l'arète $\{u, v\}$ sera notée uv; les deux arètes orientées correspondantes seront notées (uv) et (vu).

Définition 2.1.1. *Un graphe apparié est un couple $(G, \mathcal{P})$ où G est un graphe et $\mathcal{P}$ un ensemble de paires d'arètes de G satisfaisant les conditions suivantes:*

- *Si $\{e, f\} \in \mathcal{P}$ alors e et f ont un sommet commun.*
- *Si $(p, p') \in \mathcal{P}^2$ et $p \neq p'$ alors $p \cap p' = \emptyset$.*

Quand le contexte le permettra on identifiera $(G, \mathcal{P})$ avec le graphe sous-jacent G. On notera $\mathcal{P} = \mathcal{P}(G)$. Un graphe apparié (en abrégé g.a) est un *arbre* si $\mathcal{P}(G) = \emptyset$ et son graphe sous-jacent est connexe sans cycles.
Soit G un g.a. Une *arète appariée* (ou *mobile*) e de G est une arète appartenant à une paire $p \in \mathcal{P}$. On note alors e^* l'unique arète telle que $\{e, e^*\} \in \mathcal{P}$. Les arètes non appariées seront dites *fixes* et leur ensemble sera noté $\mathcal{A}_f(G)$.
Une *orientation* de $(G, \mathcal{P})$ est une orientation de G telle que, pour toute paire $\{uw, vw\} \in \mathcal{P}(G)$, la paire correspondante d'arètes orientées soit $\{(uw), (vw)\}$ ou $\{(wu), (wv)\}$.
Soient G et G' des g.a. Un *morphisme* de G vers G' est une application $g : \mathcal{S}(G) \longrightarrow \mathcal{S}(G')$ qui vérifie les conditions suivantes:

- Si $uv \in \mathcal{A}_f(G)$ alors $g(u)g(v) \in \mathcal{A}_f(G')$ ou $g(u) = g(v)$.
- Si $\{uw, vw\} \in \mathcal{P}(G)$ alors $\{g(u)g(w), g(v)g(w)\} \in \mathcal{P}(G')$ ou $g(u) = g(v) = g(w)$.

G est un *sous-graphe* de G' si et seulement $\mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(G')$ et l'inclusion canonique est un morphisme.

Si G_1 et G_2 sont deux sous-graphes de G, $G_1 \cap G_2$ défini par $\mathcal{S}(G) = \mathcal{S}(G_1) \cap \mathcal{S}(G_2)$, $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(G_1) \cap \mathcal{A}(G_2)$ et $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(G_1) \cap \mathcal{P}(G_2)$ est un sous-graphe de G.
De la même façon $G_1 \cup G_2$ est le sous-graphe de G dont l'ensemble des sommets (resp. des arètes, des paires) est la réunion de l'ensemble des sommets (resp. des arètes, des paires) de G_1 et de G_2.

2.2. Réseaux

Définissons tout d'abord quelques graphes importants:

- U est le g.a défini par $\mathcal{S}(U) = \{s\}$ et $\mathcal{A}(U) = \emptyset$.
- D est le g.a défini par $\mathcal{S}(D) = \{s, t\}$ et $\mathcal{A}(D) = \emptyset$.
- T est le g.a défini par $\mathcal{S}(T) = \{s, t, u\}$, $\mathcal{A}(T) = \{su, tu\}$ et $\mathcal{P}(T) = \{\{su, tu\}\}$.

Soient maintenant G_1 et G_2 deux graphes quelconques. On peut former leur somme disjointe $G_1 \coprod G_2$. Si $s_1^i, \ldots, s_n^i$ sont des sommets distincts de G_i pour $i = 1$ et 2, les identifications $s_k^1 \approx s_k^2$ dans $G_1 \coprod G_2$ définissent sans ambiguité un nouveau graphe que l'on notera $G_1 \coprod G_2/\{s_1^1 \approx s_1^2, \ldots, s_n^1 \approx s_n^2\}$, à condition toutefois que $s_k^1 s_l^1$ et $s_k^2 s_l^2$ ne soient jamais simultanément des arètes, ce qui sera toujours le cas par la suite. Il faut en effet s'assurer que le graphe résultant en est bien un au sens de la définition, en particulier que deux arètes distinctes n'aient pas la même extremité. On pourrait bien entendu éviter cette difficulté en remplaçant nos graphes par des multigraphes appariés mais la rédaction de certains points en serait inutilement alourdie.

Définition 2.2.1. *Soient G_1 et G_2 deux g.a et s_1 (resp.s_2) un sommet de G_1 (resp.G_2).*
On notera $\mathrm{t}(G_1, G_2, s_1, s_2)$ le graphe $G_1 \coprod G_2/\{s_1 \approx s_2\}$.
Soient G_1 un g.a et s_1,s_2 deux sommets distincts de G_1.
On notera $\mathrm{p}(G_1, s_1, s_2)$ le graphe $G_1 \coprod T/\{s_1 \approx s, s_2 \approx t\}$

Les injections canoniques de G_1 et G_2 dans $\mathrm{t}(G_1, G_2, s_1, s_2)$ permettent d'identifier ces graphes à des sous-graphes de $\mathrm{t}(G_1, G_2, s_1, s_2)$ que l'on notera encore G_1 et G_2. Il en est de même pour G_1 et T par rapport à $\mathrm{p}(G_1, s_1, s_2)$.
Les opérations t et p (figure 2.2.1) correspondent évidemment aux connecteurs multiplicatifs *tenseur* ($\otimes$) et *par* ($\wp$).

Définition 2.2.2. *On appelle Π la plus petite classe de graphes appariés contenant les arbres et close par les opérations* t *et* p*. Les éléments de Π sont les réseaux.*

figure 2.2.1

Remarque. Si l'on oublie d'étiqueter par des formules les réseaux du chapitre précédent, on obtient bien entendu des réseaux particuliers au sens de la présente définition.
Le contexte sera d'ailleurs toujours suffisamment clair pour prévenir toute confusion entre les deux notions.

CHAPITRE 3

Homologie

3.1. Groupes d'homologie d'un graphe apparié

L'homologie des graphes ordinaires s'étend aux graphes appariés de la manière que nous allons décrire. Soit donc G un g.a orienté. Nous lui associons le complexe :

$$0 \longrightarrow C_1(G) \xrightarrow{\partial} C_0(G) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

où $C_0(G) = \mathbf{Z}[\mathcal{S}(G)]$ et $C_1(G)$ est le sous-groupe de $\mathbf{Z}[\mathcal{A}(G)]$ engendré par les arètes fixes et les éléments de la forme $e + e^*$ où e parcourt l'ensemble des arètes appariées. Les éléments de $C_i(G)$ sont les *chaines* de dimension i de G. ∂ est la restriction à $C_1(G)$ du morphisme bord défini par $\partial(uv) = v - u$ quelle que soit l'arète orientée (uv); ϵ est le morphisme d'*augmentation* défini par $\epsilon(u) = 1$ pour tout sommet u. Les eléments de $\ker \partial$ (resp. $\ker \epsilon$) sont les *1-cycles* (resp. *0-cycles*). Comme $\epsilon\partial = 0$ on peut poser:

Définition 3.1.1. *Les groupes d'homologie de G sont $H_0(G) = \ker \epsilon / \operatorname{im} \partial$ et $H_1(G) = \ker \partial$.*

Lorsque $\mathcal{P}(G) = \emptyset$ ce sont les groupes d'homologie réduite du graphe G. Dans ce cas $H_0(G)$ et $H_1(G)$ sont des groupes libres de rangs respectifs r_0 et r_1 où $r_0 + 1$ est le nombre de composantes connexes de G et r_1 est le nombre maximal de cycles indépendants de G.
Revenons au cas général. Si c est une chaine de dimension i, $\{c\}_G$ désignera sa classe d'homologie dans $H_i(G)$. Remarquons que ∂ dépend de l'orientation choisie, mais pas les groupes d'homologie.
Soit $\phi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de graphes appariés. ϕ induit naturellement des homomorphismes de groupes $\phi^i_{\#} : C_i(G) \longrightarrow C_i(G')$ qui rendent commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_1(G) & \xrightarrow{\partial} & C_0(G) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \phi^1_{\#} & & \downarrow \phi^0_{\#} & & \downarrow \mathrm{id} & & \\
0 & \longrightarrow & C_1(G') & \xrightarrow{\partial} & C_0(G') & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Il suffit en effet de prendre pour $\phi^1_\#$ la restriction à $C_1(G)$ du morphisme habituel de $\mathbf{Z}[\mathcal{A}(G)]$ vers $\mathbf{Z}[\mathcal{A}(G')]$ en remarquant que celui-ci envoie un élément de la forme $e+e^*$ sur un $e'+e'^*$ ou sur 0: la définition d'un morphisme a d'ailleurs été choisie pour cela.
ϕ induit donc des morphismes ϕ^i_* de $H_i(G)$ vers $H_i(G')$ qui vérifient les relations habituelles:

$$(\phi\theta)^i_* = \phi^i_*\theta^i_* \qquad \mathrm{id}_* = \mathrm{id}$$

$\triangleright$ Exemple 1. Soit G (figure 3.1.1) le graphe défini par

$$\mathcal{S}(G) = \{s_1, s_2, s_3\} \quad \mathcal{A}(G) = \{s_1s_2, s_1s_3, s_2s_3\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(G) = \{\{s_1s_3, s_2s_3\}\}$$

On oriente G en prenant pour arètes orientées $a_1 = (s_1s_3)$, $a_2 = (s_2s_3)$ et $a_3 = (s_1s_2)$.
$C_0(G) \cong \mathbf{Z}^3$ avec s_1, s_2 et s_3 pour générateurs et $C_1(G) \cong \mathbf{Z}^2$ avec $a_1 + a_2$ et a_3 pour générateurs. Pour tout couple d'entiers (m, n):

$$\partial(ma_3 + n(a_1 + a_2)) = m(s_2 - s_1) + n(2s_3 - s_1 - s_2) = 2ns_3 - (m+n)s_1 + (m-n)s_2$$

∂ est donc injective–c'est-à-dire $H_1(G) = 0$.
D'autre part $\ker\epsilon \cong \mathbf{Z}^2$ engendré par $c_1 = s_3 - s_1$ et $c_2 = s_3 - s_2$. Mais $\{c_2\}_G = -\{c_1\}_G$ parce que

$$c_1 + c_2 = \partial(a_1 + a_2)$$

et $2\{c_1\}_G = 0$ parce que

$$2c_1 = 2s_3 - 2s_1 = 2s_3 - s_1 - s_2 + s_2 - s_1 = \partial(a_1 + a_2 + a_3).$$

Enfin $\{c_1\}_G \neq 0$ car c_1 n'appartient pas à $\operatorname{im}\partial$. $H_0(G)$ est donc engendré par l'unique classe $\{c_1\}_G$, d'ordre 2 , c'est-à-dire que $H_0(G) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. $\triangleleft$

figure 3.1.1

▷ Exemple 2. Les groupes d'homologie des graphes U, D et T sont présentés dans le tableau suivant:

	U	D	T
H_0	0	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
H_1	0	0	0

Ils nous serviront plus tard. ◁

▷ Exemple 3. Soit G (figure 3.1.2) le graphe apparié défini par $\mathcal{S}(G) = \{s, t, u, v\}$, $\mathcal{P}(G) = \{\{us, ts\}, \{tu, vu\}\}$ et dont les arêtes orientées sont (us), (ts), (tu), (vu) et l'arête fixe (vs). En écrivant le complexe associé à ce graphe, on remarque que $\ker \epsilon \cong \mathbf{Z}^3$ avec pour générateurs $s-u$, $s-t$ et $s-v$. On peut donc former la matrice de ∂ (où le but est restreint à $\ker \epsilon$) par rapport aux bases $(a, b, c) = ((us) + (ts), (tu) + (vu), (vs))$ de $C_1(G)$ et $(s-u, s-t, s-v)$ de $\ker \epsilon$ respectivement:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} s-u \\ s-t \\ s-v \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

laquelle se réduit par transformations unimodulaires à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ces transformations reviennent simplement à écrire ∂ par rapport à de nouvelles $\mathbf{Z}$-bases des deux groupes. La seconde matrice montre immédiatement l'injectivité de ∂, soit $H_1(G) = 0$, et fournit directement une présentation de $H_0(G)$ par générateurs et relations, d'où $H_0(G) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

◁

3.2. Rappels d'homologie

Nous nous bornons ici à adapter à notre situation quelques notions fondamentales d'homologie.

figure 3.1.2

Soient G un g.a et K un sous graphe de G. $C_i(K)$ est naturellement un sous-groupe de $C_i(G)$ et on peut former $C_i(G,K)$, le groupes des *chaines relatives* de dimension i modulo K. La restriction de ∂ à $C_1(K)$ a son image dans $C_1(K)$ de sorte que ∂ passe au quotient, définissant un morphisme $\overline{\partial} : C_1(G,K) \longrightarrow C_0(G,K)$. L'homologie relative de G par rapport à K est celle du complexe:

$$0 \quad \longrightarrow \quad C_1(G,K) \quad \stackrel{\overline{\partial}}{\longrightarrow} \quad C_0(G,K) \quad \longrightarrow \quad 0$$

d'où la définition:

Définition 3.2.1. *Les groupes d'homologie relative de G par rapport à K sont $H_0(G,K) = C_0(G,K)/\operatorname{im}\overline{\partial}$ et $H_1(G,K) = \ker\overline{\partial}$.*

Notons $G \setminus K$ le graphe obtenu à partir de G en effaçant toutes les arètes de K ainsi que les sommets de K qui ne sont pas extrémités d'une arète restante. Il s'agit évidemment d'un sous-graphe de G. Nous pouvons alors reformuler le théorème d'excision comme suit:

Théorème 3.2.2. *Si K est un sous-graphe de G, $G_0 = G \setminus K$ et $K_0 = G_0 \cap K$, alors $H_i(G,K)$ est isomorphe à $H_i(G_0,K_0)$ pour $i = 1$ et 2.*

Preuve. On considère $f_i : C_i(G_0) \longrightarrow C_i(G,K)$, la composée des applications canoniques:

$$C_i(G_0) \quad \longrightarrow \quad C_i(G) \quad \stackrel{s_i}{\longrightarrow} \quad C_i(G,K)$$

Le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} C_1(G_0) & \stackrel{\partial}{\longrightarrow} & C_0(G_0) \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ C_1(G,K) & \stackrel{\overline{\partial}}{\longrightarrow} & C_0(G,K) \end{array}$$

f_i est surjective: soit $c \in C_i(G,K)$, il existe une chaine $d \in C_i(G)$ telle que $c = s_i(d)$ mais $d = d_0 + d_1$ avec $d_0 \in C_i(G_0)$ et $d_1 \in C_i(K)$. D'où $c = s_i(d_0 + d_1) = s_i(d_0)$ ce qui prouve le résultat.

Le noyau de f_i est clairement $C_i(G_0) \cap C_i(K)$, autrement dit $C_i(K_0)$.
On obtient donc un isomorphisme entre $C_i(G_0, K_0)$ et $C_i(G, K)$ qui commute à $\overline{\partial}$ donc aussi un isomorphisme des groupes d'homologie. ◇

Remarque. Nous aurons besoin, pour $i = 1$, d'une précision supplémentaire: par définition, K_0 n'a aucune arète donc $C_1(K_0) = 0$ et f_1 est un isomorphisme. Soit A le sous-groupe de $C_1(G_0)$ constitué des chaines c telles que $\partial c \in C_0(K_0)$. Le raisonnement précédent montre alors que l'image de A par f_1 est précisément $\ker \overline{\partial}$, c'est-à-dire $H_1(G, K)$.

Nous avons donc établi le

Lemme 3.2.3. *L'application $c \mapsto \{c\}_{G,K}$ réalise un isomorphisme de A sur $H_1(G, K)$.*

L'homologie relative donne lieu comme dans le cas habituel à une suite exacte longue:

Théorème 3.2.4. *Soit K un sous-graphe de G.La suite*

$$\cdots \longrightarrow H_i(K) \xrightarrow{i_*} H_i(G) \xrightarrow{j_*} H_i(G, K) \xrightarrow{\partial_*} H_{i-1}(K) \longrightarrow \cdots$$

est exacte.

Preuve. Le diagramme suivant est commutatif et les verticales sont exactes:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C_1(K) & \longrightarrow & C_0(K) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\
\downarrow i_\# & & \downarrow i_\# & & \downarrow \\
C_1(G) & \longrightarrow & C_0(G) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\
\downarrow j_\# & & \downarrow j_\# & & \downarrow \\
C_1(G, K) & \longrightarrow & C_0(G, K) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

donc le lemme du zig-zag s'applique, donnant la suite anoncée.
Rappelons la propriéte caractéristique de ∂_*, qui nous servira ultérieurement: pour toute chaine c de $C_1(G)$ telle que $\partial c \in C_0(K)$

$$\partial_* \{c\}_{G,K} = \{\partial c\}_K.$$

◇

Enfin, le *rang* d'un groupe abélien libre de type fini est sa dimension en tant que module sur $\mathbf{Z}$. Soient maintenant A un groupe abélien finiment engendré—non nécessairement libre—

et T le sous-groupe de torsion de A. Nous appellerons encore *rang* de A le rang du groupe libre A/T.
Si

$$0 \longrightarrow A_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

est un complexe de groupes abéliens de type fini, la *caractéristique d'Euler* de ce complexe est l'entier

$$\chi = \sum_j (-1)^j \operatorname{rang} A_j.$$

Une propriété fondamentale de χ est qu'il ne dépend que des groupes d'homologie du complexe. Plus précisément:

$$\chi = \sum_j (-1)^j \operatorname{rang} H_j.$$

En particulier, la caractéristique d'Euler d'une suite exacte est nulle.

3.3. Groupes d'homologie des réseaux

Nous pouvons à présent calculer l'homologie des éléments de Π.

Théorème 3.3.1. *Si G est un réseau et $p = \operatorname{card} \mathcal{P}(G)$, alors $H_1(G) = 0$ et $H_0(G)$ est un groupe fini d'ordre 2^p.*

Ce résultat est conséquence immédiate des deux lemmes suivants:

Lemme 3.3.2. *Soient G_1 et G_2 deux g.a, s_1 un sommet de G_1 et s_2 un sommet de G_2. Il y a des isomorphismes*

$$H_i(\mathrm{t}(G_1, G_2, s_1, s_2)) \cong H_i(G_1) \oplus H_i(G_2)$$

pour $i = 0$ et 1.

Preuve. Posons $G = \mathrm{t}(G_1, G_2, s_1, s_2)$. Le graphe $G_1 \cap G_2$ est isomorphe à U de sorte que la suite exacte de Mayer-Vietoris s'écrit

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(U) & \longrightarrow & H_1(G_1) \oplus H_1(G_2) & \longrightarrow & H_1(G) & \longrightarrow & \dots \\ & \dots & H_0(U) & \longrightarrow & H_0(G_1) \oplus H_0(G_2) & \longrightarrow & H_0(G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Mais $H_0(U) = H_1(U) = 0$ ce qui donne les isomorphismes souhaités. $\diamond$

Lemme 3.3.3. *Soient G_1 un g.a et s_1, s_2 deux sommets distincts de G_1.*

- $H_1(\mathrm{p}(G_1, s_1, s_2)) = H_1(G_1)$.
- *Si $H_0(G_1)$ est un groupe fini, alors* $\mathrm{card}\, H_0(\mathrm{p}(G_1, s_1, s_2)) = 2\,\mathrm{card}\, H_0(G_1)$.

figure 3.3.1

Preuve. Posons $G = \mathrm{p}(G_1, s_1, s_2)$ (figure 3.3.1). Comme $G_1 \cap T$ est isomorphe à D, la suite exacte de Mayer-Vietoris s'écrit:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(D) & \longrightarrow & H_1(G_1) \oplus H_1(T) & \longrightarrow & H_1(G) & \longrightarrow & \dots \\ & \dots & H_0(D) & \longrightarrow & H_0(G_1) \oplus H_0(T) & \longrightarrow & H_0(G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui, en vertu du tableau 1 devient

$$0 \longrightarrow H_1(G_1) \xrightarrow{\phi} H_1(G) \xrightarrow{\chi} \mathbf{Z}\{s_2 - s_1\}_D \xrightarrow{\theta} H_0(G_1) \oplus \mathbf{Z}\{s_3 - s_1\}_T \longrightarrow H_0(G) \longrightarrow 0$$

θ est défini par

$$\theta(\{s_2 - s_1\}_D) = (\{s_2 - s_1\}_{G_1}, -\{s_2 - s_1\}_T)$$

Comme $\{s_2 - s_1\}_T$ n'est pas nul dans $H_0(T)$, θ est injective. Donc $\mathrm{im}\,\chi = \ker\theta = 0$ et par conséquent ϕ est un isomorphisme, ce qui prouve la première assertion.
Supposons maintenant que $H_0(G_1)$ soit un groupe fini. Il admet une présentation:

générateurs	relations
$c_1, \dots c_p$	$n_i c_i = 0$ pour $i = 1, \dots p$

Nous pouvons alors écrire une relation:

$$\{s_2 - s_1\}_{G_1} = \sum_{i=1}^{p} l_i c_i$$

Dans T, $\{s_2 - s_1\}_T = 2c_0$ avec $c_0 = \{s_3 - s_1\}_T$. D'autre part $H_0(G_1) \oplus H_0(T)$ est engendré par $d_0 = (0, c_0)$ et les $d_i = (c_i, 0)$ pour $i = 1, \dots p$. Par conséquent $H_0(G)$ admet une présentation de la forme suivante :

générateurs	relations
$d_0, \dots d_p$	$n_i d_i = 0$ pour $i = 1, \dots p$
	$2d_0 - \sum_{i=1}^{p} l_i d_i = 0$

d'après l'exactitude de la suite précédente.
La matrice de cette présentation s'écrit:

$$M = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & \dots & -l_1 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & n_p & -l_p \\ 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Enfin

$$\operatorname{card} H_0(G) = |\det M| = |2n_1 \dots n_p| = 2 \operatorname{card} H_0(G_1)$$

ce qui prouve la seconde assertion. $\diamond$

Remarque. Nous aurons besoin plus tard d'une légère modification de ce résultat, à savoir que la conclusion reste valide lorsque l'hypothèse "$H_0(G_1)$ fini" est remplaçée par "$H_0(G)$ fini".
Reconsidérons en effet la suite

$$0 \longrightarrow H_1(G_1) \xrightarrow{\phi} H_1(G) \xrightarrow{\chi} \mathbf{Z}\{s_2 - s_1\}_D \xrightarrow{\theta} H_0(G_1) \oplus \mathbf{Z}\{s_3 - s_1\}_T \longrightarrow H_0(G) \longrightarrow 0$$

L'isomorphisme entre $H_1(G)$ et $H_1(G_1)$ est indépendant de l'hypothèse de finitude sur $H_0(G_1)$. Comme la caractéristique d'Euler de la suite s'annule, les groupes $H_0(G)$ et $H_0(G_1)$ ont le même rang. En particulier si l'un des deux groupes est fini, l'autre l'est aussi. D'où le résultat.

3.4. Le lemme de simplification

Soient G un g.a et a une arête appariée de G. On désignera par G^a le graphe obtenu à

partir de G en effaçant l'arète a^* et en rendant a fixe.
La présente section est consacrée à la comparaison des homologies de G et de G^a. Le lemme technique suivant énonce le résultat essentiel:

Lemme 3.4.1. *Soit G un graphe tel que $H_1(G) = 0$ et $H_0(G)$ est un groupe fini de cardinal g. Pour toute arète appariée a, il existe $b \in \{a, a^*\}$ telle que:*

- $H_1(G^b) = 0$.
- $H_0(G^b)$ *est un groupe fini avec* $\operatorname{card} H_0(G^b) \geq g/2$.

Preuve. Soient G satisfaisant les hypothèses du lemme et a une arète appariée. Posons $a = s_1 s_3$, $a^* = s_2 s_3$, $G_1 = G^{a^*}$ et $G_2 = G^a$. On peut considérer T comme un sous-graphe de G de sommets s_1,s_2,s_3. Notons $G_0 = G \setminus T$, et $T_i = T \cap G_i$ pour $i = 0$, 1 et 2 (figure 3.4.1).

figure 3.4.1

• $H_1(G) = H_1(T) = 0$ et $H_0(T) = \mathbf{Z}\{s_3 - s_1\}_T$ donc la suite exacte d'homologie relative s'écrit:

$$0 \longrightarrow H_1(G,T) \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{Z}\{s_3 - s_1\}_T \xrightarrow{g} H_0(G) \longrightarrow H_0(G,T) \longrightarrow 0$$

Mais $H_0(G)$ est fini donc aussi $H_0(G,T)$ de sorte que la caractéristique d'Euler de cette suite se réduit à

$$\operatorname{rang} H_1(G,T) - 1 = 0$$

et

$$H_1(G,T) \cong \mathbf{Z}$$

Soit A l'ensemble des chaines c de $C_1(G_0)$ telles que $\partial c \in C_0(T_0)$. Par (3.2.3)

$$A \cong H_1(G,T) \cong \mathbf{Z}$$

et est engendré par un unique élément c_0. $H_1(G,T)$ est donc engendré par

$$\gamma = \{c_0\}_{G,T}.$$

D'autre part, $\epsilon\partial c_0 = 0$ donc il y a des entiers m_1 et m_2 tels que

$$\partial c_0 = (m_1 + m_2)s_3 - m_1 s_1 - m_2 s_2.$$

Cela entraine:

$$\partial_* \gamma = \{\partial c_0\}_T = (m_1 - m_2)\{s_3 - s_1\}_T = (m_2 - m_1)\{s_3 - s_2\}_T$$

et par conséquent

$$\text{card}\, H_0(G) = |m_1 - m_2| \times \text{card}\, H_0(G,T) \tag{1}$$

Remarquons également que $|m_1 - m_2| > 0$ sinon ∂_* ne serait pas injective, en contradiction avec l'exactitude de la suite en $H_1(G,T)$.
• De la même façon, pour $i = 1$ et 2, $H_1(T_i) = 0$ et $H_0(T_i) = \mathbf{Z}\{s_3 - s_i\}_{T_i}$ donc la suite exacte s'écrit:

$$0 \longrightarrow H_1(G_i) \longrightarrow H_1(G_i,T_i) \xrightarrow{\partial_*^i} \mathbf{Z}\{s_3 - s_i\}_{T_i} \xrightarrow{g_i} H_0(G_i) \longrightarrow H_0(G_i,T_i) \longrightarrow 0$$

Ici encore $\gamma_i = \{c_0\}_{G_i,T_i}$ est un générateur de $H_1(G_i,T_i)$ et par définition:

$$\partial_*^i \gamma_i = \{\partial c_0\}_{T_i} = m_i\{s_3 - s_i\}_{T_i}$$

Soit $m = \max(|m_1|, |m_2|)$: comme $|m_1 - m_2| > 0$, $m \neq 0$.
Quitte à permuter a et a^*, on peut supposer que $m = |m_1|$.
En pareil cas, ∂_*^1 est injective et l'exactitude entraine

$$H_1(G_1) = 0$$

Ce qui prouve la première assertion du lemme.
La suite devient:

$$0 \longrightarrow H_1(G_1,T_1) \xrightarrow{\partial_*^1} \mathbf{Z}\{s_3 - s_1\}_{T_1} \xrightarrow{g_1} H_0(G_1) \longrightarrow H_0(G_1,T_1) \longrightarrow 0$$

D'après le théorème d'excision, $H_0(G_1,T_1) \cong H_0(G,T)$ donc $H_0(G_1,T_1)$ est fini et

$$\text{card}\, H_0(G_1) = |m_1| \times \text{card}\, H_0(G,T) \tag{2}$$

Enfin

$$|m_1 - m_2| \leq |m_1| + |m_2| \leq 2\,|m_1| \tag{3}$$

Les équations (1), (2) et (3) donnent alors

$$\mathrm{card}\, H_0(G) \leq 2\, \mathrm{card}\, H_0(G_1)$$

ce qu'il fallait démontrer. $\diamond$

Il est maintenant possible de donner une borne de $\mathrm{card}\, H_0(G)$ si ce groupe est fini et si $H_1(G) = 0$.

Proposition 3.4.2. *Soit G un g.a tel que $H_0(G)$ est fini et $H_1(G) = 0$. Alors*

$$\mathrm{card}\, H_0(G) \leq 2^{\mathrm{card}\, \mathcal{P}(G)}$$

Preuve. Par récurrence sur $\mathrm{card}\, \mathcal{P}(G)$. Si $\mathrm{card}\, \mathcal{P}(G) = 0$, G est un graphe au sens usuel donc $H_0(G)$ ne peut être fini que si $H_0(G) = 0$, ce qui donne le résultat dans ce cas.
Supposons que $\mathrm{card}\, \mathcal{P}(G) = n > 0$. On peut alors choisir une arète appariée a, et (3.4.1) donne b telle que $\mathrm{card}\, H_0(G) \leq 2\, \mathrm{card}\, H_0(G^b)$. Par hypothèse d'induction

$$\mathrm{card}\, H_0(G^b) \leq 2^{n-1}$$

donc

$$\mathrm{card}\, H_0(G) \leq 2^n$$

ce qu'il fallait montrer. $\diamond$

Soit (H) la conjonction des deux conditions suivantes:

- $H_0(G)$ est fini, de cardinal $2^{\mathrm{card}\, \mathcal{P}(G)}$.
- $H_1(G) = 0$.

Dans le cas des graphes qui vérifient (H), les résultats précédents ont une conséquence importante:

Lemme 3.4.3. *Si G vérifie (H), alors quelle que soit l'arète appariée a, G^a vérifie encore (H).*

Preuve. Soient G un graphe vérifiant (H) et a une arète appariée de G. La remarque essentielle est que les inégalité (3) de la preuve de (3.4.1) sont en fait des *égalités*.
En effet si ce n'est pas le cas, $|m_2 - m_1| < 2\,|m_1|$ et la même preuve entraine:

$$\mathrm{card}\, H_0(G) < 2\, \mathrm{card}\, H_0(G_1)$$

donc card $H_0(G_1) > 2^{\mathrm{card}\, \mathcal{P}G_1}$ en contradiction avec (3.4.2)
L'égalité en (3) entraine alors $|m_1| = |m_2|$ puis card $H_0(G) = 2\,\mathrm{card}\, H_0(G_1) = 2\,\mathrm{card}\, H_0(G_2)$ d'où le résultat. $\diamond$

Soit maintenant G avec $\mathrm{card}\, \mathcal{P}(G) = p$. Une *position d'interrupteurs* de G est ensemble $\sigma = \{a_1, \ldots, a_p\}$ formé en choisissant une arète a_i dans chaque paire de G.
On note alors alors G^σ le graphe $(((G^{a_1})^{\cdots})^{a_p})$ qui est un graphe ordinaire, d'où une conséquence évidente du lemme ci-dessus:

Proposition 3.4.4. *Si G satisfait (H), alors pour toute position d'interrupteurs σ, G^σ est un arbre.*

Autrement dit tout graphe satisfaisant (H) satisfait aussi le critère de correction de Danos et Régnier (voir [Gir2] ou [Dan]). On sait donc dès maintenant que les graphes satisfaisant (H) sont exactement les réseaux. Il nous semble néanmoins préférable de donner une preuve directe de séquentialisation, indépendante des résultats déjà connus et plus cohérente avec notre approche homologique de la question. Ce sera l'objet du prochain chapitre.

3.5. Quelques remarques sur le rang de $\mathbf{H}_0$

La digression qui suit a pour but de fournir une interprétation intuitive du rang de $H_0(G)$. Nous allons montrer que, tout au moins dans le cas où $H_1(G) = 0$, celui-ci a une relation très simple avec les composantes connexes des G^σ, σ étant une position d'interrupteurs de G.

Proposition 3.5.1. *Si $H_1(G) = 0$, alors*

$$\mathrm{rang}\, H_0(G) = \min_\sigma \mathrm{rang}\, H_0(G^\sigma)$$

lorsque σ parcourt l'ensemble de toutes les positions d'interrupteurs de G.

Cela résultera des deux lemmes suivants.

Lemme 3.5.2. *Pour toute position d'interrupteurs σ de G,*

$$\mathrm{rang}\, H_1(G^\sigma) - \mathrm{rang}\, H_0(G^\sigma) = \mathrm{rang}\, H_1(G) - \mathrm{rang}\, H_0(G).$$

Preuve. Il suffit de comparer les complexes associés respectivement à G et à G^σ:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1(G) & \xrightarrow{\partial} & C_0(G) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & C_1(G^\sigma) & \xrightarrow{\partial} & C_0(G^\sigma) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

A chaque arète de G^σ correspond ou bien la même arète de G ou bien la paire qui contient cette arète. Les groupes $C_1(G)$ et $C_1(G^\sigma)$ ont donc le même rang.
D'autre part $C_0(G)$ et $C_0(G^\sigma)$ coincident. Les deux complexes ont donc la même caractéristique d'Euler, ce qui donne le résultat. $\diamond$

Lemme 3.5.3. *Si $H_1(G) = 0$, toute paire de G contient une arète a telle que $H_1(G^a) = 0$.*

Preuve. Supposons au contraire que $H_1(G) = 0$ et qu'il existe une paire $p = \{a, a^*\}$ telle que $H_1(G^a) \neq 0$ et $H_1(G^{a^*}) \neq 0$. Il y a alors une 1-chaine γ_1 de G^a et une chaine γ_2 de G^{a^*}, toutes deux non nulles, et pour lesquelles

$$\partial\gamma_1 = \partial\gamma_2 = 0$$

Soit x_1 (resp. x_2) le coefficient de a (resp. a^*) dans γ_1 (resp. γ_2).
Si $x_1 x_2 = 0$, l'une des deux chaines est déjà dans $C_1(G)$, ce qui contredit $H_1(G) = 0$.
Sinon, on peut former

$$\gamma = x_2\gamma_1 + x_1\gamma_2$$

γ n'est pas nulle, car le coefficient de a y est $x_1 x_2 \neq 0$. De plus a et a^* ont même coefficient donc γ est dans $C_1(G)$. Enfin $\partial\gamma = 0$ ce qui contredit à nouveau $H_1(G) = 0$.

$\diamond$

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de (3.5.1) . Posons $\mu = \min_\sigma \operatorname{rang} H_0(G^\sigma)$. Comme $H_1(G) = 0$ nous pouvons réitérer l'application du lemme jusqu'à obtenir une position d'interrupteurs σ telle que $H_1(G^\sigma) = 0$. Le lemme (3.5.2) montre alors immédiatement que

$$\operatorname{rang} H_0(G) = \operatorname{rang} H_0(G^\sigma).$$

D'autre part, pour toute position d'interrupteurs σ',

$$\operatorname{rang} H_0(G^{\sigma'}) \geq \operatorname{rang} H_0(G^{\sigma'}) - \operatorname{rang} H_1(G^{\sigma'}) = \operatorname{rang} H_0(G^\sigma) - \operatorname{rang} H_1(G^\sigma) = \operatorname{rang} H_0(G^\sigma).$$

Cela entraine $\mu = \operatorname{rang} H_0(G^\sigma)$ d'où le résultat.

Remarque. Si l'on ne suppose plus que $H_1(G) = 0$, on peut seulement montrer que:

$$\min_\sigma \operatorname{rang} H_0(G^\sigma) \leq \operatorname{rang} H_0(G) \tag{1}$$

Montrons d'abord que dans toute paire il y a une arète a pour laquelle

$$\operatorname{rang} H_1(G^a) \leq \operatorname{rang} H_1(G) \tag{2}$$

Si γ est une 1-chaine et x une arète quelconque d'un graphe donné, on notera $\langle\gamma|x\rangle$ le coefficient de γ sur cette arète.
Soient maintenant G un graphe et $p = \{a, a^*\}$ une paire de G, deux cas se présentent:

- Pour toute chaine γ de $H_1(G^a)$, $\langle\gamma|a\rangle = 0$. En pareil cas $H_1(G^a) \subset H_1(G)$ et (2) est évident.
- Il existe une chaine $\gamma \in H_1(G^a)$ telle que $\langle\gamma|a\rangle \neq 0$. Pour tout $\gamma' \in H_1(G^{a^*})$ on peut alors former

$$\Phi(\gamma') = \langle\gamma|a\rangle\gamma' + \langle\gamma'|a^*\rangle\gamma \tag{3}$$

Il est clair que $\Phi(\gamma') \in H_1(G)$ et que Φ est une application linéaire. Soit $\gamma' \in \ker\Phi$. Par $\langle\Phi(\gamma')|a\rangle = 0$ et (3), il vient $\langle\gamma'|a^*\rangle\langle\gamma|a\rangle = 0$ donc aussi $\langle\gamma'|a^*\rangle = 0$, et à nouveau par (3), $\langle\gamma|a\rangle\gamma' = 0$ d'où $\gamma' = 0$. Par conséquent Φ est un morphisme injectif de $H_1(G^{a^*})$ dans $H_1(G)$, ce qui implique

$$\operatorname{rang} H_1(G^{a^*}) \leq \operatorname{rang} H_1(G)$$

et le résultat annoncé.

Il est alors facile de voir, comme plus haut, que (2) entraine (1).

figure 3.5.1

Le contre-exemple qui suit montre que l'on ne peut pas faire mieux, dans le cas général.
Soit G (figure 3.5.1) le graphe défini par $\mathcal{S}(G) = \{s, t, u, v\}$, $\mathcal{A}(G) = \{su, tu, sv, tv, uv\}$ et $\mathcal{P}(G) = \{\{su, tu\}, \{sv, tv\}\}$.
Posant $c_1 = (su) + (tu)$, $c_2 = (sv) + (tv)$ et $c_3 = (uv)$, ∂ peut être présenté sous la forme matricielle:

$$\begin{array}{c} \\ u-s \\ u-t \\ v-u \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

laquelle se réduit par transformations unimodulaires à:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui donne immédiatement $\ker \partial \cong \mathbf{Z}$ et $\ker \epsilon / \operatorname{im} \partial \cong \mathbf{Z}$.
d'où $H_0(G) = H_1(G) = \mathbf{Z}$. Mais la position d'interrupteurs σ obtenue en effaçant tu et sv donne $H_0(G^\sigma) = 0$.
Par conséquent $\operatorname{rang} H_0(G^\sigma) < \operatorname{rang} H_0(G)$.

CHAPITRE 4

Séquentialisation

4.1. Paires scindantes

Soit G un g.a. Le graphe ordinaire sous-jacent (qui a les mêmes sommets, les mêmes arètes, et aucune paire) sera noté $|G|$. Le graphe obtenu en effaçant toutes les arètes appariées de G sera noté G° et les composantes connexes de $|G^\circ|$ seront appelées *blocs* de G.
Soient $s_1, \ldots, s_k$ des sommets distincts de G tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ l'arète $s_i s_{i+1}$ appartienne à G. La suite $\gamma = (s_1, \ldots, s_k)$ est un *chemin* dans G de s_1 à s_k. Un chemin de G est *simple* s'il n'emprunte aucune arète appariée, autrement dit s'il est contenu dans un bloc de G.
Lorsque G est orienté, on peut associer à tout chemin simple $\gamma = (s_1, \ldots, s_k)$ la chaine

$$\sum_{i=1}^{k-1} (s_i s_{i+1})$$

de $C_1(G)$ (en utilisant $(st) = -(ts)$). Par abus de langage on notera encore γ cette chaine, et $\partial\gamma = s_k - s_1$.
Pour tout couple (s, t) de sommets de G les deux affirmations suivantes sont alors clairement équivalentes:

- s et t appartiennent au même bloc.
- Il existe un chemin simple γ tel que $\partial\gamma = t - s$.

en particulier si s et t sont dans le même bloc de G, $\{t - s\}_G = 0$.

Lemme 4.1.1. *Si $H_0(G)$ est fini, alors $|G|$ est connexe.*

Preuve. $H_0(|G|)$ est manifestement un quotient de $H_0(G)$. En particulier, si $H_0(G)$ est fini, $H_0(|G|)$ aussi, mais comme $|G|$ est un graphe ordinaire, $H_0(|G|) = 0$ donc $|G|$ est connexe. $\diamond$

Proposition 4.1.2. *Soit G un g.a avec $\mathcal{P}(G) = \{\{s_iu_i, t_iu_i\}/i \in \{1,\ldots,p\}\}$. Si $H_0(G)$ est un groupe fini, alors il est engendré par les éléments de la forme $\{u_i - s_i\}_G$ pour $i = 1,\ldots,p$.*

Preuve. On sait que $H_0(G)$ est engendré par les classes d'homologie des éléments de la forme $z - y$ où (y, z) parcourt l'ensemble des couples de sommets distincts de G.
Soit alors (y, z) un tel couple. Comme $H_0(G)$ est fini, $|G|$ est connexe d'après (4.1.1) et il existe un chemin $\gamma = (z_1, \ldots, z_k)$ de y à z, pour lequel:

$$z - y = \sum_{i=1}^{k-1} z_{i+1} - z_i$$

En prenant les classes d'homologie de part et d'autre, on remarque que $\{z_{i+1} - z_i\}_G$ s'annulle lorsque z_iz_{i+1} est une arète fixe de G. $\{z-y\}_G$ est donc une combinaison linéaire des $\{u-x\}_G$ lorsque xu parcourt l'ensemble des arètes appariées de G. Mais pour toute paire $\{xu, x'u\}$, $\{u - x\}_G = -\{u - x'\}_G$ de sorte qu'il suffit de choisir une arète dans chaque paire pour former un système de générateurs. $\diamond$

Rappelons ([Dan]) que les paires scindantes de G sont celles qui coupent $|G|$ en deux, plus précisément:

Définition 4.1.3. *Soient G un g.a, $p = \{su, tu\} \in \mathcal{P}(G)$ et $G^* = G \setminus p$. p est scindante si et seulement si la composante connexe de u dans $|G^*|$ ne contient ni s ni t.*

Nous allons voir que les paires scindantes ont une caractérisation homologique très simple; remarquons tout d'abord que le choix d'une arète dans une paire p détermine un élément ω_p de $H_0(G)$: si $p = \{su, tu\}$ et su est l'arète choisie, $\omega_p = \{u-s\}_G$. Choisissant maintenant une arète dans chaque paire, nous dirons que ω_p est *irréductible* si et seulement s'il n'appartient pas au sous-groupe de $H_0(G)$ engendré par les $\omega_{p'}$ pour $p' \neq p$. Il est clair que cette notion est indépendante du choix des arètes. Cela dit,

Proposition 4.1.4. *Une paire p est scindante si et seulement si ω_p est irréductible.*

Preuve. Choisissons une fois pour toutes une arète s_qu_q dans chaque paire q de G; on pose $d_q = u_q - s_q$ et $\omega_q = \{d_q\}_G$.
Supposons que la paire $p = \{su, tu\}$ ne soit pas scindante. Il existe alors un chemin $\gamma = (z_1, \ldots, z_k)$ dans G qui va de s (ou t) à u sans emprunter l'arète su ni tu et on peut supposer que $z_1 = s$ sans restreindre la généralité.

$$u - s = \sum_{i=1}^{i=k-1} z_{i+1} - z_i.$$

En prenant les classes d'homologie de part et d'autre, les termes qui proviennent d'arètes fixes disparaissent, de sorte que $\{u-s\}_G$ est combinaison linéaire des termes $\{z_{i+1}-z_i\}_G$ où $z_i z_{i+1}$ est une arète appariée distincte de su et de tu. Comme pour chaque paire $q = \{s'u', t'u'\}$ $\{u' - s'\}_G = -\{u' - t'\}_G$, ω_p est combinaison linéaire des ω_q pour $q \neq p$ et n'est donc pas irréductible.
Inversement, supposons que la paire $p = \{su, tu\}$ soit scindante. Soit G' le graphe obtenu en effaçant les arètes su et tu de G. La composante connexe de $|G'|$ qui contient u détermine un sous-graphe G_2 de G. Soit $G_1 = G \setminus G_2$. Comme p est scindante, G_1 et G_2 ont un unique sommet commun u, de sorte que $G = \mathrm{t}(G_1, G_2, u, u)$. Soient $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(G_1) \setminus p$ et $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(G_2)$. Si ω_p n'est pas irréductible,

$$\{d_p\}_G = \sum_{q \in \mathcal{P}_1} \lambda_q \{d_q\}_G + \sum_{q \in \mathcal{P}_2} \lambda_q \{d_q\}_G$$

d'où

$$\{d_p - \sum_{q \in \mathcal{P}_1} \lambda_q d_q\}_G = \{\sum_{q \in \mathcal{P}_2} \lambda_q d_q\}_G.$$

D'autre part

$$(\{c_1\}_{G_1}, \{c_2\}_{G_2}) \mapsto \{c_1 + c_2\}_G$$

détermine un isomorphisme entre $H_0(G_1) \oplus H_0(G_2)$ et $H_0(G)$ dans lequel

$$(\{d_p - \sum_{q \in \mathcal{P}_1} \lambda_q d_q\}_{G_1}, -\{\sum_{q \in \mathcal{P}_2} \lambda_q d_q\}_{G_2})$$

a pour image 0. Il faut donc que

$$\{d_p - \sum_{q \in \mathcal{P}_1} \lambda_q d_q\}_{G_1} = 0$$

et il existe une 1-chaine c de G_1 pour laquelle

$$d_p - \sum_{q \in \mathcal{P}_1} \lambda_q d_q = \partial c.$$

Comparons le coefficient de u de part et d'autre de l'égalité: il vaut 1 dans le membre de gauche parce que $d_p = u - s$ et que u n'apparait pas dans les autres termes alors que dans le membre de droite u ne peut apparaitre que dans un terme de la forme $\partial \mu((su) + (tu)) = \mu(2u - s - t)$ et son coefficient est pair, ce qui est absurde.
D'où le résultat. $\diamond$

4.2. Séquentialisation

Notons tout d'abord un petit résultat:

Lemme 4.2.1. *Soient G un g.a, $p \in \mathcal{P}(G)$ et $G^* = G \setminus \{p\}$:*

$$\operatorname{rang} H_0(G^*) \leq \operatorname{rang} H_0(G) + 1.$$

Preuve. $H_0(G)$ est le quotient de $H_0(G^*)$ par une unique relation. $\diamond$

Nous en savons maintenant assez pour établir le lemme suivant, étape essentielle de la séquentialisation:

Lemme 4.2.2. *Dans tout graphe G satisfaisant (H) et $\mathcal{P}(G) \neq \emptyset$ il existe une paire $\{su, tu\}$ pour laquelle s et t appartiennent au même bloc.*

Preuve. Par induction sur le cardinal de $\mathcal{P}$.
Si $\operatorname{card} \mathcal{P} = 1$ soit $p = \{su, tu\}$ l'unique paire. Nous savons par (4.1.2) que $\{u-s\}_G$ engendre $H_0(G)$, qui est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par (H).
Par conséquent $\{u-s\}_G \neq 0$ et s, u sont dans deux blocs distincts ; il en est de même pour t et u.
Mais $\operatorname{rang} H_0(G^\circ) \leq \operatorname{rang} H_0(G){+}1 = 1$ d'après (4.2.1) donc $|G^\circ|$ a au plus deux composantes connexes ce qui impose à s et t d'appartenir au même bloc.
Supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang $n \geq 1$ et considérons un graphe G possédant $n+1$ paires.
Choisissons parmi celles-ci (figure 4.2.1) une paire $\{su, tu\}$ pour laquelle $\omega = \{u-s\}_G$ est d'ordre *maximal* 2^ν dans $H_0(G)$ et posons $a = su$.

figure 4.2.1

D'après (3.4.1) G^a satisfait encore (H), et card $\mathcal{P}(G^a) = n$ donc par hypothèse d'induction il existe une paire $\{s'u', t'u'\}$ de G^a telle que s' et t' soient dans le même bloc *de* G^a.
D'où un chemin simple γ de G^a tel que

$$\partial\gamma = t' - s'.$$

Si γ est un chemin simple de G nous avons gagné, sinon il emprunte une arète qui est fixe dans G^a mais pas dans G, autrement dit su.
On peut alors écrire $\gamma = \gamma_1 \pm (su)$ où γ_1 est dans $C_1(G)$. D'où

$$t' - s' = \partial\gamma_1 \pm (u - s).$$

En prenant les classes d'homologie de part et d'autre il vient:

$$\{t' - s'\}_G = \pm\omega.$$

D'autre part $\{t' - s'\}_G = 2\omega'$ où $\omega' = \{u' - s'\}_G$. Donc

$$\omega = \pm 2\omega'.$$

L'ordre de ω' dans $H_0(G)$ est donc $2^{\nu+1}$: contradiction. $\diamond$

Cela dit:

Lemme 4.2.3. *Tout graphe G qui vérifie (H) et $\mathcal{P}(G) \neq \emptyset$ possède une paire scindante.*

Preuve. Par induction sur le nombre n de paires de G.
Choisissons tout d'abord une arète dans chaque paire ; si $q = \{su, tu\}$ et su est l'arète choisie, d_q désigne comme plus haut la chaine $u - s \in C_0(G)$ et $\omega_q^G = \{d_q\}_G$.
Cela dit, si $n = 1$, l'unique paire p est scindante puisque ω_p^G est d'ordre 2, donc non nul et par conséquent irréductible.
Supposons la propriété vérifiée pour $n \geq 1$ et card $\mathcal{P}(G) = n + 1$.
Par le lemme (4.2.2) il existe une paire $p = \{su, tu\}$ pour laquelle s et t appartiennent au même bloc et donc un chemin simple γ dans G allant de s à t (figure 4.2.2). Soit G_0 le sous-graphe de G réunion de la paire p et du chemin γ.
Par (3.4.1) G^a (où $a = su$) vérifie encore (H) et possède, par hypothèse d'induction, une paire scindante q.
Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
H_0(G_0) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \longrightarrow & H_0(G) & \longrightarrow & H_0(G, G_0) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow 0 & & & & \downarrow \phi & & \\
H_0(G_0^a) \cong 0 & \longrightarrow & H_0(G^a) & \longrightarrow & H_0(G^a, G_0^a) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dans lequel les suites horizontales sont exactes et ϕ est un isomorphisme. Il permet de définir un morphisme θ de $H_0(G)$ dans $H_0(G^a)$ par $\{c\}_G \mapsto \{c\}_{G^a}$; en particulier $\theta(\omega_p^G) = 0$.

Si q n'est pas scindante dans G, il y a dans $H_0(G)$ une relation

$$\omega_q^G = \alpha\omega_p^G + \sum_{r\notin\{p,q\}} \lambda_r \omega_r^G$$

que θ transforme en

$$\omega_q^{G^a} = \sum_{r\notin\{p,q\}} \lambda_r \omega_r^{G^a}$$

qui montre que q n'est pas scindante dans G^a: contradiction. $\diamond$

figure 4.2.2

On en déduit finalement le

Théorème 4.2.4. *Tout graphe G satisfaisant (H) est un réseau.*

Preuve. Par induction sur la taille de G.
Cas 1. $\mathcal{P}(G) = \emptyset$. G est un graphe ordinaire tel que $H_0(G) = H_1(G) = 0$ c'est-à-dire un arbre, donc un réseau.
Cas 2. $\mathcal{P}(G) \neq \emptyset$. par le lemme (4.2.3) , il existe une paire scindante $p = \{su, tu\}$. Soit G' le graphe obtenu en effaçant les arètes su et tu de G: la composante connexe de de $|G'|$ qui contient u détermine un sous-graphe G_1 de G. On pose $G_2 = G \setminus G_1$. Comme p est scindante, G_1 et G_2 ont u pour seul sommet commun, donc $G = \mathrm{t}(G_1, G_2)$.
2.1. G_1 est réduit au seul sommet u: dans ce cas, $G = G_2 = \mathrm{p}(G_3, s, t)$ où $G_3 = G \setminus p$. Par le lemme (3.3.3) et la remarque qui suit $H_1(G_3) = H_1(G_2) = H_1(G) = 0$ et $H_0(G)$ étant fini, $\operatorname{card} H_0(G_2) = 2 \operatorname{card} H_0(G_3)$ ce qui montre que G_3 satisfait (H) donc, par hypothèse d'induction est un réseau, ainsi que G.
2.2. G_1 a au moins une arète: en pareil cas G_1 et G_2 sont strictement plus petits que G. D'autre part $H_1(G_1) \oplus H_1(G_2) = H_1(G) = 0$ d'où $H_1(G_1) = H_1(G_2) = 0$. De même $H_0(G_1) \oplus H_0(G_2) = H_0(G)$. Mais $\operatorname{card} H_0(G) = 2^n$ donc $\operatorname{card} H_0(G_1) = 2^a$ et $\operatorname{card} H_0(G_2) =$

2^b et nous savons que a (resp b) ne peut être plus grand que le nombre de paires de G_1 (resp. G_2). Alors G_1 et G_2 satisfont (H) et sont des réseaux, par hypothèse d'induction, donc aussi $G = \mathrm{t}(G_1, G_2)$.

$\diamond$

Remarque. Le critère de correction ainsi obtenu permet de décider en temps polynomial si un graphe donné est ou non un réseau. De plus l'algorithme est standard, c'est le procédé de réduction de matrice décrit par exemple dans [Mun, p.56] pour déterminer l'homologie d'un complexe quelconque, et que nous avons d'ailleurs appliqué dans l'exemple 3 du (3.1).

CHAPITRE 5

Structure des réseaux

5.1. Décompositions de Jordan-Hölder de H_0

Dans toute cette section, sauf mention contraire, G désignera un réseau et n le nombre de paires de G.

Nous allons voir que le groupe $H_0(G)$ contient un certain nombre d'informations sur la structure de G, résultant du role très particulier joué par les générateurs de $H_0(G)$ associés aux paires.

Choisissons tout d'abord une arète de chaque paire et reprenons les notations introduites dans la preuve du lemme (4.2.3) .

Si $X = \{p, q, r \ldots\}$ est un ensemble de paires de G on notera $< p, q, r \ldots >_G$, ou $< X >_G$— en oubliant l'indice s'il n'y a pas d'ambiguité—le sous groupe de $H_0(G)$ engendré par $\omega_p^G, \omega_q^G, \omega_r^G \ldots$. Il est clair que ce groupe est indépendant du choix de l'arète dans chaque paire.

Par définition, l'*ordre* de p est celui du groupe $< p >$ et on le notera $\nu_G(p)$ ou simplement $\nu(p)$.

Il convient tout d'abord de revenir en détail sur les paires $q = \{su, tu\}$ pour lesquelles s et t appartiennent au même bloc. Convenons d'appeler *paire initiale* une telle paire, et Q l'ensemble des paires initiales.

Soit $q = \{su, tu\}$ une paire initiale, et $a = su$. Dans la preuve du lemme (4.2.3) , on a défini un morphisme θ de $H_0(G)$ dans $H_0(G^a)$ par $\{c\}_G \mapsto \{c\}_{G^a}$, faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
H_0(G_0) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(G) & \longrightarrow & H_0(G, G_0) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\
H_0(G_0^a) \cong 0 & \longrightarrow & H_0(G^a) & \longrightarrow & H_0(G^a, G_0^a) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où G_0 est le sous-graphe de G réunion de q et d'un chemin simple entre s et t et ϕ est l'isomorphisme donné par le lemme d'excision.

i_* ne peut pas être nul sinon card $H_0(G^a)$ = card $H_0(G)$ en contradiction avec (3.4.2) d'où une suite exacte:

$$0 \longrightarrow H_0(G_0) \xrightarrow{i_*} H_0(G) \xrightarrow{\theta} H_0(G^a) \longrightarrow 0$$

En particulier $\operatorname{im} i_* =< q >_G$ donc $\nu(q) = 2$.
Plus généralement,

Lemme 5.1.1. *Pour toute paire p, $\nu(p) \geq 2$.*

Preuve. Par induction sur n .
Si $n = 0$, il n'y a rien à prouver.
Sinon le lemme (4.2.2) fournit une paire initiale $q = \{a, a^*\}$, d'ordre 2 comme on vient de le voir et G^a satisfait l'hypothèse d'induction.
Soit alors p une paire quelconque.
Si $p = q$ c'est terminé.
Sinon, soit $\theta : H_0(G) \longrightarrow H_0(G^a)$ comme ci-dessus, $\theta(< p >_G) =< p >_{G^a}$ qui est non nul par hypothèse d'induction donc $\nu_G(p) \geq 2$ ce qu'il fallait montrer. ◇

Nous pouvons alors montrer le

Lemme 5.1.2. *Toute paire d'ordre 2 est initiale.*

Preuve. Par induction sur n.
Si $n = 0$, il n'y a rien à prouver.
Sinon soit $q = \{a, a^*\}$ une paire initiale—par le lemme (4.2.2) —et $q' = \{s'u', t'u'\}$ une paire d'ordre 2.
Si $q' = q$ c'est terminé, sinon $\theta(< q' >_G) =< q' >_{G^a}$ donc $\nu(q')_{G^a} \leq 2$ et par le lemme (5.1.1) , $\nu(q')_{G^a} \geq 2$.
Donc q' est d'ordre 2 *dans* G^a, donc initiale par hypothèse d'induction.
Soit γ un chemin simple de G^a de s' à t': il ne peut pas passer par l'arète a sinon

$$2\omega_{q'}^G = \{t' - s'\}_G = \omega_q^G \neq 0$$

ce qui contredit $\nu_G(q') = 2$.
D'où le résultat. ◇

Lemme 5.1.3. *Pour toute partie X non vide de Q, $\sum_{r \in X} \omega_r^G \neq 0$.*

Preuve. Par induction sur n.
Si $n = 0$, il n'y a rien à prouver.
Sinon soit $q = \{a, a^*\}$ une paire initiale et θ comme ci-dessus. Remarquons que l'ensemble des paires initiales de G^a est exactement $Q \setminus \{q\}$, en vertu des lemmes précédents.

Supposons qu'il y ait une relation

$$\sum_{r \in X} \omega_r^G = 0$$

pour une partie non vide X de Q.
D'une part X ne peut être réduit à $\{q\}$ par le lemme (5.1.1) et d'autre part θ transforme la précédente relation en

$$\sum_{r \in X \setminus \{q\}} \omega_r^{G^a} = 0$$

où $X \setminus \{q\}$ est une partie non vide de $Q \setminus \{q\}$, en contradiction avec l'hypothèse d'induction.
$\diamond$

Une conséquence évidente du résultat précédent est que card $< Q >= 2^{\mathrm{card}\, Q}$. (Le lemme dit en effet que la projection canonique $\oplus_{q \in Q} < q > \longrightarrow < G >$ est injective.)
Considérons alors une énumération $q_1, q_2, \ldots q_\ell$ des paires initiales. On pose $q_i = \{a_i, a_i^*\}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots \ell\}$, $G_i = (((G^{a_1})^{a_2})^{\cdots})^{a_i}$ avec $G = G_0$.
On construit comme on l'a fait plus haut un morphisme $\theta_i : H_0(G_{i-1}) \longrightarrow H_0(G_i)$ en posant $\theta(\{c\}_{G_{i-1}}) = \{c\}_{G_i}$. Soit enfin $\overline{\theta} = \theta_\ell \circ \cdots \circ \theta_1$ de $H_0(G)$ dans $H_0(G_\ell)$. Il est clair que $\overline{\theta}$ est surjective et que $< Q >_G$ est dans le noyau de $\overline{\theta}$. Mais G_ℓ est un réseau possédant $n - \ell$ paires donc card $H_0(G_\ell) = 2^{n-\ell}$. On obtient donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow < Q >_G \longrightarrow H_0(G) \xrightarrow{\overline{\theta}} H_0(G_\ell) \longrightarrow 0$$

Remarquons enfin que l'intersection des groupes $< p >$ ($p \in \mathcal{P}(G)$) avec $< Q >$ n'est jamais triviale. Précisément

Lemme 5.1.4. *Pour toute paire p,* $\mathrm{card}(< p > \cap < Q >) = 2$.

Preuve. Il suffit de prouver que l'intersection n'est pas réduite à 0 car les éléments de $< Q >$ sont d'ordre 2 et le groupe $< p >$, cyclique d'ordre 2^x, ne peut donc contenir qu'un seul élément d'ordre 2.
Cela dit raisonnons par induction sur n.
Si $n = 0$ il n'y a rien à prouver.
Sinon, soient $q = \{a, a^*\}$ une paire initiale et p une paire quelconque.
Si $< q >_G \subset < p >_G$ c'est terminé.
Dans le cas contraire considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow < q >_G \xrightarrow{i_*} H_0(G) \xrightarrow{\theta} H_0(G_a) \longrightarrow 0$$

Par hypothèse d'induction il y a un élément τ^a non nul dans $< p >_{G^a} \cap < Q \setminus \{q\} >_{G^a}$.

Il y a donc d'une part un élément τ non nul de $< p >_G$ tel que $\theta(\tau) = \tau^a$. D'autre part $\theta(< Q >_G) = < Q \setminus \{q\} >_{G^a}$ donc aussi

$$\tau \in \theta^{-1}(< Q \setminus \{q\} >_{G^a}) = < Q >_G$$

parce que $< Q >_G$ contient $\ker \theta$. Par conséquent

$$\tau \in < p >_G \cap < Q >_G$$

ce qui donne le résultat.

$\diamond$

Nous pouvons maintenant préciser la structure des sous-groupes engendrés par les paires de G.
La clé de cette structure est fournie par la proposition suivante.

Proposition 5.1.5. *Soient X un ensemble de paires et $p \notin X$.*
Si pour tout $q \in X$, $\nu(q) \leq \nu(p)$, alors $< p > \not\subset < X >$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que la seule difficulté du lemme réside dans l'inégalité *large*, le résultat étant évident si l'on suppose $\nu(q) < \nu(p)$.
Montrons le par induction sur n.
Si $n = 0$ il n'y a rien à prouver.
Sinon l'ensemble Q des paires initiales est non vide et l'on obtient comme on vient de le voir une suite exacte

$$0 \longrightarrow < Q >_G \longrightarrow H_0(G) \xrightarrow{\overline{\theta}} H_0(G_\ell) \longrightarrow 0\,.$$

Soient alors X un ensemble de paires et p une paire n'appartenant pas à X tels que pour tout $r \in X$, $\nu_G(r) \leq \nu_G(p)$.
Cas 1. $p \in Q$.
Tous les éléments de X sont d'ordre 2 donc dans Q par le lemme (5.1.2) et $< p > \not\subset < Q >$ par le lemme (5.1.3) d'où le résultat.
Cas 2. $p \notin Q$.
Pour toute paire q, $\mathrm{card}(< q >_G \cap < Q >_G) = 2$ d'après le lemme (5.1.4) .
En particulier pour tout $r \notin Q$,

$$< r >_{G_\ell} \cong \frac{< r >_G}{< r >_G \cap < Q >_G}$$

donc $\nu_{G_\ell}(r) = \nu_G(r)/2$.
D'où $\nu_{G_\ell}(r) \leq \nu_{G_\ell}(p)$ pour tout $r \in X \setminus Q$.
G_ℓ satisfait alors l'hypothèse de récurrence pour la paire p et l'ensemble $X \setminus Q$, d'où $< p >_{G_\ell} \not\subset < X \setminus Q >_{G_\ell}$.

Mais $\overline{\theta}(< p >_G) = < p >_{G_\ell}$ et $\overline{\theta}(< X >_G) =< X \setminus Q >_{G_\ell}$ donc aussi $< p >_G \not\subset < X >_G$. $\diamond$

Rappelons que l'indice d'un sous-groupe B dans un groupe A, noté $[A : B]$ est le cardinal de A/B.

Théorème 5.1.6. *Soit $p_1, \ldots, p_n$ une énumération des paires de G telle que*

$$\nu(p_1) \leq \nu(p_2) \leq \ldots \leq \nu(p_n)$$

Les sous-groupes $F_0 = 0$ et $F_i =< p_1, \ldots p_i >$ pour $i = 1, \ldots n$ forment une suite de Jordan-Hölder de $H_0(G)$, autrement dit $[F_i : F_{i-1}] = 2$ quel que soit $i \in \{1, \ldots n\}$.

Preuve. D'après la proposition (5.1.5) , $[F_i : F_{i-1}] \geq 2$ et d'autre part

$$\mathrm{card}(H_0(G)) = 2^n = [F_n : F_0] = \prod_{i=1}^{n} [F_i : F_{i-1}]$$

ce qui entraine immédiatement l'égalité annoncée. $\diamond$

5.2. Une remarque sur le critère de correction

Le critère de correction d'un graphe apparié que nous avons établi fait intervenir le nombre de paires du graphe ce qui peut paraitre insatisfaisant.
Il est cependant possible de le reformuler en termes purement homologiques. En effet, si $|G|$ est le graphe topologique sous-jacent à G

Proposition 5.2.1. *G est un réseau si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

- $H_1(G) = 0$
- $H_0(G)$ *est fini et* $\mathrm{card}(H_0(G)) = 2^{\mathrm{rang}\ H_1(|G|)}$.

Preuve. En vertu du critère déjà établi, il suffit de montrer que pour tout graphe G , si $H_1(G) = 0$ et $H_0(G)$ est fini, alors $H_1(|G|) \cong \mathbf{Z}^n$ où n est le nombre de paires.

Procédons par induction sur ce nombre n de paires. Nous montrons en fait que si $H_1(G) = 0$ et $H_0(G)$ est fini, $H_1(|G|) \cong \mathbf{Z}^n$ *et* $H_0(|G|) = 0$.
Si $n = 0$, G est un graphe ordinaire et $H_1(G) = H_1(|G|)$ d'où le résultat.
Soit alors G un graphe à n paires, $n > 0$, tel que $H_1(G) = 0$ et $H_0(G)$ est fini.
Le lemme principal montre entre autres qu'il existe une arète appariée a telle que $H_1(G^a) = 0$ et $H_0(G^a)$ soit encore fini.
Par hypothèse de récurrence, $H_1(|G|^a) \cong \mathbf{Z}^{n-1}$ et $H_0(|G|^a) = 0$.
Notons K le sous-graphe de G formé par la seule paire $\{a, a^*\}$.
Examinons alors les deux suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(|K^a|) & \longrightarrow & H_1(|G^a|) & \longrightarrow & H_1(|G^a|, |K^a|) & \longrightarrow & H_0(|K^a|) \\ & & \ldots & \longrightarrow & H_0(|G^a|) & \longrightarrow & H_0(|G^a|, |K^a|) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(|K|) & \longrightarrow & H_1(|G|) & \longrightarrow & H_1(|G|, |K|) & \longrightarrow & H_0(|K|) \\ & & \ldots & \longrightarrow & H_0(|G|) & \longrightarrow & H_0(|G|, |K|) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $H_1(|K^a|) = H_0(|G^a|) = 0$, $H_0(|K^a|) = \mathbf{Z}$ et $H_1(|G^a|) = \mathbf{Z}^{n-1}$, la première suite donne

$$\mathrm{rang}(H_1(|G^a|, |K^a|)) = n \quad \text{et} \quad H_0(|G^a|, |K^a|) = 0$$

et comme

$$H_i(|G^a|, |K^a|) = H_i(|G|, |K|)$$

la seconde se réduit à

$$0 \longrightarrow H_1(|G|) \longrightarrow H_1(|G|, |K|) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_0(|G|) \longrightarrow 0$$

donc $H_1(|G|) \cong \mathbf{Z}^n$ et $H_0(|G|) = 0$ d'où le résultat. $\diamond$

5.3. Elimination des coupures

Soient G un réseau possédant n paires et t, u, v, w, z cinq sommets distincts de G tels que $\{ut, vt\}$ soit une paire et wt, zt soient des arètes fixes. Soit K le sous-graphe de G qui a pour sommets t, u, v, w, et z, pour arètes fixes wt et zt et pour unique paire $\{ut, vt\}$. Soit

K_1 (resp. K_2) le graphe ayant pour sommets u, v, w, et z, pour arètes fixes uw et vz (resp. uz et vw) et aucune paire.
On appelle G_i le graphe obtenu en substituant K_i à K dans G: G_i a donc $n-1$ paires.
On obtient alors les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(K) & \longrightarrow & H_1(G) & \longrightarrow & H_1(G,K) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(K) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & \cdots & H_0(G) & \longrightarrow & H_0(G,K) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1)$$

et

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(K_i) & \longrightarrow & H_1(G_i) & \longrightarrow & H_1(G_i,K_i) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(K_i) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & \cdots & H_0(G_i) & \longrightarrow & H_0(G_i,K_i) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2)$$

Il est clair que $H_1(K) \cong H_1(K_1) \cong H_1(K_2) \cong 0$ et que $H_0(K) \cong H_0(K_1) \cong H_0(K_2) \cong Z$.
Comme G vérifie (H), (1) se réduit à

$$0 \longrightarrow H_1(G,K) \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{Z} \longrightarrow H_0(G) \longrightarrow H_0(G,K) \longrightarrow 0 \quad (3)$$

et comme $H_0(G)$ est un groupe fini, $H_1(G,K) \cong \mathbf{Z}$. Il y a donc une chaine c de $G \setminus K$ telle que $\{c\}_{G,K}$ engendre $H_1(G,K)$ et $\partial c = au + bv + cw + dz$ (donc $a+b+c+d=0$). D'après le lemme d'excision, $\{c\}_{G_i,K_i}$ engendre $H_1(G_i,K_i)$ pour $i = 1$ et 2.
Examinons alors le morphisme ∂_* dans les trois cas:

$$\partial_*\{c\}_{G,K} = \{au + bv + cw + dz\}_K = (a-b)\{u-w\}_K \quad (4)$$

$$\partial_*\{c\}_{G_1,K_1} = \{au + bv + cw + dz\}_{K_1} = (a+c)\{u-v\}_{K_1} \quad (5)$$

$$\partial_*\{c\}_{G_2,K_2} = \{au + bv + cw + dz\}_{K_2} = (a+d)\{u-v\}_{K_2} \quad (6)$$

où $\{u-w\}_K$, $\{u-v\}_{K_1}$ et $\{u-v\}_{K_2}$ sont des générateurs de $H_0(K)$, $H_0(K_1)$ et $H_0(K_2)$ respectivement.
Cela dit

$$|a-b| = |a-b+a+b+c+d| = |a+c+a+d| \leq |a+c| + |a+d| \quad (7)$$

Cela dit, $|a-b| \neq 0$ par (4) et l'injectivité de ∂_* dans (3). Nous pouvons alors supposer, sans restreindre la généralité, que $|a+c| \neq 0$, par (7), ce qui réuni à (5) montre l'injectivité de ∂_* dans:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(G_1) & \longrightarrow & H_1(G_1,K_1) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(K_1) & \longrightarrow \\ & \cdots & H_0(G_1) & \longrightarrow & H_0(G_1,K_1) & \longrightarrow & 0 & \end{array} \quad (8)$$

obtenue en prenant $i = 1$ dans (2). Par conséquent

$$\text{card}\, H_0(G_1) = \text{card}\, H_0(G_1, K_1) \times |a + c|$$

Si maintenant $|a - b| < 2\,|a + c|$, nous obtenons

$$\text{card}\, H_0(G_1) > (1/2)\,|a - b| \times \text{card}\, H_0(G, K)$$

mais $|a - b| \times \text{card}\, H_0(G, K) = \text{card}\, H_0(G)$ par (1) et (4). D'où $\text{card}\, H_0(G_1) > 2^{n-1}$ ce qui contredit le lemme (3.4.2) .
D'où $2\,|a + c| \leq |a - b|$ et par (7), $|a + c| \leq |a + d|$ de sorte que nous avons aussi $|a + d| > 0$.
Ce que nous avons montré pour $i = 1$ vaut donc encore pour $i = 2$, donc

$$|a - b| = 2\,|a + d| = 2\,|a + c|$$

et

$$\text{card}\, H_0(G_i) = (1/2)\,|a - b| \times \text{card}\, H_0(G, K) = 2^{n-1} \tag{9}$$

pour $i = 1$ et 2.
L'injectivité de ∂_* dans (8)—et dans la suite correspondante pour $i = 2$—donne enfin

$$H_1(G_1) = H_1(G_2) = 0 \tag{10}$$

Par (9) et (10), G_1 et G_2 vérifient (H).

figure 5.3.1

CHAPITRE 6

Portes multiples

6.1. Définitions

On généralise ici les résultats obtenus sur les graphes appariés au cas où l'on ne se restreint plus à des *paires* d'arètes coincidentes.
Cette généralisation permet de traiter le cas des quantificateurs brièvement évoqué au chapitre 1, et sur un plan plus technique d'éclairer la preuve du lemme (3.4.1) .

Définition 6.1.1. *Soit G un graphe (ordinaire). Une* porte *de G est un ensemble p d'arètes ayant un sommet commun, avec* $\mathrm{card}(p) \geq 2$*. Ce cardinal sera noté $\mu(p)$ et appelé* multiplicité *de la porte.*

cela dit

Définition 6.1.2. *On appelle graphe à portes (g.a.p) un couple $(G, \mathcal{P})$ où G est un graphe ordinaire et $\mathcal{P}$ est un ensemble de portes de G deux à deux disjointes.*

Par abus de langage on dira simplement dans ce chapitre graphe pour "graphe à portes" et on notera G pour $(G, \mathcal{P})$. On appelle encore arètes *fixes* celles qui n'appartiennent à aucune porte.
L'opération t définie au chapitre 2 est inchangée et p est généralisée de facon évidente: si G est un graphe et $s_1, \ldots, s_n$ sont n sommets distincts de G, on note $\mathrm{p}(G, s_1, \ldots, s_n)$ le graphe obtenu en ajoutant un nouveau sommet s, de nouvelles arètes $s_i s$ et une nouvelle porte $\{s_i s / i \in \{1, \ldots, n\}\}$.
Les réseaux correspondants sont les graphes obtenus inductivement à partir des arbres par les opérations t et p. On note encore Π l'ensemble des réseaux.
On oriente comme précédemment un g.a.p en orientant les arètes d'une même porte de manière cohérente (c'est-à-dire toutes vers leur sommet commun ou bien toutes à partir de ce sommet).

L'homologie d'un g.a.p se définit alors comme on peut s'y attendre à partir du complexe

$$0 \longrightarrow C_1(G) \xrightarrow{\partial} C_0(G) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

où $C_0(G) = \mathbf{Z}[\mathcal{S}(G)]$ et $C_1(G)$ est le sous-groupe de $\mathbf{Z}[\mathcal{A}(G)]$ engendré par les arètes fixes et les éléments de la forme $a_1 + \cdots + a_n$ où $\{a_1, \ldots, a_n\}$ parcourt l'ensemble des portes. Comme précédemment, $H_0(G) = \ker \epsilon / \operatorname{im} \partial$ et $H_1(G) = \ker \partial$.

6.2. Le critère de correction

On peut alors encore établir un critère homologique de correction qui généralise naturellement celui que nous avons déjà obtenu:

Théorème 6.2.1. *Soit G un g.a.p. Pour que G soit un réseau, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites:*

- $H_1(G) = 0$.
- *$H_0(G)$ est un groupe fini de cardinal $\prod_{p \in \mathcal{P}} \mu(p)$.*

Que les deux conditions soient nécessaires est une conséquence immédiate du lemme suivant, analogue à (3.3.3) .

Lemme 6.2.2. *Soient G_1 un g.a.p et $s_1, \ldots, s_n$ n sommets distincts de G_1. Soient $G = \mathrm{p}(G_1, s_1, \ldots, s_n)$ et p la nouvelle porte $\{s_1 s, \ldots, s_n s\}$.*

- $H_1(G) = H_1(G_1)$.
- *Si $H_0(G_1)$ est un groupe fini, alors* $\operatorname{card} H_0(G) = \mu(p) \operatorname{card} H_0(G_1)$.

Preuve. Il convient tout d'abord d'étendre les notations préalablement utilisées: on appellera D^n le graphe à n sommets $s_1, \ldots, s_n$ et sans arètes, et T^n le graphe à $n+1$ sommets $s_1, \ldots, s_n, s$, n arètes $s_1 s, \ldots, s_n s$ et une unique porte contenant toutes les arètes. Il est clair que

$$H_1(D^n) = H_1(T^n) = 0$$

et que

$$H_0(D^n) \cong H_0(T^n) \cong \mathbf{Z}^{n-1}$$

On peut prendre pour générateurs respectifs $g_i = \{s_i - s_1\}_{D^n}$ et $z_i = \{s - s_i\}_{T^n}$ pour $i = 2, \ldots, n$. En effet si $z_1 = \{s - s_1\}_{T^n}$,

$$\sum_{i=1}^{i=n} z_i = 0$$

Supposons alors que $H_1(G_1) = 0$ et que $H_0(G_1)$ soit un groupe fini. Comme en (3.3.3) on peut écrire une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(D^n) & \longrightarrow & H_1(G_1) \oplus H_1(T^n) & \longrightarrow & H_1(G) & \longrightarrow & \ldots \\ & \ldots & H_0(D^n) & \longrightarrow & H_0(G_1) \oplus H_0(T^n) & \longrightarrow & H_0(G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui d'après l'hypothèse et les remarques précédentes se réduit à

$$0 \longrightarrow H_1(G) \xrightarrow{\chi} \mathbf{Z}^{n-1} \xrightarrow{\theta} H_0(G_1) \oplus \mathbf{Z}^{n-1} \longrightarrow H_0(G) \longrightarrow 0$$

où θ est défini par

$$\theta(\{x\}_{D^n}) = (\theta_1(x), \theta_2(x)) = (\{x\}_{G_1}, -\{x\}_{T^n})$$

Pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} \theta_2(g_i) &= -\{s_i - s_1\}_{T^n} \\ &= \{s - s_i\}_{T^n} - \{s - s_1\}_{T^n} \\ &= z_i - z_1 \\ &= 2z_i + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \neq 1}} z_j \end{aligned}$$

La matrice $(n-1) \times (n-1)$ de θ_2 par rapport aux bases (g_i) et (z_i) de $H_0(D^n)$ et de $H_0(T^n)$ s'écrit donc

$$\Theta_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule aisément $\det(\Theta_n) = n \neq 0$ ce qui donne l'injectivité de θ_2 et a fortiori celle de θ. Par conséquent $\ker \theta = \operatorname{im} \chi = 0$ ce qui donne $H_1(G) = 0$ puis l'exactitude de

$$0 \longrightarrow H_0(D^n) \xrightarrow{\theta} H_0(G_1) \oplus H_0(T^n) \longrightarrow H_0(G) \longrightarrow 0$$

Par hypothèse $H_0(G_1)$ admet une présentation de la forme

générateurs	relations
$c_1, \dots c_r$	$n_i c_i = 0$ pour $i = 1, \dots r$

Soit Δ la matrice diagonale correspondante.
$H_0(G)$ admet donc une présentation avec générateurs $d_1, \dots, d_r, d_{r+1}, \dots, d_{r+n-1}$ où $d_i = (c_i, 0)$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $d_i = (0, z_{i-r+1})$ pour $i \in \{r+1, \dots, r+n-1\}$.
Les relations sont données par $n_i d_i = 0$ pour $1 \leq i \leq r$ et par θ pour $i > r$, c'est-à-dire de la forme

$$2d_i + \sum_{j=r+1, j \neq r}^{j=r+n-1} d_j + \sum_{k=1}^{k=r} \lambda_k d_k = 0$$

ce qui mis en forme matricielle s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} \Delta & * \\ 0 & \Theta_n \end{pmatrix}$$

D'où

$$\mathrm{card}(H_0(G)) = |\det(M)| = |\det(\Delta)|\,|\det(\Theta_n)| = n \times \mathrm{card}(H_0(G_1))$$

ce qu'il fallait démontrer. $\diamond$

Nous établissons ensuite la généralisation du lemme de simplification aux portes quelconques; soit G est un g.a.p, p une porte de G et a une arête de p, on note encore G^a le graphe obtenu en effaçant toutes les arêtes de $p \setminus \{a\}$ et en transformant a en arête fixe. Une position d'interrupteurs σ de G est le choix d'une arête dans chaque porte. Si $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$, G^σ est par définition $(((G^{a_1})^{\cdots})^{a_k})$.

Lemme 6.2.3. *Soient G un g.a.p tel que $H_1(G) = 0$ et $H_0(G)$ est un groupe fini de cardinal g. Dans toute porte p, il existe une arête a telle que:*

- $H_1(G^a) = 0$.
- *$H_0(G^a)$ est un groupe fini avec* $\mathrm{card}\, H_0(G^b) \geq g/\mu(p)$.

Preuve. On suit exactement la preuve de (3.4.1) , au prix d'une difficulté technique supplémentaire.
Soient G un g.a.p satisfaisant les hypothèses du lemme, et $p = \{s_1 s, \dots, s_n s\}$ une porte de G. On pose $a_i = s_i s$ et $G_i = G^{a_i}$.
On identifie T^n à un sous-graphe de G de sommets $s_1, s_2, \dots, s_n, s$. et on note $G_0 = G \setminus T^n$, $T_i^n = T^n \cap G_i$ pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. (figure 6.2.1).
• Comme précédemment, on écrit la suite exacte d'homologie relative:

$$0 \longrightarrow H_1(G, T^n) \xrightarrow{\partial_*} H_0(T^n) \xrightarrow{g} H_0(G) \longrightarrow H_0(G, T^n) \longrightarrow 0$$

figure 6.2.1

Le calcul de la caractéristique d'Euler montre ici encore que

$$H_1(G, T^n) \cong H_0(T^n) \cong \mathbf{Z}^{n-1}$$

D'autre part $H_1(G, T^n)$ est canoniquement isomorphe au groupe A des chaines c de $C_1(G_0)$ telles que $\partial c \in C_0(T_0^n)$. On peut donc choisir une $\mathbf{Z}$-base $c_1, \ldots, c_{n-1}$ de A, auquel cas $H_1(G, T^n)$ est engendré par les éléments

$$\gamma_k^0 = \{c_j\}_{G,T^n} \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n-1$$

Il existe donc des entiers (α_j^k) avec $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq n-1$ tels que

$$\partial c_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k (s - s_j)$$

Le calcul dans $H_0(T^n)$ entraine alors

$$\begin{aligned}
\partial_* \gamma_k^0 &= \{\partial c_k\}_{T^n} \\
&= \alpha_1^k \{s - s_1\}_{T^n} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j^k \{s - s_j\}_{T^n} \\
&= \sum_{j=2}^{n} (\alpha_j^k - \alpha_1^k) \{s - s_j\}_{T^n} \\
&= \sum_{j=2}^{n} (\alpha_j^k - \alpha_1^k) z_j
\end{aligned}$$

Ce qui donne pour matrice de ∂_* par rapport aux bases (γ_k^0) et (z_j):

$$M = [\alpha_j^k - \alpha_1^k]_{\substack{2 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n-1}}$$

Enfin l'injectivité de ∂_* entraine $\det(M) \neq 0$ et par conséquent

$$\text{card}\, H_0(G) = |\det(M)| \times \text{card}\, H_0(G, T^n) \tag{1}$$

• Pour chaque choix d'arète a_i dans p on a de la même façon une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(G_i) & \longrightarrow & H_1(G_i, T_i^n) & \xrightarrow{\partial_*^i} & H_0(T_i^n) & \xrightarrow{g_i} & \cdots \\ & & & \cdots & H_0(G_i) & \longrightarrow & H_0(G_i, T_i^n) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Les $\gamma_k^i = \{c_k\}_{G_i, T_i^n}$ constituent ici encore une $\mathbf{Z}$-base de $H_1(G_i, T_i^n)$ (excision) et le calcul dans $H_0(T_i^n)$ donne

$$\begin{aligned} \partial_*^i \gamma_k^i &= \{\partial c_k\}_{T_i^n} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j^k \{s - s_j\}_{T_i^n} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j^k u_j \end{aligned}$$

où les $u_j^i = \{s - s_j\}_{T_i^n}$ constituent une $\mathbf{Z}$-base de $H_0(T_i^n)$ pour $j \neq i$.
Si N est la matrice $[\alpha_j^k]_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n-1}}$ on appelle N_i la matrice N dans laquelle on a effacé la i-ème colonne.
N_i est donc la matrice de ∂_*^i par rapport aux bases (γ_k^i) et (u_j).
Nous allons montrer que

$$|\det(M)| \leq n \times \max_{1 \leq i \leq n} |\det(N_i)| \tag{2}$$

Rappelons que

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_2^1 - \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_2^k - \alpha_1^k & \cdots & \alpha_2^{n-1} - \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_j^1 - \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_j^k - \alpha_1^k & \cdots & \alpha_j^{n-1} - \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 - \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^k - \alpha_1^k & \cdots & \alpha_n^{n-1} - \alpha_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

En notant $l_j = (\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{n-1})$ le j-ième vecteur ligne de N, il vient

$$\det(M) = \det(l_2 - l_1, \ldots, l_j - l_1, \ldots, l_n - l_1)$$

Pour tout $i \in \{3, \ldots, n\}$ on note

$$\Delta_i = \det(l_2, \ldots, l_{i-1}, l_i - l_1, \ldots, l_n - l_1)$$

ainsi que

$$\Delta_2 = \det(l_2 - l_1, \ldots, l_j - l_1, \ldots, l_n - l_1) = \det(M)$$

et

$$\Delta_{n+1} = \det(l_2, \ldots, l_n) = \det(N_1)$$

D'où

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \Delta_{i+1} + \det(l_2, \ldots, l_{i-1}, -l_1, l_{i+1} - l_1, l_n - l_1) \\ &= \Delta_{i+1} + \det(l_2, \ldots, l_{i-1}, -l_1, l_{i+1}, l_n) \\ &= \Delta_{i+1} + (-1)^{i-1} \det(l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_n)\end{aligned}$$

quel que soit $i \in \{3, \ldots, n-1\}$, c'est-à-dire

$$\Delta_i = \Delta_{i+1} + (-1)^{i-1} \det(N_i)$$

égalité qui s'étend immédiatement à $i = 2$ et $i = n$ moyennant les notations précédentes.
Par conséquent

$$\det(M) = \Delta_2 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \det(N_i)$$

donc aussi

$$|\det(M)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\det(N_i)|$$

qui entraine l'inégalité (2).
Soit alors h tel que $|\det(N_h)| = \max_{1 \leq i \leq n} |\det(N_i)|$. Par (2), $|\det(N_h)| \neq 0$ d'où l'injectivité de ∂_*^h et $H_1(G_h) = 0$: c'est la première assertion du lemme.
La suite exacte ci-dessus se réduit à

$$0 \longrightarrow H_1(G_h, T_h^n) \xrightarrow{\partial_*^h} H_0(T_h^n) \xrightarrow{g_h} H_0(G_h) \longrightarrow H_0(G_h, T_h^n) \longrightarrow 0$$

D'après le théorème d'excision, $H_0(G_h, T_h^n) \cong H_0(G, T^n)$ donc

$$\operatorname{card} H_0(G_h) = |\det(N_h)| \times \operatorname{card} H_0(G, T^n) \tag{3}$$

ce qui comparé à (1) et (2) donne enfin

$$\operatorname{card} H_0(G) \leq n \operatorname{card} H_0(G_h)$$

qui est la seconde assertion du lemme. ◇

Si G vérifie les hypothèses (H) de (6.2.1) on déduit de (6.2.3) , exactement comme au chapitre 3 que l'inégalité (2) doit être une égalité et que dans ce cas:

$$|\det(M)| = n\,|\det(N_i)|$$

quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$.
On en déduit comme précédemment que le cardinal de $H_0(G)$ ne peut excéder le produit des multiplicités des portes.
Disons qu'un g.a.p est *correct* s'il satisfait les hypothèses (H) de (6.2.3) . Les résultats ci-dessus montrent que toute position d'interrupteurs d'un graphe correct est connexe et sans cycle donc la séquentialisation (6.2.1) (voir [Gir2]).
On peut également adapter la preuve directe de séquentialisation, en montrant tout d'abord le

Lemme 6.2.4. *Soit G un g.a.p correct et possédant une porte p de multiplicité $n > 2$. Le g.a.p G' obtenu en effaçant une arète de p et en formant une porte p' de multiplicité $n-1$ avec celles qui restent est encore correct.*

Preuve. Soient G un graphe correct et $p = \{s_1 s, s_2 s, \dots, s_n s\}$ une porte telle que $n > 2$. On note T'^n le graphe réunion de la porte $\{s_1 s, \dots, s_{n-1} s\}$ et du sommet isolé s_n, et G' le graphe obtenu en remplaçant dans G le sous-graphe T^n par T'^n. Les $z'_j = \{s_j - s\}_{G', T'^n}$ forment une base de $H_0(T'^n)$ pour $j \in \{2, \dots, n\}$.

figure 6.2.2

Il s'agit de prouver que G' est correct. Or on a comme plus haut une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(G') & \longrightarrow & H_1(G', T'^n) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_0(T'^n) & \xrightarrow{g'} & \dots \\ & & & \dots & H_0(G') & \longrightarrow & H_0(G', T'^n) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Soit M' la matrice de ∂'_* par rapport aux bases $(\gamma'_k) = \{c_k\}_{G', T'^n}$ et (z'_j). Ses vecteurs lignes sont $l_2 - l_1, \dots, l_{n-1} - l_1, l_n$ avec les notations de (6.2.3)

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det(l_2 - l_1, \ldots, l_n - l_1) \\
&= \det(l_2 - l_1, \ldots, l_{n-1} - l_1, l_n) - \det(l_2 - l_1, \ldots, l_{n-1} - l_1, l_1) \\
&= \det(M') - \det(l_2, \ldots, l_{n-1}, l_1) \\
&= \det(M') + (-1)^n \det(N_n)
\end{aligned}$$

d'où

$$|\det(M)| \leq |\det(M')| + |\det(N_n)|$$

ce qui entraine

$$|\det(M')| \geq \frac{n-1}{n} |\det(M)|$$

D'où $\det(M') \neq 0$ et l'injectivité de ∂'_*, c'est-à-dire $H_1(G') = 0$. La suite exacte devient

$$0 \longrightarrow H_1(G', T'^n) \xrightarrow{\partial'_*} H_0(T'^n) \xrightarrow{g'} H_0(G') \longrightarrow H_0(G', T'^n) \longrightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}(H_0(G')) &= \mathrm{card}(H_0(G', T'^n)) \times |\det(M')| \\
&\geq \frac{n-1}{n} \mathrm{card}(H_0(G))
\end{aligned}$$

G étant correct, le dernier membre est exactement le produit des multiplicités des portes de G', d'où le résultat. $\diamond$

On généralise ensuite (4.2.2) en reprenant le vocabulaire de la section (4.2).

Lemme 6.2.5. *Soit G un g.a.p correct ayant au moins une porte. Il existe alors deux sommets d'une même porte appartenant au même bloc.*

Preuve. Par induction sur le nombre d'arètes mobiles de G: si toutes les portes ont une multiplicité 2, c'est le résultat de (4.2.2) .
Sinon, il existe au moins une porte p de multiplicité $\mu(p) \geq 3$. Si deux sommets de p sont dans le même bloc, c'est terminé. Sinon, on considère le graphe G' obtenu en effaçant l'une des arètes de p. Par (6.2.4) , G' est encore correct et il y a dans G' deux sommets s_1 et s_2 d'une même porte appartenant au même bloc (de G'). Or G' a les mêmes arètes fixes que G, donc s_1 et s_2 appartiennent au même bloc de G. $\diamond$

Remarque. Une généralisation plus naturelle consisterait à montrer qu'il existe une porte dont *tous* les sommets appartiennent au même bloc mais nous ne voyons pas de raison simple et directe qui donne ce résultat (évidemment correct en vertu de la séquentialisation) . $\diamond$

(6.2.4) permet alors de montrer sans difficulté l'existence d'une porte scindante en adaptant directement (4.2.3) , d'où enfin (6.2.1) .

CHAPITRE 7

Une interprétation topologique des connecteurs

7.1. Un complexe cellulaire

Une remarque s'impose: le groupe $H_0(G)$ pouvant être fini non nul ne peut évidemment pas être celui d'un espace topologique. L'explication géométrique de ce phénomène est que les groupes $H_0(G)$ et $H_1(G)$ sont en fait respectivement $H_1(X)$ et $H_2(X)$ pour un espace topologique X associé à G comme on va le voir.

Remarque. Tous les espaces topologiques que nous rencontrerons seront des CW-complexes: l'homologie d'un tel complexe K sera calculée à partir du complexe des groupes $C_i(K)$ combinaisons linéaires formelles à coefficients entiers des cellules de dimension i de K.

Soient en effet G un graphe apparié possédant n paires et V_n un bouquet de n cercles (i.e. n copies du cercle S_1 recollées en un point unique v.); à chaque paire p correspond (bijectivement) un cercle S_1^p du bouquet.
On construit alors une application continue f de $|G|$ dans V_n, satisfaisant les conditions suivantes:

- Si x est un point non intérieur à une arète appariée, $f(x) = v$.
- si $p = \{su, tu\} \in \mathcal{P}(G)$, f réalise une bijection continue de l'intérieur de su (resp. de tu) sur $S_1^p \setminus \{v\}$ et les sens de parcours de $f(x)$ sur S_1^p lorsque x parcourt su de s vers u et lorsque x parcourt tu de t vers u sont opposés.(figure 7.1.1)

figure 7.1.1

f induit des morphismes $f^i_\#$ de $C_i(|G|)$ dans $C_i(V_n)$.
On forme une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow 0$$

de complexes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ker f^1_\# & \xrightarrow{\partial_\mathcal{K}} & \ker f^0_\# & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_1(|G|) & \xrightarrow{\partial} & C_0(|G|) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_1(V_n) & \xrightarrow{\partial} & C_0(V_n) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Il est facile de voir que $C_1(\mathcal{K}) = \ker f^1_\#$ n'est autre que le sous-groupe de $C_1(|G|)$ engendré par les arètes fixes et les éléments de la forme $(su) + (tu)$ lorsque $p = \{su, tu\}$ décrit $\mathcal{P}(G)$, autrement dit ce que l'on a appelé $C_1(G)$ (et non $C_1(|G|)$!).
D'autre part $C_0(V_n) \cong \mathbf{Z}$ donc $C_0(\mathcal{K}) = \ker f^0_\#$ est $\ker \epsilon$ en reprenant les notations de (3.1).
Enfin $\partial_\mathcal{K}$ coincide avec le morphisme bord du complexe associé à G.
Il en résulte que les groupes d'homologie $H_1(\mathcal{K})$ et $H_0(\mathcal{K})$ de $\mathcal{K}$ sont exactement les groupes $H_1(G)$ et $H_0(G)$ définis précédemment.
Cela dit le diagramme ci-dessus fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_1(\mathcal{K}) \longrightarrow H_1(\mathcal{G}) \longrightarrow H_1(\mathcal{V}) \longrightarrow H_0(\mathcal{K}) \longrightarrow H_0(\mathcal{G}) \longrightarrow H_0(\mathcal{V}) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

Considérons alors X_G le *cône* de f, c'est-à-dire le quotient de la somme disjointe des espaces $I \times |G|$—où I est l'intervalle $[0,1]$—et V_n par les identifications $(0,x) \sim (0,y)$ et $(1,x) \sim f(x)$ quels que soient x et y dans $|G|$ (figure 7.1.2).

figure 7.1.2

On sait que les groupes d'homologie de $|G|$, V_n et X_G forment une suite exacte:

$$\ldots \longrightarrow H_i(|G|) \xrightarrow{f_*} H_i(V_n) \longrightarrow H_i(X_G) \longrightarrow H_{i-1}(|G|) \longrightarrow \ldots \qquad (2)$$

La comparaison des suites (1) et (2) montre tout d'abord que

$$H_2(X_G) \cong \ker f^1_* \cong H_1(G)$$

D'autre part, $H_0(V_n) = 0$ de sorte que nous avons deux suites exactes courtes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(V_n)/\operatorname{im} f^1_* & \longrightarrow & H_0(G) & \longrightarrow & H_0(|G|) & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & H_1(V_n)/\operatorname{im} f^1_* & \longrightarrow & H_1(X_G) & \longrightarrow & H_0(|G|) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Mais ces suites sont scindées parce que $H_0(|G|)$ est libre, donc

$$H_1(X_G) \cong H_0(G)$$

Cela prouve le

Théorème 7.1.1. *$H_2(X_G) = H_1(G)$ et $H_1(X_G) = H_0(G)$.*

Remarque. Il est clair que les propriétés demandées à f ne déterminent pas celle-ci de façon unique; cependant la topologie du cône de f ne dépend pas de l'application choisie et c'est pourquoi on s'est permis de le noter X_G.

7.2. Une autre construction

On peut construire plus directement et peut-être plus intuitivement un espace de même homologie que X_G.
Soit en effet K_G le CW-complexe de dimension 2 associé à G de la façon suivante:

- K_G a deux 0-cellules (sommets) α et β.
- à chaque sommet u de G correspond une 1-cellule (arète) η_u de K_G.
- à chaque arète fixe a correspond une 2-cellule σ_a.
- à chaque paire p correspond une 2-cellule τ_p.
- les cellules de K_G sont recollées entre elles comme l'indiquent la figure 7.2.1 et la figure 7.2.2.

figure 7.2.1

figure 7.2.2

Par construction, $C_0(K_G) = \mathbf{Z}^2$, $C_1(K_G) = C_0(G)$ et $C_2(K_G) = C_1(G)$. Il est alors aisé de comparer les complexes de groupes abéliens associés respectivement à G et à K_G:

$$0 \longrightarrow C_1(G) \xrightarrow{\partial} C_0(G) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow C_2(K_G) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K_G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_G) \longrightarrow 0$$

Comme pour toute paire $p = \{su, tu\}$,

$$\partial_2(\tau_p) = 2\eta_u - \eta_s - \eta_t$$

les morphismes ∂ et ∂_2 coincident. D'autre part le noyau de ∂_1 s'identifie clairement au noyau de ϵ de sorte que $H_2(K_G) = H_1(G)$ et $H_1(K_G) = H_0(G)$ comme on l'a annoncé.
On peut en fait établir un résultat plus précis:

Proposition 7.2.1. *K_G et X_G sont homéomorphes.*

Preuve. Nous ne donnerons ici aucune preuve formelle mais seulement une description intuitive d'une décomposition cellullaire de X_G dont le lecteur devrait aisément se convaincre qu'elle est isomorphe à K_G.

Considérons en effet la projection canonique

$$(I \times |G|) \coprod V_n \quad \xrightarrow{\pi} \quad X_G$$

On prend pour 0-cellules les points $\alpha = \pi(0,x)$ et $\beta = \pi(v)$ où x est un point quelconque de $|G|$ et v est l'unique sommet de V_n. On prend comme 1-cellules ouvertes les $\eta_u = \pi(]0,1[\times\{u\})$ où u est un sommet de G. Enfin les 2-cellules sont de la forme $\sigma_a = \pi(]0,1[\times\dot{a})$—où a est une arète fixe de G et $\dot{a}$ l'intérieur de a dans $|G|$—ou $\tau_p = \pi(]0,1[\times\dot{p})$ —où $p = \{su, tu\}$ est une paire de G et $\dot{p}$ l'intérieur de la réunion des arètes su et tu dans $|G|$.
Il suffit alors de voir que les cellules ainsi définies se recollent comme dans K_G, le seul cas non évident étant celui des paires: p étant la paire $\{su, tu\}$, il s'agit de vérifier que η_s, η_t, et η_u se rattachent à τ_p de la même façon que dans K_G. Or $\bar{\tau}_p$, l'adhérence de τ_p dans X_G est le quotient de $(I \times (su \cup tu)) \coprod S_1^p$ par les identifications induites par π et indiquées par la figure 7.2.3. La figure 7.2.4 montre comment identifier $\bar{\tau}_p$ à la cellule correspondante de K_G. $\diamond$

figure 7.2.3

figure 7.2.4

Remarque. Pour toute paire p la partie $\dot{\tau}_p$ de X_G n'est autre que le ruban de Möbius. Cela nous fournit une interprétation géométrique inattendue du connecteur $\wp$.

$\triangleright$ Exemple. Soit G le réseau de la figure 3.1.1. L'espace X_G apparait comme le recollement d'un disque avec un ruban de Möbius suivant leur bord respectif: c'est donc le plan projectif $P^2(\mathbf{R})$ (figure 7.2.5).

figure 7.2.5

De la même façon l'espace associé au graphe—faiblement correct— de la figure 7.2.6 est la bouteille de Klein. $\triangleleft$

figure 7.2.6

CHAPITRE 8

Propriétés homologiques des modules

8.1. Modules

Soient M et N deux graphes (non nécessairement des réseaux), on se propose d'étudier à quelles conditions le recollement de M et N suivant un graphe F est un réseau. Le problème se pose en particulier dans la recherche des preuves d'une formule, où l'on tente de recoller correctement un ensemble d'axiomes au graphe de cette formule, ou encore lors de l'élimination d'une coupure, où l'on est amené à substituer un nouveau graphe à un sous-graphe d'un réseau. La situation générale de recollement est la suivante: étant donnés des graphes M , N, et F et des morphismes injectifs $m : F \longrightarrow M$ et $n : F \longrightarrow N$, on peut construire aisément la somme amalgamée:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{m} & M \\ \downarrow n & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & M *_F N \end{array}$$

Une petite difficulté, déjà évoquée, surgit ici: dans la construction précédente, M et N deviennent naturellement des sous-graphes de $M *_F N$, mais leur intersection en tant que sous-graphes de $M *_F N$ peut être strictement plus grande que l'image de F tout simplement parce que notre définition de graphe nous oblige à identifier deux arètes qui ont les mêmes extrémités.
Aussi nous placerons-nous systématiquement dans l'hypothèse où F est exactement l'intersection de M et N dans $M *_F N$.
Nous étudions ici le cas particulier où le graphe F est réduit à un ensemble de sommets $s_0, s_1, \ldots, s_k$. On notera π_X le nombre de paires d'un graphe X. On dira en adoptant la terminologie de [Tro] que deux graphes M et N sont *connectables* suivant F si et seulement si $M *_F N$ est un réseau. Nous recherchons évidemment un critère qui fasse intervenir la "trace" de M et de N sur leur frontière commune (dans l'approche de [DR] reprise dans [Tro], ce sont les partitions induites sur les sommets de F par les positions d'interrupteurs de M et de N qui jouent ce role). On ne peut cependant pas totalement éliminer la configuration

complète des graphes comme le montre l'exemple de la figure 8.1.1: localement, au voisinage de la frontière, les deux cas sont identiques cependant le premier donne un réseau et l'autre non.

figure 8.1.1

Reprenons le diagramme précédent; avec les hypothèses additionnelles, c'est simplement un diagramme d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{m} & M \\ \downarrow n & & \downarrow i \\ N & \xrightarrow{j} & G \end{array}$$

et il donne une suite exacte de Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(F) & \xrightarrow{(m_*,-n_*)} & H_1(M)\oplus H_1(N) & \xrightarrow{i_*+j_*} & H_1(G) & \xrightarrow{\partial_*} & \cdots \\ & \cdots & H_0(F) & \xrightarrow{(m_*,-n_*)} & H_0(M)\oplus H_0(N) & \xrightarrow{i_*+j_*} & H_0(G) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1}$$

Supposons que G soit un réseau. D'une part, $H_1(G)=0$ et $H_1(F)=0$ donc aussi

$$H_1(M)=H_1(N)=0$$

D'autre part F a $k+1$ sommets donc $H_0(F)\cong \mathbf{Z}^k$ ce qui réduit notre suite à

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}^k \xrightarrow{\phi} H_0(M)\oplus H_0(N) \xrightarrow{i_*+j_*} H_0(G) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

avec $\phi=(m_*,-n_*)$. D'après l'exactitude $H_0(G)$ est isomorphe au quotient

$$H_0(M)\oplus H_0(N)/\operatorname{im}\phi$$

lequel est donc un groupe fini. Par ailleurs $\operatorname{im}\phi\subset \operatorname{im} m_*\oplus\operatorname{im} n_*$. On peut donc écrire la relation suivante entre les indices:

$$[H_0(M)\oplus H_0(N):\operatorname{im}\phi]=[H_0(M)\oplus H_0(N):\operatorname{im} m_*\oplus\operatorname{im} n_*][\operatorname{im} m_*\oplus\operatorname{im} n_*:\operatorname{im}\phi]$$

Tout d'abord

$$[H_0(M)\oplus H_0(N):\operatorname{im} m_*\oplus\operatorname{im} n_*]=[H_0(M):\operatorname{im} m_*][H_0(N):\operatorname{im} n_*]$$

qui est une propriété générale de la somme directe dans les groupes abéliens.
Mais ici

$$[H_0(M) : \mathrm{im}\, m_*] = \mathrm{card}\, H_0(M, F)$$

et de la même façon bien entendu

$$[H_0(N) : \mathrm{im}\, m_*] = \mathrm{card}\, H_0(N, F)$$

Il suffit de remarquer que la suite exacte d'homologie relative de M par rapport à F se termine par

$$\cdots \longrightarrow H_0(F) \xrightarrow{m_*} H_0(M) \longrightarrow H_0(M, F)$$

Une expression plus intéressante du facteur $[\mathrm{im}\, m_* \oplus \mathrm{im}\, n_* : \mathrm{im}\, \phi]$ provient du lemme suivant, ici encore de pure théorie des groupes:

Lemme 8.1.1. *Tout morphisme injectif $f : A \longrightarrow B \oplus C$ induit un isomorphisme*

$$\frac{\mathrm{im}\, f_B \oplus \mathrm{im}\, f_C}{\mathrm{im}\, f} \cong \frac{A}{\ker f_B \oplus \ker f_C}$$

où $f = (f_B, f_C)$.

Preuve. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ker f_B \oplus \ker f_C & \xrightarrow{j_B + j_C} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle j_B \oplus j_C} & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{(\mathrm{id}, -\mathrm{id})} & A \oplus A & \xrightarrow{\mathrm{id} + \mathrm{id}} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow {\scriptstyle f} & & \downarrow {\scriptstyle f_B \oplus (-f_C)} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{im}\, f & \xrightarrow{(\mathrm{id}, \mathrm{id})} & \mathrm{im}\, f_B \oplus \mathrm{im}\, f_C & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

dans lequel j_B et j_C désignent les injections canoniques de $\ker f_B$ et $\ker f_C$ dans A respectivement. Il est tout d'abord commutatif: il suffit de vérifier la cohérence des signes dans le carré inférieur gauche.
Ensuite, les verticales sont exactes: c'est l'injectivité de f pour la première et c'est évident pour les deux autres. On a donc une suite exacte de trois complexes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

qui sont les lignes de notre diagramme.

On en déduit comme d'habitude une suite exacte d'homologie et particulièrement

$$\cdots \longrightarrow H_1(\mathcal{D}) \longrightarrow H_1(\mathcal{E}) \longrightarrow H_0(\mathcal{C}) \longrightarrow H_0(\mathcal{D}) \longrightarrow \cdots$$

Or le complexe $\mathcal{D}$ correspond à la deuxième ligne du diagramme, qui est exacte, donc $H_1(\mathcal{D}) = H_0(\mathcal{D}) = 0$ et par conséquent $H_1(\mathcal{E})$ et $H_0(\mathcal{C})$ sont isomorphes. Mais $H_1(\mathcal{E})$ est précisément $(\operatorname{im} f_B \oplus \operatorname{im} f_C)/\operatorname{im} f$ alors que $H_0(\mathcal{C})$ est $A/\operatorname{im}(j_B + j_C)$. Il suffit alors de remarquer que l'injectivité de f entraine $\ker f_B \cap \ker f_C = \ker f = 0$ et donc $j_B + j_C$ est injective de $\ker f_B \oplus \ker f_C$ dans A d'où $H_0(\mathcal{C}) \cong A/(\ker f_B \oplus \ker f_C)$. Cela nous donne l'isomorphisme souhaité. $\diamond$

Une conséquence immédiate dans le cas qui nous occupe est la relation suivante

$$[\operatorname{im} m_* \oplus \operatorname{im} n_* : \operatorname{im} \phi] = [H_0(F) : \ker m_* \oplus \ker n_*]$$

On peut donc énoncer la

Proposition 8.1.2. *Si les graphes M et N sont connectables suivant F alors*

$$\operatorname{card} H_0(M,F) \operatorname{card} H_0(N,F)[H_0(F) : \ker m_* \oplus \ker n_*] = 2^{\pi_M + \pi_N}$$

Réciproquement

Proposition 8.1.3. *Soient M et N d'intersection F dans $G = M *_F N$, F étant réduit à un ensemble de sommets, vérifiant les conditions suivantes*

- $H_1(M) = H_1(N) = 0$
- $H_0(M,F)$ *et* $H_0(N,F)$ *sont des groupes finis.*
- $\ker m_* \cap \ker n_* = 0$ *et* $H_0(F)/\ker m_* \oplus \ker n_*$ *est fini.*
- $\operatorname{card} H_0(M,F) \operatorname{card} H_0(N,F)[H_0(F) : \ker m_* \oplus \ker n_*] = 2^{\pi_M + \pi_N}$

où m et n sont les injections canoniques de F dans M et N respectivement.
Alors M et N sont connectables suivant F.

Preuve. La suite exacte (1) est toujours valable et d'après nos hypothèses elle se réduit à

$$0 \longrightarrow H_1(G) \xrightarrow{\partial_*} H_0(F) \xrightarrow{(m_*,-n_*)} H_0(M) \oplus H_0(N) \xrightarrow{i_*+j_*} H_0(G) \longrightarrow 0$$

D'après $\ker m_* \cap \ker n_* = 0$ le morphisme $f = (m_*, n_*)$ est injectif donc ∂_* est le morphisme nul. L'exactitude en $H_1(G)$ impose alors $H_1(G) = 0$. Comme $H_0(M,F) = H_0(M)/\operatorname{im} m_*$ et $H_0(N,F) = H_0(N)/\operatorname{im} n_*$ sont finis, c'est aussi le cas pour le groupe

$$H_0(M) \oplus H_0(N)/\operatorname{im} m_* \oplus \operatorname{im} n_*$$

D'autre part le lemme (8.1.1) et l'hypothèse de finitude de $H_0(F)/\ker m_* \oplus \ker n_*$ entrainent que $\mathrm{im}\, m_* \oplus \mathrm{im}\, n_* / \mathrm{im}\, f$ est fini. C'est donc encore le cas de $H_0(M) \oplus H_0(N)/\mathrm{im}\, f$, autrement dit $H_0(G)$. Enfin

$$\begin{aligned}\mathrm{card}\, H_0(G) &= \mathrm{card}(H_0(M) \oplus H_0(N)/\mathrm{im}\, f) \\ &= \mathrm{card}\, H_0(M,F)\, \mathrm{card}\, H_0(N,F)[H_0(F) : \ker m_* \oplus \ker n_*] \\ &= 2^{\pi_M + \pi_N}\end{aligned}$$

Comme G a exactement $\pi_M + \pi_N$ paires c'est un réseau et M et N sont connectables suivant F. $\diamond$

Ces conditions nous conduisent à adopter la définition suivante:

Définition 8.1.4. *On appelle* module *tout couple (M, F) où M est un graphe et F est un sous-graphe de M réduit à un ensemble de sommets, tels que $H_1(M) = 0$ et $H_0(M, F)$ est un groupe fini.*

On prendra garde que cette définition n'est pas équivalente à celle de [Dan] et [Tro]. Il faut, pour obtenir une notion équivalente, ajouter la correction faible de M, qui ne semble pas s'exprimer facilement dans notre cadre. (A condition toutefois de préciser la définition habituelle en demandant que dans toute position d'interrupteurs, tout sommet de M soit connecté à un point de F.)

8.2. Formules

La classe $\mathcal{G}$ des *graphes de formules*—en abrégé gf— est la plus petite classe de graphes appariés satisfaisant les conditions suivantes:

- $U \in \mathcal{G}$.
- Si M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{G}$ et s_i est un sommet de degré pair de M_i alors

$$M = \mathrm{p}(M_1 \coprod M_2, s_1, s_2) \in \mathcal{G}$$

- Si M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{G}$ et s_i est un sommet de degré pair de M_i, et si M_i' est le graphe M_i où l'on a ajouté une arète fixe $s_i s_i'$ alors $M = \mathrm{t}(M_1', M_2', s_1', s_2')$ appartient à $\mathcal{G}$.

Si M est un gf, $|M|$ est un arbre dont les sommets sont de degré ≤ 3 et dont *exactement un sommet* est de degré 2, sa *racine*. Il a nécessairement des sommets de degré 1, qu'on appellera *initiaux*. Si M_1 et M_2 sont deux gf on peut donc parler sans ambiguité de $M_1 \wp M_2$ et de $M_1 \otimes M_2$ pour désigner les deux constructions précédentes. Enfin, la *taille* d'un gf est le nombre de ses sommets initiaux. Notons τ_M la taille de M. M est bien sûr un module de frontière le graphe de ses sommets initiaux.

Lemme 8.2.1. *Si M est un gf, $H_1(M) = 0$ et $H_0(M) \cong \mathbf{Z}^{\tau_M}$.*

Preuve. C'est évident par induction sur la construction de M. Il suffit de remarquer que si $M = M_1 \coprod M_2$ et s_i est un sommet de M_i alors $H_0(M) = H_0(M_1) \oplus H_0(M_2) \oplus \mathbf{Z}$. $\diamond$

Lemme 8.2.2. *Si M est un gf et F est le graphe des sommets initiaux de M, $H_0(M, F)$ est un groupe fini dont le cardinal divise 2^{τ_M}.*

Preuve. Pour tout gf M on note $\overline{M}$ le graphe obtenu en ajoutant un nouveau sommet $s = s_M$ et une arête fixe su pour chaque sommet initial de M. Il est clair par théorème d'excision que $H_i(M, F) \cong H_i(\overline{M})$. Montrons alors le résultat par induction sur la construction de M. Si M est réduit à un sommet, le résultat est évident. Supposons alors que les gf M_1 et M_2 vérifient le résultat. r_i sera la racine de M_i.

- Soit $M = M_1 \wp M_2$. Par (3.3.3) et (3.3.2)

$$\operatorname{card}(H_0(\overline{M})) = 2\operatorname{card}(H_0(\overline{M}_1) \oplus H_0(\overline{M}_2)) = 2\operatorname{card}(H_0(\overline{M}_1))\operatorname{card}(H_0(\overline{M}_2))$$

  et divise donc $2^{\tau_{M_1}+\tau_{M_2}+1} = 2^{\tau_M}$ par hypothèse d'induction, d'où le résultat dans ce cas.

- Soit $M = M_1 \otimes M_2$. Posons $M_0 = \mathrm{t}(\overline{M}_1, \overline{M}_2, s_{M_1}, s_{M_2})$. Il est clair que

$$H_0(\overline{M}) \cong H_0(M_0, R)$$

  où R est réduit aux deux racines r_1 et r_2. Cela dit,

$$H_0(M_0) = H_0(\overline{M}_1) \oplus H_0(\overline{M}_1)$$

  et son cardinal divise donc $2^{\tau_{M_1}+\tau_{M_2}} = 2^{\tau_M}$ par hypothèse d'induction et d'autre part $H_0(M_0, R)$ est un quotient de $H_0(M_0)$, d'où le résultat.

$\diamond$

On peut également remarquer que $H_0(F) \cong \mathbf{Z}^{\tau_M - 1}$ et qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_1(M, F) \longrightarrow H_0(F) \longrightarrow H_0(M) \longrightarrow H_0(M, F) \longrightarrow 0$$

et comme $H_0(M, F)$ est fini, $H_1(M, F) \cong \mathbf{Z}^{\tau_M - \pi_M - 1}$. Mais $\tau_M - \pi_M - 1$ est facilement le nombre de sommets de type $\otimes$ dans M.
A chaque formule multiplicative f correspond de façon évidente un gf dont les sommets initiaux sont étiquetés par les sous-formules atomiques de f. Ce graphe étiqueté est l'*arbre* de la formule et permet bien entendu de reconstituer celle-ci. On s'autorise donc désormais à identifier une formule et son arbre.

$\triangleright$ Exemple. La figure 8.2.1 représente l'arbre de $a \wp (b \otimes c)$. $\triangleleft$

figure 8.2.1

Soit A une formule. On dira que deux sommets initiaux de A sont *compatibles* s'ils sont étiquetés par des atomes orthogonaux a et $a^\perp$. On sait alors que A est démontrable si l'on peut former un réseau en ajoutant à A des arètes fixes qui partitionnent les sommets initiaux en paires de sommets compatibles. (C'est une conséquence immédiate de l'élimination des coupures dans le fragment multiplicatif.)
On dira de même qu'un gf est *démontrable* s'il provient d'une formule démontrable. D'après la remarque précédente, un gf est démontrable si l'on peut partitionner ses sommets initiaux en paires de sorte que le graphe obtenu en ajoutant les arètes fixes correspondantes soit un réseau. Il est évidemment nécessaire que la taille d'un tel gf soit *paire*.
Soient k et l des entiers non nuls. On notera F_l (resp. N_k) le graphe formé de l sommets disjoints (resp. de k arètes disjointes). On oubliera les indices lorsque le contexte s'y prètera. Soit M un gf de taille l, on fixe une fois pour toutes une injection m de F_l dans le graphe des sommets initiaux de M. Si $l = 2k$, Toute injection n de F_l dans N_k définit alors un recollement $M *_F N$ que l'on notera aussi $M *_n N$ lorsque l'on voudra préciser suivant quelles identifications s'effectue ce recollement. On peut alors reformuler les définitions précédentes en disant que M est démontrable s'il existe n pour laquelle $M *_n N$ est un réseau.
Etablissons tout d'abord quelques propriétés générales: quelle que soit l'identification $n : F \longrightarrow N$, $H_0(F) \cong \mathbf{Z}^{2k-1}$, $H_0(N) \cong \mathbf{Z}^{k-1}$ et $H_0(N, F) = 0$.
Par conséquent $H_0(F) \xrightarrow{n_*} H_0(N)$ est surjective et $\ker n_* \cong \mathbf{Z}^k$.
Nous pouvons alors montrer la

Proposition 8.2.3. *Si M est démontrable, $\tau_M = 2\pi_M$.*

Preuve. Supposons M démontrable: il existe une identification $n : F \longrightarrow N$ telle que $M *_n N$ soit un réseau. Soit m l'inclusion canonique de F dans M. D'après (8.2.2) , $H_0(M, F)$ est un groupe fini et par l'exactitude de

$$H_0(F) \quad \xrightarrow{m_*} \quad H_0(M) \quad \longrightarrow \quad H_0(M, F) \quad \longrightarrow \quad 0$$

on a

$$\mathrm{rang}(H_0(M)) = \mathrm{rang}\, m_* = \mathrm{rang}(H_0(F)) - \mathrm{rang}(\ker m_*)$$

D'autre part, (8.1.2) montre que $[H_0(F) : \ker m_* \oplus \ker n_*]$ est fini par conséquent

$$\mathrm{rang}(\ker m_* \oplus \ker n_*) = \mathrm{rang}(H_0(F))$$

et

$$\mathrm{rang}(H_0(F)) - \mathrm{rang}(\ker m_*) = \mathrm{rang}(\ker n_*) = k$$

Ainsi $H_0(M) \cong \mathbf{Z}^k$ ce qui donne le résultat par (8.2.1) . $\diamond$

Remarque. En rassemblant les résultats précédents on retrouve les conditions nécessaires bien connues de prouvabilité d'une formule A à $2k$ atomes, à savoir nombre($\wp$) $= k$ et nombre($\otimes$) $= k - 1$ que l'on prouve aussi bien par récurrence sur les preuves qu'en utilisant une sémantique des phases particulière (voir [Ret]).

Il est évident que la condition $\tau_M = 2\pi_M$ ne suffit pas à la prouvabilité de M. Le contre-exemple le plus simple est

figure 8.2.2

CHAPITRE 9

Complexité

9.1. Introduction

[LW] a montré que le problème de la décision des formules propositionnelles multiplicatives— et même du seul fragment neutre —est $\mathcal{NP}$-complet. Nous allons voir ici qu'il en est de même pour la version abstraite du problème, à savoir la prouvabilité d'un graphe de formule.
On utilisera successivement deux traductions: la première de $\mathrm{L}(a)$ dans l'ensemble des graphes de formules, la seconde du fragment neutre dans $\mathrm{L}(a)$. On conclut enfin en appliquant le résultat de [LW].

9.2. Une traduction de $\mathrm{L}(a)$ dans l'ensemble des graphes de formules

Rappelons tout d'abord l'énoncé du *lemme des mariages*, qui jouera ici un rôle essentiel:

Lemme 9.2.1. *Soient K et L deux ensembles finis, et Φ une application de K dans l'ensemble des parties de L.*
Il existe une injection $\psi : K \longrightarrow L$ telle que, pour tout $k \in K$, $\psi(k) \in \Phi(k)$ si et seulement si, pour toute partie I de K

$$\mathrm{card}(\bigcup_{i \in I} \Phi(i)) \geq \mathrm{card}(I)$$

On trouvera plusieurs preuves de ce résultat classique et de nombreux résultats voisins dans [Bol, p.54] ou [Hal, p.??].

Pour toute formule A de $\mathrm{L}(a)$, on notera M_A son graphe. A^* désignera la formule obtenue en substituant simultanément dans A $B = (a \wp a) \wp (a \wp a)$ à l'atome a et $B^\perp$ à $a^\perp$. Autrement dit $A^* = A[(a \wp a) \wp (a \wp a)/a; (a^\perp \otimes a^\perp) \otimes (a^\perp \otimes a^\perp)/a^\perp]$.
Par définition $T_A = M_{A^*}$.
La figure 9.2.1 représente par exemple T_A pour $A = a \otimes a^\perp$.

figure 9.2.1

Rappelons également qu'une formule de $\mathrm{L}(a)$ est dite *équilibrée* si elle a autant d'occurrences de a que de $a^\perp$.
On peut alors énoncer la

Proposition 9.2.2. *Une formule équilibrée A est démontrable dans* $\mathrm{L}(a)$ *si et seulement si T_A est prouvable.*

Preuve. Supposons tout d'abord A démontrable (donc équilibrée). En pareil cas A^* est encore démontrable, ainsi que son graphe, qui est précisément T_A.
La réciproque est un peu plus délicate: supposons que A soit une formule équilibrée pour laquelle $T = T_A$ est prouvable. Pour $M = M_A$, $\tau_M = 2k$ donc $\tau_T = 8k$. Par hypothèse, $G = T *_{F^1} N^1$ est un réseau pour un certain recollement de $N^1 = N_{4k}$ avec T suivant le graphe $F^1 = F_{8k}$ des sommets initiaux de T. D'où $2\pi_T = \tau_T = 8k$ mais $\pi_M = \pi_T - 3k = k$ donc $H_0(M) \cong \mathbf{Z}^k$. Par ailleurs G peut également être vu comme $M *_F N$ où F est le graphe des sommets initiaux *de* M et $N = G \setminus M$ c'est-à-dire le recollement de N^1 avec k exemplaires de M_B et k exemplaires de $M_B^\perp$ suivant F^1. Choisissons maintenant une position d'interrupteurs σ *de* N. D'après (3.4.3) $G^\sigma = M *_F N^\sigma$ est encore un réseau. La suite (2) de la section (8.1) montre alors que

$$\mathrm{rang}(H_0(M)) + \mathrm{rang}(H_0(N^\sigma)) = \mathrm{rang}(H_0(F)) = 2k - 1$$

donc aussi $\mathrm{rang}(H_0(N^\sigma)) = k - 1$. Par conséquent N^σ est un graphe ordinaire ayant exactement k composantes connexes.
Examinons à présent les sommets de F^1. Ils sont partitionnés en familles de quatre sommets suivant les graphes M_B et $M_B^\perp$ auxquels ils appartiennent; notons ces familles

$$X_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}\} \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, k$$

$$Y_j = \{a_{j1}^\perp, a_{j2}^\perp, a_{j3}^\perp, a_{j4}^\perp\} \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, k$$

X_i (resp. Y_j) est l'ensemble des sommets initiaux de $M_i \cong M_B$ (resp. $M_j^\perp \cong M_B^\perp$). Enfin s_i (resp. $s_j^\perp$) désigne le sommet de F racine de M_i (resp. $M_j^\perp$).
Posons $X = \bigcup_i X_i$ et $Y = \bigcup_i Y_i$. Les arètes de N^1 induisent alors une partition de $X \cup Y$ en paires, mais deux sommets de Y n'appartiennent jamais à la même paire sinon G a un cycle en contradiction avec $H_1(G) = 0$ (figure 9.2.2).

figure 9.2.2

Il résulte immédiatement de $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) = 4k$ que toutes les paires sont formées d'un sommet de X et d'un sommet de Y, ce qui donne une bijection $\phi : X \longrightarrow Y$. Considérons l'application $\Phi : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \mathcal{P}(\{1, \ldots, k\})$ qui à chaque indice i associe l'ensemble $\{j / \phi^\bullet(X_i) \cap Y_j \neq \emptyset\}$. Soit I une partie quelconque de $\{1, \ldots, k\}$, vérifions que

$$\mathrm{card}(\bigcup_{i \in I} \Phi(i)) \geq \mathrm{card}(I) \tag{1}$$

Soit en effet $C = \bigcup_{i \in I} \Phi(i)$, il est clair que

$$\phi^\bullet(\bigcup_{i \in I} X_i) \subset \bigcup_{j \in C} Y_j \tag{2}$$

comme les X_i et les Y_j sont des ensembles de quatre éléments deux à deux disjoints et ϕ est bijective, les ensembles de (2) ont respectivement $4 \times \mathrm{card}(I)$ et $4 \times \mathrm{card}(C)$ éléments, ce qui prouve (1).
(9.2.1) fournit alors il une injection ψ—donc ici une bijection—de $\{1, \ldots, k\}$ dans lui-même telle que quel que soit i, $\psi(i) \in \Phi(i)$.
Choisissons alors dans chaque X_i un sommet x_i tel que $\phi(x_i) \in Y_{\psi(i)}$. Prenons dans chaque M_i la position d'interrupteurs qui connecte s_i à x_i (dans M_i). On en déduit une position d'interrupteurs σ_0 de N telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, s_i et $s_{\psi(i)}^\perp$ soient dans la même composante connexe de N^{σ_0}. Or ce dernier graphe a exactement k composantes connexes; on peut donc remplacer chacune de ces composantes par une unique arète $s_i s_{\psi(i)}^\perp$ sans affecter la correction du graphe. On en déduit immédiatement une preuve de la formule A. $\diamond$

figure 9.2.3

9.3. Une traduction du fragment neutre dans L(a)

La seconde étape consiste à établir une traduction du fragment neutre dans L(a).
Les notations $\vdash \Gamma$ et $\vdash_a \Gamma$ désigneront respectivement la prouvabilité du séquent Γ dans le fragment neutre et dans L(a).
On définit une traduction du fragment neutre dans L(a) de la manière suivante:

- $1^\circ = a \wp a^\perp$ et $\perp^\circ = a \otimes a^\perp$.
- Quelles que soient les formules A et B, $(A \wp B)^\circ = A^\circ \wp B^\circ$ et $(A \otimes B)^\circ = A^\circ \otimes B^\circ$.
- Pour tout séquent $\Gamma = A_1, \ldots, A_p$, $\Gamma^\circ = A_1^\circ, \ldots, A_p^\circ$.

Remarque. Soient A et B deux formules de L(a) dont au moins une n'est pas de la forme X°. Si $A \wp B$ (ou $A \otimes B$) est de la forme C°, il faut que $A = a$ et $B = a^\perp$. D'autre part les formules A°—donc aussi les séquents Γ°—sont nécessairement *équilibrés*: ils ont autant d'occurrences de a que de $a^\perp$. C'est également vrai de tout séquent démontrable dans L(a).

Lemme 9.3.1. *Pour tout séquent Γ de* L(a), $\vdash_a \Gamma$ *si et seulement si* $\vdash_a \Gamma, a \otimes a^\perp$.

Preuve. Dans un sens, par induction sur la hauteur d'une preuve π sans coupure de Γ.
Si π est l'axiome , on a directement $\vdash_a a, a^\perp, a \otimes a^\perp$.
Si la dernière règle est un *tenseur* ou un *par*, l'hypothèse d'induction s'applique à une des prémisses.
La réciproque est évidente: si $\vdash_a \Gamma, a \otimes a^\perp$ une coupure avec $a \wp a^\perp$ donne $\vdash_a \Gamma$. $\diamond$

Lemme 9.3.2. *La traduction* $\Gamma \longrightarrow \Gamma^\circ$ *est cohérente.*

Preuve. Par induction sur la hauteur d'une preuve sans coupure d'un séquent Γ du fragment neutre.
Si Γ est 1, $\Gamma^\circ = a \wp a^\perp$ donc $\vdash_a \Gamma^\circ$.
Si la dernière règle est l'affaiblissement

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1}}{\Gamma_1, \perp}$$

l'hypothèse d'induction donne $\vdash_a \Gamma_1^\circ$ donc aussi, par (9.3.1) , $\vdash_a \Gamma_1^\circ, a \otimes a^\perp$ c'est-à-dire $\vdash_a \Gamma^\circ$.
Si la dernière règle est un *tenseur* ou un *par* le résultat est évident. ◇

Définissons maintenant par induction une relation de réduction $\rhd_1$ entre formules de N, par les règles suivantes, où A, B, C désignent des formules quelconques:

- $1 \otimes A \rhd_1 A$, $A \otimes 1 \rhd_1 A$, $\perp \wp A \rhd_1 A$ et $A \wp \perp \rhd_1 A$.
- Si $A \rhd_1 B$, alors $A \otimes C \rhd_1 B \otimes C$, $C \otimes A \rhd_1 C \otimes B$, $A \wp C \rhd_1 B \wp C$ et $C \wp A \rhd_1 C \wp B$.

On écrira d'autre part $A \rhd B$ s'il existe une suite de réductions

$$A = A_1 \rhd_1 A_2 \rhd_1 \cdots \rhd_1 A_p = B$$

De la même façon, si $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ et $\Delta = B_1, \ldots, B_n$ sont deux séquents de N, on dira que $\Gamma \rhd_1 \Delta$ si et seulement s'il existe un indice i tel que $A_i \rhd_1 B_i$, et $A_j = B_j$ pour tout $j \neq i$.
Enfin, $\Gamma \rhd \Delta$ s'il existe une suite de réductions

$$\Gamma = \Gamma_1 \rhd_1 \Gamma_2 \rhd_1 \cdots \rhd_1 \Gamma_p = \Delta$$

On vérifie aisément que si $\Gamma \rhd \Delta$ et $\vdash \Gamma$, alors $\vdash \Delta$.
Ces remarques faites, nous pouvons montrer le

Lemme 9.3.3. *La traduction $\Gamma \longrightarrow \Gamma^\circ$ est fidèle.*

Preuve. Tout d'abord, pour tout séquent Δ de $\mathrm{L}(a)$, on note Δ' le séquent de N obtenu en remplaçant dans les formules de Δ chaque atome a par 1 et chaque atome $a^\perp$ par $\perp$. On montre alors que pour tout séquent Γ de N,

$$(\Gamma^\circ)' \rhd \Gamma \tag{1}$$

Il suffit en effet de montrer que, pour toute *formule* A de N, $(A^\circ)' \rhd A$, ce qui est immédiat par induction sur la complexité de A.
Si maintenant $\vdash_a \Gamma^\circ$, il est clair que $\vdash (\Gamma^\circ)'$ donc aussi $\vdash \Gamma$, par (1) et les remarques précédant le lemme. D'où le résultat. ◇

9.4. La décision des graphes de formules

Proposition 9.4.1. *Le problème de la décision des graphes de formules est $\mathcal{NP}$-complet.*

Preuve. D'une part le problème appartient bien à $\mathcal{NP}$: si M est un gf de taille $2k$, on dispose d'un algorithme polynomial (en k) pour décider si un recollement $M *_F N_k$ est ou non un réseau.
D'autre part la composée des deux traductions que l'on vient de décrire donne une traduction cohérente et fidèle $A \longrightarrow A^*$ des formules du fragment neutre dans l'ensemble des gf. Si A a l atomes, A° en a $2l$ et la taille de A^* est $8l$, donc la traduction $()^*$ est polynomiale (et même linéaire). Or par [LW], le problème de la décision dans le fragment neutre est déjà $\mathcal{NP}$-complet, d'où le résultat. $\diamond$

Remarque. C'est la nécessité d'obtenir un cardinal donné pour $[H_0(F) : \ker m_* \oplus \ker n_*]$ qui est responsable de la complexité: si l'on demande seulement que ce cardinal soit *fini*— c'est-à-dire que l'intersection des noyaux soit triviale— le problème est beaucoup plus simple, comme on va le voir à la fin de ce chapitre.

9.5. Un lemme algébrique

Soit k un entier non nul. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q}^{2k}$ dont la base canonique est notée $e_1, e_2, \ldots, e_{2k}$. Soit E l'hyperplan d'équation

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k} = 0$$

Si $1 \leq i < j \leq 2k$ on notera f_{ij} le vecteur $e_j - e_i$ et Φ l'ensemble des vecteurs f_{ij}. On appelle *support* de f_{ij} la paire $\{i, j\}$. On considère maintenant la k-ième puissance extérieure $\bigwedge^k(E)$ de l'espace E. Si $u = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k$ avec $x_i \in \Phi$ on appellera encore *support* de u la réunion des supports des x_i.
Nous allons maintenant établir la proposition suivante:

Lemme 9.5.1. $\bigwedge^k(E)$ *est engendré par les éléments de la forme* $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k$ *tels que*

- *Quel que soit* $i \in \{1, \ldots, k\}$, $x_i \in \Phi$.
- *Les supports des* x_i *forment une* partition *de l'ensemble* $\{1, 2 \ldots 2k\}$.

Preuve. Notons V_k l'ensemble des éléments de la forme $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k$ tels que $x_i \in \Phi$ pour tout i et les supports des x_i forment une partition de $\{1, 2 \ldots 2k\}$.
Avec les notations précédentes, posons $y_i = f_{i,i+1}$ pour $i \in \{1, \ldots, 2k-1\}$. Il est clair que les y_i constituent une base de E et donc que les éléments de la forme

$$y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge \ldots \wedge y_{i_k}$$

forment une base de $\bigwedge^k(E)$ pour $1 \leq i_i < i_2 < \ldots < i_k \leq 2k-1$.
Nous procédons alors par induction sur k.
Si $k = 1$ le résultat est évident.
Le cas $k = 2$ est essentiel pour l'étape d'induction:
Comme $f_{ij} = f_{kj} - f_{ki}$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} f_{12} \wedge f_{34} &= f_{12} \wedge f_{14} - f_{12} \wedge f_{13} \\ f_{13} \wedge f_{24} &= f_{13} \wedge f_{14} - f_{13} \wedge f_{12} \\ f_{14} \wedge f_{23} &= f_{14} \wedge f_{13} - f_{14} \wedge f_{12} \end{aligned}$$

par conséquent

$$f_{12} \wedge f_{34} - f_{13} \wedge f_{24} - f_{14} \wedge f_{23} = -2 f_{12} \wedge f_{13}$$

d'où

$$f_{12} \wedge f_{13} = (-1/2)(f_{12} \wedge f_{34} - f_{13} \wedge f_{24} - f_{14} \wedge f_{23})$$

ce qui donne le résultat dans ce cas.
Supposons la propriété vérifiée pour les entiers $< k$, et plaçons-nous au rang k. Considérons un élément de la forme $u = y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge \ldots \wedge y_{i_k}$ pour $1 \leq i_i < i_2 < \ldots < i_k \leq 2k-1$ et posons $z_j = y_{i_j}$. Deux cas sont alors possibles:
• Cas 1. Les supports des z_j sont disjoints deux à deux: ils constituent donc une partition de $\{1, \ldots, 2k\}$ auquel cas $u \in V$ ce qui donne le résultat.
• Cas 2. Parmi les supports des z_j, deux au moins ont des supports d'intersection non vide, donc un singleton. Le support de u est alors de cardinal $< 2k$ et il y a un entier $s \in \{1, \ldots, 2k\}$ qui n'appartient pas à ce support. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que u est de la forme

$$y_{i_1} \wedge \ldots \wedge y_{i_{k-2}} \wedge y_{2k-3} \wedge y_{2k-2}$$

avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-2} \leq 2(k-2)$; ainsi $2k$ n'appartient pas au support de u. Par hypothèse d'induction, $y_{i_1} \wedge \ldots \wedge y_{i_{k-2}} \wedge y_{2k-3}$ est combinaison linéaire d'éléments de V_{k-1}:

$$y_{i_1} \wedge \ldots \wedge y_{i_{k-2}} \wedge y_{2k-3} = \sum_{v \in V_{k-1}} \lambda_v v$$

donc

$$u = \sum_{v \in V_{k-1}} \lambda_v v \wedge y_{2k-2}$$

on est donc ramené à montrer que pour tout $v \in V_{k-1}$, $v \wedge y_{2k-2}$ est engendré par les éléments de V_k. Soit donc $v = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}$ dans V_{k-1}. Le support de v est $\{1, \ldots, 2(k-1)\}$. Il y a un unique indice l tel que le support de x_l rencontre celui de y_{2k-2} et pour cet indice, $x_l = f_{j,2k-2}$. On peut donc écrire

$$v \wedge y_{2k-2} = \pm w \wedge x_l \wedge y_{2k-2}$$

où w est le produit extérieur de $k-2$ éléments de Φ et a pour support $\{1, \ldots, 2k-3\} \setminus \{j\}$. Il suffit donc de montrer que $x_l \wedge y_{2k-2}$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $z = z_1 \wedge z_2$ où z_1 et z_2 sont dans Φ et leurs supports forment une partition de l'ensemble $\{j, 2k-2, 2k-1, 2k\}$ or c'est exactement ce que nous avons prouvé pour $k = 2$.

figure 9.5.1

◇

9.6. Propriétés supplémentaires de certains gf

Si M est un gf, nous avons vu qu'une condition nécessaire de prouvabilité est

$$\tau_M = 2\pi_M$$

et qu'elle n'est pas suffisante. Nous allons cependant montrer le résultat plus faible suivant:

Lemme 9.6.1. *Soient M un gf de taille $2k$, F_{2k} le graphe des sommets initiaux de M et $m : F_{2k} \longrightarrow M$ l'application canonique.*
Si $\tau_M = 2\pi_M$, il existe une identification $n : F_{2k} \longrightarrow N_k$ telle que $\ker m_* \cap \ker n_* = 0$.

Preuve. dans les hypothèses du lemme, la suite

$$H_0(F) \xrightarrow{m_*} H_0(M) \longrightarrow H_0(M,F) \longrightarrow 0$$

est exacte, et d'après (8.2.2) $H_0(M,F)$ est un groupe fini.
On en déduit que $H_0(M,F) \otimes \mathbf{Q} = 0$, et l'exactitude de

$$H_0(F) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{m_* \otimes \mathrm{id}} H_0(M) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow 0$$

Soient $s_1, \ldots, s_{2k}$ les sommets de F. Ils forment une base d'un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel dont $E = H_0(F) \otimes \mathbf{Q}$ est l'hyperplan d'équation

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k} = 0$$

Par hypothèse $\pi_M = k$ donc $\dim_Q H_0(M) \otimes \mathbf{Q} = k$. D'où $\dim_Q(\ker m_* \otimes \mathrm{id}) = 2k - 1 - k = k - 1$.
D'autre part, une identification $n : F \longrightarrow N$ équivaut à une partition de $\{s_1, \ldots, s_{2k}\}$ en paires de sommets reliés deux à deux par les arètes de N, donc aussi à la donnée d'une famille $x_1^n, \ldots, x_k^n$ où $x_i \in \Phi$ et les supports des x_i forment une partition de $\{1, \ldots, 2k\}$. Une telle famille est évidemment une $\mathbf{Z}$-base de $\ker n_*$.
Soit enfin $v_1, \ldots, v_{k-1}$ une $\mathbf{Z}$-base de $\ker m_*$ (donc une $\mathbf{Q}$-base de $(\ker m_*) \otimes \mathbf{Q} = \ker(m_* \otimes \mathrm{id})$) on peut la compléter par $z_1, \ldots, z_k$ pour former une base de E. En pareil cas

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k-1} \wedge z_1 \wedge \ldots \wedge z_k \neq 0$$

Par (9.5.1) , $z_1 \wedge \ldots \wedge z_k$ est combinaison linéaire des $x_1^n, \ldots, x_k^n$ lorsque n parcourt les identifications possibles: il existe donc au moins un n tel que

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k-1} \wedge x_1^n \wedge \ldots \wedge x_k^n \neq 0$$

Mais cette relation exprime exactement que $\ker m_* \cap \ker n_* = 0$. $\diamond$

Notons une petite conséquence de (9.6.1) : si M est un gf tel que

- $\tau_M = 2\pi_M = 2k$
- $\mathrm{card}(H_0(M,F)) = 2^k$

alors M est prouvable.

En effet, si $N = N_k$, on sait que $H_1(M) = H_1(N) = 0$, $H_0(M, F)$ et $H_0(N, F)$ sont des groupes finis. D'autre part (9.6.1) donne une identification n pour laquelle $\ker m_* \cap \ker n_* = 0$, ce qui impose $\text{rang}(\ker m_* \oplus \ker n_*) = 2k - 1 = \text{rang}(H_0(F))$ donc aussi la finitude de $H_0(F)/\ker m_* \oplus \ker n_*$. Enfin l'hypothèse donne

$$\text{card}\, H_0(M, F)\, \text{card}\, H_0(N, F)[H_0(F) : \ker m_* \oplus \ker n_*] \geq 2^k$$

et le membre de gauche ne peut exceder 2^k, donc l'inégalité est une égalité. On conclut par (8.1.2) .
Ce critère a un intérêt très limité dans la mesure ou il ne s'applique qu'aux formules dont tous les *par* sont terminaux. On peut d'ailleurs retrouver ce résultat, et même mieux, de façon directe:

Proposition 9.6.2. *Soient k un entier et $\Gamma = A_0, \ldots, A_k$ un séquent de $\mathrm{L}(a)$ tel que*

- *Les formules A_i ne contiennent pas de connecteur $\wp$.*
- *Γ est équilibré et contient $2k$ atomes.*

alors $\vdash_a \Gamma$.

La preuve, par induction sur la taille de Γ, est laissée au lecteur.
On peut également interpréter les résultats ci-dessus en termes d'homologie à coefficients rationnels: si G est un *réseau* il est clair que $H_1(G; \mathbf{Q}) = H_0(G; \mathbf{Q}) = 0$ (autrement dit $H_1(G) = 0$ et $H_0(G)$ est *fini*). En convenant d'appeler *pseudoréseau* un tel graphe, nous avons donc montré que $\tau_M = 2\pi_M$ est une condition nécessaire et suffisante sur M pour pouvoir le compléter en un pseudoréseau par un recollement convenable d'axiomes. Disons tout de suite que cette notion de pseudoréseau n'est pas stable par l'élimination des coupures et n'a donc pas d'intérêt en elle-même: elle illustre simplement la difficulté à donner un critère homologique de correction plus simple que celui que nous avons proposé, comme nous allons le voir plus en détail dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 10

Peut-on caractériser les réseaux plus simplement?

10.1. Position du problème

Nous avons déjà remarqué que notre critère de correction a l'inconvénient de faire intervenir le nombre de paires.
On peut donc se demander s'il n'existe pas une homologie des graphes appariés qui caractérise plus simplement les réseaux, par exemple comme les objets d'homologie *nulle*.
La réponse est négative, comme nous allons le voir.

Pour donner une signification précise à cette affirmation, il convient naturellement de définir ce que nous appelons théorie homologique des graphes appariés: nous posons donc tout d'abord les hypothèses d'une telle théorie.
On considère la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les couples (X, Y) où X est un graphe apparié et Y est un sous-graphe de X. Un *morphisme* $f : (X, Y) \longrightarrow (X', Y')$ est un morphisme de X vers X' tel que $f^\bullet(Y)$ est un sous-graphe de Y'.
Une *homologie H des graphes appariés* est la donnée pour chaque entier i d'un foncteur H_i de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des groupes abéliens (on note $H_i(f) = f_*$ pour les morphismes f), ainsi que d'une flèche

$$(\partial_*)_i : H_i(X, Y) \longrightarrow H_{i-1}(Y)$$

où on note $Y = (Y, \emptyset)$, satisfaisant les propriétés suivantes

- Pour tout morphisme $f : (X, Y) \longrightarrow (X', Y')$ et tout entier i le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H_i(X,Y) & \xrightarrow{f_*} & H_i(X',Y') \\ \downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* \\ H_{i-1}(Y) & \xrightarrow{(f|Y)_*} & H_{i-1}(Y') \end{array}$$

- Pour tout couple (X, Y) on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_i(Y) \xrightarrow{j_*} H_i(X) \xrightarrow{k_*} H_i(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{i-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

où $j : Y \longrightarrow X$ et $k : X \longrightarrow (X,Y)$ sont les applications canoniques.

- Propriété d'excision: pour tout couple (X,Y) et tout sous-graphe Z de Y, l'inclusion canonique de $(X \setminus Z, Y \setminus Z)$ dans (X,Y) induit un isomorphisme

$$H_i(X \setminus Z, Y \setminus Z) \cong H_i(X,Y)$$

- H coincide avec l'homologie simpliciale réduite sur les graphes ordinaires et les morphismes entre ces derniers.

On dira que l'homologie d'un graphe G est nulle si $H_i(G) = 0$ pour tout entier i et on notera cela $H_*(G) = 0$.

10.2. Un résultat négatif

Proposition 10.2.1. *Soit H une homologie des graphes appariés qui est nulle pour tous les réseaux. Il existe alors un graphe X qui n'est* pas *un réseau et qui vérifie $H_*(X) = 0$.*

Preuve. Soit H une homologie des graphes appariés satisfaisant les hypothèses du lemme.
• Remarquons tout d'abord que l'homologie du graphe T constitué d'une unique paire est parfaitement déterminée par nos hypothèses.
Soient i un entier et A de sommets s, t, u, v le graphe représenté figure 10.2.1.

figure 10.2.1

En considérant T comme le sous-graphe de A de sommets s, t, u on peut écrire la suite exacte

$$H_{i+1}(A) \xrightarrow{\partial_*} H_{i+1}(A,T) \longrightarrow H_i(T) \longrightarrow H_i(A)$$

or $H_i(A) = 0$ (A est un réseau) et $H_{i+1}(A,T) = H_{i+1}(A \setminus T, D)$ qui vaut $\mathbf{Z}$ pour $i = 0$ et 0 sinon.
D'où $H_0(T) = \mathbf{Z}$ et $H_i(T) = 0$ quel que soit $i \neq 0$.
• Plus généralement, pour tout graphe X non vide $H_i(X) = 0$ pour tout $i \notin \{0,1\}$. Montrons-le par induction sur le nombre n de paires.
Si $n = 0$, X est un graphe ordinaire et le résultat est évident.
Si X a au moins une paire, on peut considérer T comme un sous-graphe de X. Posons $Y = X \setminus T$ et $U = Y \cap T$. Soit $i \notin \{0,1\}$, on peut écrire un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} H_i(T) & \longrightarrow & H_i(X) & \longrightarrow & H_i(X,T) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & H_i(Y) & \longrightarrow & H_i(Y,U) & \longrightarrow & H_{i-1}(U) \end{array}$$

où les lignes sont exactes et la flèche verticale est un isomorphisme.
Par hypothèse d'induction, $H_i(Y) = 0$ et il est clair que $H_{i-1}(U) = 0$ car $i - 1 \neq 0$.
D'où $H_i(Y,U) = 0$, puis $H_i(X,T) = 0$. Enfin $H_i(T) = 0$ entraine $H_i(X) = 0$. Cela donne le résultat.
• Soit B le graphe de sommets s, t, u, v représenté figure 10.2.2.

figure 10.2.2

Les graphes T et A sont évidemment des sous-graphes de B. On appelle C (resp. C') le sous-graphe de B obtenu en effaçant l'arète us (resp. ut). Il est clair que C et C' sont isomorphes et ont par conséquent la même homologie.
On peut donc écrire la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & H_1(A) & \longrightarrow & H_1(B) & \longrightarrow & H_1(B,A) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & H_0(A) & \longrightarrow & H_0(B) & \longrightarrow & H_0(B,A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui se ramène à

$$0 \longrightarrow H_1(B) \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow H_0(B) \longrightarrow 0$$

On en déduit que

$$H_0(B) = 0$$

et

$$H_1(B) \cong \mathbf{Z}$$

De la même façon la suite

$$\begin{array}{cccccccc} H_2(B,C) & \longrightarrow & H_1(C) & \longrightarrow & H_1(B) & \longrightarrow & H_1(B,C) & \longrightarrow & \cdots \\ & \cdots & H_0(C) & \longrightarrow & H_0(B) & \longrightarrow & H_0(B,C) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est exacte et $H_2(B,C) = 0$ par excision, d'où l'exactitude de

$$0 \longrightarrow H_1(C) \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow H_0(C) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

Enfin on peut voir B comme la réunion des graphes C et C' avec $C \cap C' = T'$. Mais T' n'est autre que le recollement de T avec l'arète uv au sommet v et une application immédiate de Mayer-Vietoris donne

$$H_i(T') \cong H_i(T)$$

D'autre part les hypothèses que nous avons faites sur H entrainent classiquement la propriété de Mayer-Vietoris, et en particulier l'exactitude de la suite

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(T') & \longrightarrow & H_1(C) \oplus H_1(C') & \longrightarrow & H_1(B) & \longrightarrow & \ldots \\ & & & \cdots & H_0(T') & \longrightarrow & H_0(C) \oplus H_0(C') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui devient

$$0 \longrightarrow H_1(C) \oplus H_1(C) \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow H_0(C) \oplus H_0(C) \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

Par (1), il n'y a que deux cas possibles pour $H_1(C)$:

Cas 1. $H_1(C) \cong \mathbf{Z}$. Mais cela entraine par (2) l'exactitude de

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \ldots$$

contradiction.

Cas 2. $H_1(C) = 0$. Par (1), $H_0(C)$ est soit nul, soit de la forme $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ pour un entier $a > 1$. Dans ce dernier cas (2) entraine l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

ce qui est évidemment impossible.

La seule possibilité est donc

$$H_1(C) = H_0(C) = 0$$

et on a montré que $H_i(C) = 0$ pour tout $i \notin \{0, 1\}$. Donc $H_*(C) = 0$. C n'étant pas un réseau, cela termine la preuve. $\diamond$

Remarque. A la lumière de la preuve qui précède, la conjecture suivante nous paraît extrèmement probable, bien que nous ne l'ayons pas formellement établie:

Conjecture: *Toute homologie des graphes appariés qui est nulle sur les réseaux est encore nulle sur les pseudoréseaux.*

CHAPITRE 11

Une interprétation métrique

11.1. Volume d'un module

Les conditions de recollement correct de deux graphes acquièrent un contenu plus intuitif dans l'interprétation métrique que nous allons décrire à présent.
Soient donc M un module de frontière $F = \{s_1, \ldots, s_l\}$ où les s_i sont des sommets de M.
Comme plus haut, m désignera le morphisme d'inclusion de F dans M.
Rappelons qu'en pareil cas $H_0(F) \cong \mathbf{Z}^{l-1}$, et que si $\operatorname{rang} H_0(M) = p$, alors $\ker m_* \cong \mathbf{Z}^r$ avec $r = l - 1 - p$.
Si nous regardons maintenant $A = (s_1, \ldots, s_l)$ comme la base canonique de l'espace $E = \mathbf{R}^l$, $H_0(F)$ devient naturellement un sous groupe discret de l'hyperplan

$$L : \quad x_1 + \cdots + x_l = 0$$

engendré, par exemple, par les $e_i = s_i - s_l$ pour $i \in \{1, \ldots, l-1\}$.
E étant muni de son produit scalaire canonique $\langle , \rangle$, la notion de *volume* d'une famille de vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ est parfaitement définie: on notera $\|v_1, \ldots, v_p\|$ le volume de cette famille (cf. [GL, p.221], [Ber, p.62]). Remarquons en particulier que si $(m_1, \ldots, m_r)$ est une $\mathbf{Z}$-base de $\ker m_*$, le volume $\|m_1, \ldots, m_r\|$ ne dépend que de M et F et non du choix de cette base, ce qui nous autorise à poser la

Définition 11.1.1. *Soit M un module de frontière F et $m : F \longrightarrow M$ l'application canonique.*
Le volume *de M, noté $\|M\|$ est le volume d'une Z-base quelconque de* $\ker m_*$.

Lemme 11.1.2. $\|e_1, \ldots, e_{l-1}\| = \sqrt{l}$

Preuve. Avec les notations précédentes, on pose $s = s_1 + \cdots + s_l$.

Comme s est orthogonal à L,

$$\begin{aligned}\|e_1,\ldots,e_{l-1}\| \times \|s\| &= \|e_1,\ldots,e_{l-1},s\| \\ &= |\det{}_A(e_1,\ldots,e_{l-1},s)|\end{aligned}$$

Ce dernier déterminant vaut immédiatement

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l \end{vmatrix} = l$$

et $\|s\| = \sqrt{l}$ ce qui entraine le résultat. ◇

▷ Exemple. Calculons $\|M\|$ pour le graphe (en fait le gf) ci-dessous

figure 11.1.1

$F = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $e_i = s_4 - s_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $\alpha = \{u - s_1\}_M$.
$H_0(F) = \mathbf{Z}e_1 + \mathbf{Z}e_2 + \mathbf{Z}e_3$ et $H_0(M) = \mathbf{Z}\alpha$. $m_* : H_0(F) \longrightarrow H_0(M)$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} m_*(e_1) &= \alpha \\ m_*(e_2) &= -\alpha \\ m_*(e_3) &= 0 \end{aligned}$$

de sorte que $xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \ker m_*$ si et seulement si $(x-y)\alpha = 0$ c'est-à-dire $y = x$. Les vecteurs $m_1 = 2s_4 - s_1 - s_2$ et $m_2 = s_4 - s_3$ constituent facilement une $\mathbf{Z}$-base de $\ker m_*$, d'où

$$\|M\|^2 = \begin{vmatrix} \langle m_1, m_1\rangle & \langle m_1, m_2\rangle \\ \langle m_2, m_1\rangle & \langle m_2, m_2\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

et enfin $\|M\| = 2\sqrt{2}$.

$\triangleleft$

Soient alors M_1 et M_2 deux modules de frontière commune $F = \{s_1, \dots, s_l\}$ avec $m^i : F \longrightarrow M_i$ l'application canonique. On pose $p_i = \pi_{M_i}$ et $d_i = \mathrm{card}(H_0(M_i, F))$. D'après (8.1.3) la condition de recollement correct de M_1 et M_2 s'écrit

$$[H_0(F) : \ker m^1_* \oplus \ker m^2_*] = \frac{2^{p_1+p_2}}{d_1 d_2} \tag{1}$$

Mais si $(m^1_1, \dots, m^1_{r_1})$ et $(m^2_1, \dots, m^2_{r_2})$ sont des $\mathbf{Z}$-bases respectives de $\ker m^1_*$ et $\ker m^2_*$ et $B = e_1, \dots, e_{l-1}$ est la base de $H_0(F)$ évoquée plus haut, on a $r_1 + r_2 = l - 1$ et le membre de gauche de (1) n'est autre que

$$\left|\det{}_B(m^1_1, \dots, m^1_{r_1}, m^2_1, \dots, m^2_{r_2})\right| = \frac{\|m^1_1, \dots, m^1_{r_1}, m^2_1, \dots, m^2_{r_2}\|}{\|B\|}$$

ce qui permet, d'après (11.1.2) d'exprimer (1) sous la forme

$$\|m^1_1, \dots, m^1_{r_1}, m^2_1, \dots, m^2_{r_2}\| = \frac{2^{p_1+p_2}\sqrt{l}}{d_1 d_2} \tag{2}$$

Vérifions enfin que le volume $\|m^1_1, \dots, m^1_{r_1}, m^2_1, \dots, m^2_{r_2}\|$ peut s'écrire sous la forme

$$a\|M_1\|\|M_2\|$$

où le coefficient a ne dépend que du couple des sous-espaces vectoriels X_1 et X_2 engendrés respectivement dans L par $\ker m^1_*$ et $\ker m^1_*$.
Soient en effet X un espace euclidien, Y un sous-espace vectoriel et p_Y la projection orthogonale sur Y:

Lemme 11.1.3. *Si Y et Z sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension de l'espace euclidien X et $(y_1, \dots, y_k)$ est une base de Y, alors le réel*

$$a = \frac{\|\mathrm{p}_Z(y_1), \dots, \mathrm{p}_Z(y_k)\|}{\|y_1, \dots, y_k\|}$$

est indépendant de la base choisie, et peut donc se noter $\mathrm{a}(Y, Z)$.
De plus $\mathrm{a}(Y, Z) = \mathrm{a}(Z, Y)$.

Preuve. Pour la première assertion, considérons deux bases $(y_1, \dots, y_k)$ et $(y'_1, \dots, y'_k)$ de Y. Il existe une matrice régulière $A = [\alpha^j_i]$ telle que

$$y'_i = \sum_{j=1}^{j=k} \alpha^j_i y_j$$

qui entraine tout d'abord

$$\|y'_1, \dots, y'_k\| = |\det(A)|\, \|y_1, \dots, y_k\|$$

et ensuite

$$\mathrm{p}_Z(y'_i) = \sum_{j=1}^{j=k} \alpha_i^j \mathrm{p}_Z(y_j)$$

donc aussi

$$\|\mathrm{p}_Z(y'_1), \dots, \mathrm{p}_Z(y'_k)\| = |\det(A)|\, \|\mathrm{p}_Z(y_1), \dots, \mathrm{p}_Z(y_k)\|$$

ce qui donne le résultat.
Pour la seconde assertion, soient σ une symétrie orthogonale de X —nous laissons au lecteur le soin de prouver qu'il en existe au moins une— qui échange Y et Z, et $(z_1, \dots, z_k)$ une base de Z.
Si $y_i = \sigma(z_i)$, les y_i forment une base de Y. D'autre part $\mathrm{p}_Y = \mathrm{p}_{\sigma Z} = \sigma \mathrm{p}_Y \sigma$ de sorte que

$$\mathrm{a}(Z, Y) = \frac{\|\mathrm{p}_Y(z_1), \dots, \mathrm{p}_Y(z_k)\|}{\|z_1, \dots, z_k\|} = \frac{\|\sigma \mathrm{p}_Z(y_1), \dots, \sigma \mathrm{p}_Z(y_k)\|}{\|\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_k)\|}$$

et comme σ conserve les volumes, $\mathrm{a}(Z, Y) = \mathrm{a}(Y, Z)$. ◇

Enfin, si X_i est le sous-espace de L engendré par $\ker m_*^i$,

$$\begin{aligned}\|m_1^1, \dots, m_{r_1}^1, m_1^2, \dots, m_{r_2}^2\| &= \|\mathrm{p}_{X_2^\perp}(m_1^1), \dots, \mathrm{p}_{X_2^\perp}(m_{r_1}^1), m_1^2, \dots, m_{r_2}^2\| \\ &= \mathrm{a}(X_1, X_2^\perp)\|M_1\|\|M_2\|\end{aligned}$$

On peut donc enfin réécrire (2) sous la forme

$$\mathrm{a}(X_1, X_2^\perp)\|M_1\|\|M_2\| = \frac{2^{p_1+p_2}\sqrt{l}}{d_1 d_2} \tag{3}$$

Remarquons que par symétrie $\mathrm{a}(X_1, X_2^\perp) = \mathrm{a}(X_2, X_1^\perp)$.

11.2. Cas particulier des formules

M étant un gf de taille l, on le considère naturellement comme un module de frontière $F = F_l$. Rappelons que dans ce cas $H_0(M) = \mathbf{Z}^{\pi_M}$ et $\mathrm{card}(H_0(M, F))$ est de la forme 2^h, avec $h \leq \pi_M$.

Etablissons tout d'abord un petit résultat qui simplifie le calcul du volume:

Lemme 11.2.1. *Si M' et M'' sont deux gf,* $\|M'\wp M''\| = \|M'\|\|M''\|$.

Preuve. Soient M' et M'' deux gf de taille l' et l'' respectivement, et $M = M'\wp M''$. Si F (F', F'') est la frontière de M (M', M''), $F = F' \coprod F''$. r, r', et r'' seront les racines respectives de ces gf et m (m', m'') l'inclusion de F dans M (F' dans M', F'' dans M'').
On pose enfin $\alpha = \{r - r'\}_M = -\{r - r''\}_M$. Remarquons que

$$H_0(M) = H_0(M') \oplus H_0(M'') \oplus \mathbf{Z}\alpha$$

et de même

$$H_0(F) = H_0(F') \oplus H_0(F'') \oplus \mathbf{Z}f$$

où $f = \{s'' - s'\}_F$ avec s' (s'') un sommet de F' (F'').
Soit alors $x = y' + y'' + \lambda f \in H_0(F)$ avec $y' \in H_0(F')$ et $y'' \in H_0(F'')$,

$$m_*(x) = m'_*(y') + m''_*(y'') + \lambda u + 2\lambda\alpha$$

où $u \in H_0(M') \oplus H_0(M'')$.
Par conséquent $x \in \ker m_*$ si et seulement si $\lambda = 0$ et $m'_*(y') = 0$ et $m''_*(y'') = 0$, autrement dit

$$\ker m_* = \ker m'_* \oplus \ker m''_*$$

Une $\mathbf{Z}$-base B de $\ker m_*$ s'obtient donc en juxtaposant une base B' de $\ker m'_*$ et une base B'' de $\ker m''_*$ et comme ces derniers groupes sont orthogonaux, $\|B\| = \|B'\|\|B''\|$, ce qui montre le résultat. $\diamond$

Appliquons alors les résultats de la section précédente pour $M_1 = M$ un gf de taille $l = 2k$ et $M_2 = N_k = N$ le graphe à k axiomes. Avec les notations de (3), $p_1 = \pi_M$ (et on peut se limiter à $p_1 = k$ par (8.2.3)), $p_2 = 0$, $d_1 = 2^h$ et $d_2 = 1$. On note également $m = m_1$ et $n = m_2$ les inclusions.
Les arètes de N_k étant de la forme $s'_{2i-1}s'_{2i}$, où $i \in \{1, k\}$, on voit immédiatement que les $n_i = \{s'_{2i} - s'_{2i-1}\}_F$ constituent une $\mathbf{Z}$-base *orthogonale* de $\ker n_*$, dont le volume est

$$\|n_1, \ldots, n_k\| = \|n_1\| \cdots \|n_k\| = (\sqrt{2})^k$$

d'où $\|N\| = (\sqrt{2})^k$.
La condition de recollement correct s'écrit alors

$$\mathrm{a}(X_1, X_2^\perp)\|M\| = (\sqrt{2})^{k-2h+1}\sqrt{k} \tag{4}$$

Toute majoration $\mathrm{a}(X_1, X_2^\perp) \leq A$ indépendante de la façon de recoller les axiomes fournit donc une condition nécessaire de prouvabilité de M sous la forme

$$\|M\| \geq \frac{(\sqrt{2})^{k-2h+1}\sqrt{k}}{A} \tag{5}$$

Notons tout de suite que la majoration triviale par $A = 1$ a peu d'intéret: (5) est trop facilement vérifiée pour cette valeur.
Voici donc un exemple plus instructif:

▷ Exemple. Considérons la prouvabilité des formules de $\mathrm{L}(a)$ qui sont de la forme $\Phi' \wp \Phi''$ où Φ' (resp. Φ'') possède k atomes, tous de type a (resp. $a^\perp$).
Si M' et M'' sont les gf associés à Φ' et Φ'', cela revient à recoller correctement $N = N_k$ avec $M = M' \wp M''$ avec la contrainte supplémentaire que chaque arête de N ait exactement un sommet dans F' et un sommet dans F''.
Les k vecteurs $s'' - s'$ pour lesquels $s's''$ est une arête de N forment une base orthogonale C du sous-espace Y engendré par $\ker n_*$.
Soit alors x' un vecteur du sous-espace X' engendré par $\ker m'_*$,

$$x' = \sum_{s' \in F'} \alpha(s') s'$$

d'où

$$\mathrm{p}_Y(x') = \sum_{s' \in F'} \alpha(s') \frac{\langle s', y_{s'} \rangle}{\langle y_{s'}, y_{s'} \rangle} y_{s'}$$

$y_{s'}$ étant l'unique vecteur de C de la forme $s'' - s'$. Comme $\langle s', y_{s'} \rangle = -1$ et $\langle y_{s'}, y_{s'} \rangle = 2$,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{p}_Y(x')\|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s' \in F'} \alpha(s')^2 \\ &= \frac{1}{2} \|x'\|^2 \end{aligned}$$

et par conséquent aussi

$$\|\mathrm{p}_{Y^\perp}(x')\|^2 = \frac{1}{2} \|x'\|^2$$

et enfin $\|\mathrm{p}_{Y^\perp}(x')\| / \|x'\| = 1/\sqrt{2}$.
Il en est évidemment de même pour un vecteur x'' du sous-espace X'' engendré par $\ker m''_*$.
Or d'après la preuve de (11.2.1) on peut former une base orthogonale de X, le sous-espace engendré par $\ker m_*$, avec une base orthogonale de X' et une de X''.
Si $x_1, \ldots, x_{k-1}$ est une telle base,

figure 11.2.1

$$\frac{\|\mathrm{p}_{Y^\perp}(x_1),\ldots,\mathrm{p}_{Y^\perp}(x_{k-1})\|}{\|x_1,\ldots,x_{k-1}\|} = \frac{\|\mathrm{p}_{Y^\perp}(x_1),\ldots,\mathrm{p}_{Y^\perp}(x_{k-1})\|}{\|x_1\|\cdots\|x_{k-1}\|}$$
$$\leq \frac{\|\mathrm{p}_{Y^\perp}(x_1)\|\cdots\|\mathrm{p}_{Y^\perp}(x_{k-1})\|}{\|x_1\|\cdots\|x_{k-1}\|}$$

ce qui entraine

$$\mathrm{a}(X,Y^\perp) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}$$

et donne enfin comme condition nécessaire de prouvabilité l'inégalité suivante:

$$\|M\| \geq 2^{k-h}\sqrt{k}$$

Vérifions par ce moyen que la formule

$$(((a\wp(a\otimes a))\otimes a)\wp(a\otimes a))\wp(((a^\perp\wp a^\perp)\wp(a^\perp\wp a^\perp))\otimes(a^\perp\otimes a^\perp))$$

n'est pas démontrable. M étant le gf associé on calcule aisément $k=6$ et $h=2$ c'est-à-dire

$$2^{k-h}\sqrt{k} = 16\sqrt{6}$$

D'autre part $M = M'\wp M''$, (figure 11.2.1).
On calcule une base de $\ker m'_*$, par exemple $(2s'_4 - s'_1 - s'_3, s'_3 - s'_2, s'_5 - s'_6)$ ainsi qu'une base de $\ker m''_*$ par exemple $(4s''_6 - s''_1 - s''_2 - s''_3 - s''_4, s''_6 - s''_5)$ ce qui nous donne

$$\|M'\|^2 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 22$$

et

$$\|M''\|^2 = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 24$$

figure 11.2.2

On en déduit par (11.2.1) que $\|M\| = \|M'\|\|M''\| = 4\sqrt{33}$ d'où $\|M\| < 16\sqrt{6}$, et le résultat annoncé.

$\triangleleft$

11.3. Un problème d'optimisation

Terminons par une remarque sur la recherche d'une preuve éventuelle d'un gf M de taille $2k$, de frontière F et vérifiant $\tau_M = 2\pi_M$.
Dans le sous-espace euclidien L où nous nous sommes placés, M définit un sous-espace

$$X = \ker m_*$$

et toute partition p des sommets de F en paires définit un recollement

$$n^p : F \longrightarrow N_k$$

et par conséquent un sous-espace $Y^p = \ker n^p_*$ de L. Une partition qui induit un recollement correct *maximise* alors $\mathrm{a}(X^\perp, Y^p)$ sur l'ensemble de toutes les partitions possibles. Savoir si un gf est prouvable revient donc à vérifier si

$$\max_p \mathrm{a}(X^\perp, Y^p)$$

prend bien la valeur prescrite par $\|M\|$.

Or, dans notre représentation, le groupe S_{2k} des permutations des sommets de F n'est autre que le sous-groupe A_{2k-1} (cf [Hum, p.5]) des isométries de L engendré par les réflexions associées aux transpositions des sommets: ce groupe agit transitivement sur l'ensemble des sous-espaces Y^p ci-dessus. Si nous fixons arbitrairement un $Y_0 = Y^p$ nous sommes ainsi ramenés à optimiser

$$g \mapsto \mathrm{a}(X^\perp, gY_0)$$

sur A_{2k-1}. Peut-on en particulier trouver un système de générateurs assez petit, mais permettant néanmoins d'obtenir le maximum cherché par approximations successives?

BIBLIOGRAPHIE

[Ber] M.Berger *Géométrie, vol.2.* Cedic/Nathan 1977.

[Bol] B.Bollobás *Graph Theory.* Springer 1979.

[Dan] V.Danos *La Logique Linéaire appliquée à l'étude de certains processus de normalisation.* Thèse de Doctorat, Université Paris VII, 1990.

[DR] V.Danos et L.Régnier *The structure of multiplicatives.* Arch.Math.Logic 28, 1990.

[Gib] P.J.Giblin *Graphs, Surfaces and Homology.* Chapman & Hall, 1981.

[Gir1] J.Y.Girard *Linear Logic.* Theor.Comput.Sci.50, 1987.

[Gir2] J.Y.Girard *Quantifiers in Linear Logic II.* Prépublications Université Paris VII 19, 1991.

[GL] I.Glazman et Y.Liubitch *Analyse linéaire dans les espaces de dimension finie.* Mir, 1974.

[Hal] P.J.Hall *Combinatorial Theory.* .

[Hum] J.E.Humphreys *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge, 1990.

[LW] P.Lincoln et T.Winkler *Constant only Multiplicative Linear Logic is NP-complete.* 1992.

[Mét] F.Métayer *Homology of proof-nets.* à paraître dans Arch.Math.Logic, 1994.

[Mun] J.R.Munkres *Elements of Algebraic Topology.* Addison-Wesley, 1984.

[Ret] C.Retoré *Réseaux et Séquents ordonnés.* Thèse de Doctorat, Université Paris VII, 1993.

[Tro] A.S.Troelstra *Lectures on linear logic.* CSLI, 1992.

TABLE DES MATIÈRES