Réseaux de preuve polarisés : des réseaux pour LC

D.E.A. de Logique et Fondements de l'Informatique – Paris VII

Olivier LAURENT

sous la direction de Laurent REGNIER

Institut de Mathématiques de Luminy

CNRS – MARSEILLE

28 septembre 1998

Sometimes voices just switch
But sometimes voices slice...

Introduction

L'élimination des coupures dans les calculs des séquents est toujours compliquée par de nombreux problèmes de commutations de règles. C'est entre autres choses pour résoudre ce genre de problèmes qu'ont été introduits les réseaux de preuve (voir [7] par exemple).

Ainsi, dans son article [4], Jean-Yves Girard énonce différents problèmes ouverts concernant la syntaxe de **LC** parmi lesquels :

Trouver une meilleure syntaxe (qui serait à **LC** *ce que le λ-calcul typé est à* **LJ***) pour la normalisation [...] Des réseaux de preuve pourraient être la solution, l'absence de réseaux pour la logique linéaire complète pouvant être compensée par le fait que seules certaines configurations linéaires sont utilisées.*

Les réseaux pour la logique linéaire complète existent désormais (voir [7]) et peuvent donc fournir des réseaux pour **LC** à travers une traduction de **LC** dans un fragment de **LL** utilisant la polarisation. Par ailleurs, la particularité des configurations rencontrées permet d'obtenir un critère de correction spécifique à ces réseaux polarisés et d'une complexité moindre que celle du critère général.

1 Logique Classique : LC

Le système **LC** introduit par Jean-Yves Girard dans [4] est un raffinement du calcul des séquents **LK** de Gentzen qui admet une élimination des coupures déterministe et une sémantique dénotationnelle par l'utilisation d'une contrainte de polarisation sur les formules comblant ainsi des défauts importants de **LK**.

Cette section provient très directement de [4] dont nous rappelons les ingrédients syntaxiques essentiels.

1.1 Formules et polarité

Les formules de **LC** sont construites à partir d'atomes et des constantes V et F à l'aide des connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$ et $\forall$.

A chaque formule est associée une *polarité* : les atomes, V et F sont positives et les polarités des autres formules sont données par le tableau suivant :

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$\exists x A$	$\forall x A$
$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$-$			
$-$	$-$	$-$	$-$			

On notera P ou Q les formules positives et N ou M les formules négatives.

1.2 Règles du calcul

Pour éviter une explosion du nombre de règles, on quotiente l'ensemble des formules par les lois de De Morgan et on utilise des séquents monolatères.

Les séquents de **LC** sont de la forme $\vdash \Gamma; \Pi$ où Γ (le corps) est un multi-ensemble de formules et Π (le bénitier) est soit vide soit composé d'une unique formule positive.

Le calcul **LC** est définit par les règles suivantes :

$$\frac{}{\vdash \neg P; P}$$

$$\frac{\vdash \Gamma; P \quad \vdash \neg P, \Delta; \Pi}{\vdash \Gamma, \Delta; \Pi} \qquad \frac{\vdash \Gamma, N; \quad \vdash \neg N, \Delta; \Pi}{\vdash \Gamma, \Delta; \Pi}$$

$$\frac{\vdash \Gamma; P}{\vdash \Gamma, P;} \qquad \frac{\vdash \Gamma; \Pi}{\vdash \Gamma, A; \Pi} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, A; \Pi}{\vdash \Gamma, A; \Pi}$$

$$\frac{}{\vdash; V} \qquad \frac{}{\vdash \Gamma, \neg F; \Pi}$$

$$\frac{\vdash \Gamma; P \quad \vdash \Delta; Q}{\vdash \Gamma, \Delta; P \wedge Q} \qquad \frac{\vdash \Gamma; P \quad \vdash \Delta, N;}{\vdash \Gamma, \Delta; P \wedge N} \qquad \frac{\vdash \Gamma, M; \quad \vdash \Delta; Q}{\vdash \Gamma, \Delta; M \wedge Q} \qquad \frac{\vdash \Gamma, M; \Pi \quad \vdash \Gamma, N; \Pi}{\vdash \Gamma, M \wedge N; \Pi}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B; \Pi}{\vdash \Gamma, A \vee B; \Pi} A \vee B \text{ } \textit{négative} \qquad \frac{\vdash \Gamma; P}{\vdash \Gamma; P \vee Q} \qquad \frac{\vdash \Gamma; Q}{\vdash \Gamma; P \vee Q}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A; \Pi}{\vdash \Gamma, \forall x A; \Pi} x \notin \Gamma, \Pi \qquad \frac{\vdash \Gamma, N[{}^t/_x];}{\vdash \Gamma; \exists x N} \qquad \frac{\vdash \Gamma; P[{}^t/_x]}{\vdash \Gamma; \exists x P}$$

La polarisation permet ainsi de supprimer les symétries qui donnaient lieu au non déterminisme de **LK** (paire critique de Lafont, ...).

2 Logique Linéaire Polarisée

L'interprétation sémantique de **LC** décrite dans [4] donne le schéma d'une traduction vers un fragment de **LL** utilisant une contrainte de polarisation sur les formules. Nous allons tout d'abord décrire ce fragment indépendamment de **LC**.

2.1 Polarité dans LL

On définit une polarisation des formules de **LL** qui consiste à séparer en connecteurs avec règles réversibles (*connecteurs négatifs*) et avec règles non réversibles (*connecteurs positifs*).

Définition 1 (Formule polarisée) *On considère un ensemble d'atomes (notés A, B) à partir desquels on définit simultanément les* formules positives *(notées P, Q) et* négatives *(notées M, N) :*

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} P ::= & !A & | & P \otimes P & | & P \oplus P & | & \exists x P & | & 1 & | & 0 & | & !N \\ N ::= & ?A^{\perp} & | & N \parr N & | & N \,\&\, N & | & \forall x N & | & \perp & | & \top & | & ?P \end{array}$$

Une formule polarisée *est soit une formule positive soit une formule négative.*

Une seconde notion de polarisation plus stricte qui correspond très directement à celle de **LC** peut également être définie.

Définition 2 (Formule strictement polarisée) *On considère un ensemble d'atomes (notés A, B) à partir desquels on définit simultanément les* formules strictement positives *(notées $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$) et* strictement négatives *(notées $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$) :*

$$\begin{array}{lllllllllllllllllll} \mathcal{P} ::= & !A & \mid & \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} & \mid & \mathcal{P} \otimes !\mathcal{N} & \mid & !\mathcal{N} \otimes \mathcal{P} & \mid & \mathcal{P} \oplus \mathcal{P} & \mid & \exists x \mathcal{P} & \mid & \exists x !\mathcal{N} & \mid & 1 & \mid & 0 \\ \mathcal{N} ::= & ?A^{\perp} & \mid & \mathcal{N} \parr \mathcal{N} & \mid & \mathcal{N} \parr ?\mathcal{P} & \mid & ?\mathcal{P} \parr \mathcal{N} & \mid & \mathcal{N} \,\&\, \mathcal{N} & \mid & \forall x \mathcal{N} & \mid & \forall x ?\mathcal{P} & \mid & \perp & \mid & \top \end{array}$$

Une formule strictement polarisée *est une formule de la forme : $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$ ou $?\mathcal{P}$ ou $!\mathcal{N}$.*

Remarque : Les formules strictement polarisées sont polarisées et vérifient les propriétés suivantes :

- F est strictement positive ***ssi*** $F^{\perp}$ est strictement négative.
- F est positive ***ssi*** $F^{\perp}$ est négative.

2.2 LLP

Définition 3 (LLP et LLP$_{\mathbf{C}}$) *En imposant dans les règles de* **LL** *que toutes les formules soient polarisées (resp. strictement polarisées) et que la règle de $\top$ introduise au plus une formule positive on obtient le fragment* **LLP** *(resp.* **LLP**$_C$*).*

LLP$_{\mathrm{C}}$ est le fragment de **LLP** pour lequel les contraintes de polarisation correspondent à celles de **LC** à travers la définition de formule strictement polarisée. Tous les résultats que l'on obtiendra sur **LLP** pourront donc s'appliquer à **LLP**$_{\mathrm{C}}$ en particulier tout ce qui concerne les réseaux polarisés.

La contrainte sur la règle $\top$ est nécessaire pour tout ce que nous ferons par la suite et entre autres choses pour pouvoir définir une traduction de **LLP**$_{\mathrm{C}}$ dans **LC** car elle est la clef de la proposition suivante.

Proposition 1 *Un séquent prouvable dans* **LLP** *contient au plus une formule positive.*

Démonstration : Immédiat par induction sur la structure de la preuve dans **LLP**. □

3 Traductions entre LC et LLP$_{\mathbf{C}}$

On va désormais montrer que **LC** et **LLP**$_{\mathrm{C}}$ sont presque des systèmes identiques. Pour être plus précis, **LLP**$_{\mathrm{C}}$ correspond au fragment **LC**$^{\mathrm{rev}}$ de **LC** dans lequel on impose la commutation des règles réversibles avec certaines règles structurelles.

Définition 4 **LC**^{rev} *est le fragment de* **LC** *interdisant :*

- *les règles structurelles sur les formules négatives non atomiques ;*
- *les formules négatives non atomiques dans le contexte du séquent de la prémisse négative :*
  - *de la coupure négative,*
  - *du $\otimes$ entre une formule négative et une formule positive,*
  - *du $\exists$ sur une formule négative.*

Toute preuve de **LC** peut être aisément transformée en une preuve de $\mathbf{LC}^{\mathrm{rev}}$ en faisant commuter les règles réversibles avec les règles structurelles effectuées ensuite sur les formules qu'elles ont introduites. Ceci est rendu possible par définition même des règles réversibles. On ne perd donc pas de pouvoir de prouvabilité en se restreignant à $\mathbf{LC}^{\mathrm{rev}}$.

Ce problème de renversement de preuves (règles réversibles le plus tard possible) pour obtenir des traductions de logique classique en logique linéaire a déjà été étudié plus précisément dans un cas extrêmement similaire par M. Quatrini et L. Tortora de Falco dans [9] où ils analysent le système $\mathbf{LK}^{\eta,\rho}_{\mathrm{pol}}$ correspondant fortement à $\mathbf{LC}^{\mathrm{rev}}$ ainsi que la traduction de $\mathbf{LK}^{\eta,\rho}_{\mathrm{pol}}$ dans **LL** et ses conséquences en sémantique dénotationnelle.

3.1 $\mathbf{LC}^{\mathrm{rev}} \to \mathbf{LLP_C}$

Définition 5 *La traduction $G \mapsto G^\bullet$ de $\mathbf{LC}^{rev}$ dans $\mathbf{LLP}_C$ est donnée sur les formules par :*

$$
\begin{array}{ccc@{\qquad\qquad}ccc}
A^\bullet & = & !A & (\neg P)^\bullet & = & P^{\bullet\perp} \\
V^\bullet & = & 1 & F^\bullet & = & 0 \\
(P \wedge Q)^\bullet & = & P^\bullet \otimes Q^\bullet & (N \wedge M)^\bullet & = & N^\bullet \,\&\, M^\bullet \\
(P \wedge N)^\bullet & = & P^\bullet \otimes !N^\bullet & (N \wedge P)^\bullet & = & !N^\bullet \otimes P^\bullet \\
(\exists x P)^\bullet & = & \exists x P^\bullet & (\exists x N)^\bullet & = & \exists x !N^\bullet
\end{array}
$$

et donne bien des formules strictement polarisées. Les traductions des autres connecteurs se déduisent de celles-ci grâce aux lois de De Morgan.

Dans un séquent de **LC**, *on peut partitionner le corps entre formules positives et formules négative :* $\vdash \Gamma; \Pi = \vdash \Gamma^-, \Gamma^+; \Pi$, *on définit alors la traduction des séquents par :*

$$(\vdash \Gamma^-, \Gamma^+; \Pi)^\bullet = \vdash \Gamma^{-\bullet}, ?(\Gamma^+)^\bullet, \Pi^\bullet$$

Les preuves sont traduites règle par règle en ajoutant des promotions du côté de la prémisse négative pour la coupure négative, le $\wedge$ entre une formule négative et une formule positive et le $\exists$ pour une formule négative. Dans le cas de la règle de coupure négative par exemple :

$$
\frac{\vdash \Gamma^-, \Gamma^+, N; \quad \vdash \neg N, \Delta^-, \Delta^+; \Pi}{\vdash \Gamma^-, \Delta^-, \Gamma^+, \Delta^+; \Pi}
\quad\to\quad
\frac{\dfrac{\vdash \Gamma^{-\bullet}, ?(\Gamma^+)^\bullet, N^\bullet}{\vdash \Gamma^{-\bullet}, ?(\Gamma^+)^\bullet, !N^\bullet} \quad \vdash ?(\neg N)^\bullet, \Delta^{-\bullet}, ?(\Delta^+)^\bullet, \Pi^\bullet}{\vdash \Gamma^{-\bullet}, \Delta^{-\bullet}, ?(\Gamma^+)^\bullet, ?(\Delta^+)^\bullet, \Pi^\bullet}
$$

Remarque : La contrainte de bénitier vide pour ces règles ajoutée au contraintes de $\mathbf{LC}^{\mathrm{rev}}$ garantit un contexte $?\Gamma$ dans les promotions.

Une preuve de **LC** autorise les contractions et les affaiblissements sur des formules quelconques en particulier sur des formules négatives non atomiques qui ne sont pas traduites par des formules $?G$ de **LL**.

Les contraintes de $\mathbf{LC}^{\mathrm{rev}}$ résolvent ce problème, cependant une autre solution est également possible : traduire toutes les preuves de **LC** mais en introduisant des coupures lors de la traduction de ces règles structurelles sur les formules négatives, ces règles sont en effet admissibles dans **LL** et correspondent aux isomorphismes linéaires de Danos-Joinet-Schellinx (voir [1]).

3.2 $\mathbf{LLP_C} \to \mathbf{LC}^{\mathbf{rev}}$

Définition 6 *La traduction $G \mapsto G^*$ de $\mathbf{LLP}_C$ dans $\mathbf{LC}^{rev}$ est donnée sur les formules strictement polarisées par :*

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
(!A)^* & = & A & (!\mathcal{N})^* & = & \mathcal{N}^* \\
1^* & = & V & 0^* & = & F \\
(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})^* & = & \mathcal{P}^* \wedge \mathcal{Q}^* & (\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})^* & = & \mathcal{P}^* \vee \mathcal{Q}^* \\
(\mathcal{P} \otimes !\mathcal{N})^* & = & \mathcal{P}^* \wedge \mathcal{N}^* & (!\mathcal{N} \otimes \mathcal{P})^* & = & \mathcal{N}^* \wedge \mathcal{P}^* \\
(\exists x \mathcal{P})^* & = & \exists x \mathcal{P}^* & (\exists x !\mathcal{N})^* & = & \exists x \mathcal{N}^*
\end{array}$$

$$(\mathcal{P}^\perp)^* = \neg \mathcal{P}^*$$

Proposition 2 *La traduction des formules vérifie les propriétés élémentaires suivantes :*

- *si G est strictement positive, G^* est positive*
- *si G est strictement négative, G^* est négative*
- *si G est positive mais pas strictement, G^* est négative*
- *si G est négative mais pas strictement, G^* est positive*

Définition 6 (suite) *D'après la proposition 1, tout séquent $\vdash \Gamma$ de $\mathbf{LLP}_C$ peut s'écrire $\vdash \Gamma', \Pi$ où Π est l'éventuelle unique formule strictement positive de Γ. On définit la traduction des séquents :*

$$(\vdash \Gamma', \Pi)^* = \vdash \Gamma'^*; \Pi^*$$

La traduction des preuves se fait règle par règle de manière évidente grâce à la proposition 2, avec pour seule particularité :

$$\left(\begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \vdash ?\Gamma, \mathcal{N} \\ \hline \vdash ?\Gamma, !\mathcal{N} \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} \pi^* \\ \vdots \\ \vdash \Gamma^*, \mathcal{N}^*; \end{array}$$

Remarque : Ce cas particulier vient du fait qu'une promotion est toujours associée à une autre règle : coupure, $\otimes$ ou $\exists$ et ne nécessite donc pas de traduction propre.

Proposition 3 *π est une preuve de $\vdash \Gamma$ dans $\mathbf{LLP}_C$ **ssi** π^* est une preuve de $(\vdash \Gamma)^*$ dans $\mathbf{LC}^{rev}$.*

Excepté en ce qui concerne des commutations de règles structurelles, les deux traductions $(.)^\bullet$ et $(.)^*$ sont inverses l'une de l'autre ce qui montre bien la similitude de $\mathbf{LC}^{\mathbf{rev}}$ et de $\mathbf{LLP_C}$, on a plus précisément les résultats suivants :

- Si G est une formule de $\mathbf{LC}^{\mathbf{rev}}$, $G^{\bullet *} = G$.
- Si $\mathcal{P}$ est un formule strictement positive de $\mathbf{LLP_C}$, $\mathcal{P}^{*\bullet} = \mathcal{P}$ et $(?\mathcal{P})^{*\bullet} = \mathcal{P}$.
- Si $\mathcal{N}$ est un formule strictement négative de $\mathbf{LLP_C}$, $\mathcal{N}^{*\bullet} = \mathcal{N}$ et $(!\mathcal{N})^{*\bullet} = \mathcal{N}$.
- Pour les séquents : $(\vdash \Gamma; \Pi)^{\bullet *} = \vdash \Gamma; \Pi$ et $(\vdash \Gamma)^{*\bullet} = \vdash \Gamma$.
- Si π est une preuve dans $\mathbf{LC}^{\mathbf{rev}}$, $\pi^{\bullet *} = \pi$.

La réciproque ($\pi^{*\bullet} \stackrel{?}{=} \pi$) est fausse pour les preuves dans la mesure où $\mathbf{LLP}_{\mathrm{C}}$ n'impose pas explicitement qu'une règle ! soit suivie d'une règle coupure, $\otimes$ ou $\exists$ associée ce qui entraîne que l'on peut avoir $\pi^{*\bullet} \neq \pi$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\vdash !A, ?A^\perp}}{\vdash ?!A, ?A^\perp}}{\vdash ?!A, !?A^\perp}}{\vdash ?B^\perp, ?!A, !?A^\perp}}{\vdash ?B^\perp, ?!A, \exists x !?A^\perp} \quad \stackrel{*}{\to} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\vdash \neg A; A}}{\vdash \neg A, A;}}{\vdash \neg B, \neg A, A;}}{\vdash \neg B, A; \exists x \neg A} \quad \stackrel{\bullet}{\to} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\vdash !A, ?A^\perp}}{\vdash ?!A, ?A^\perp}}{\vdash ?B^\perp, ?!A, ?A^\perp}}{\vdash ?B^\perp, ?!A, !?A^\perp}}{\vdash ?B^\perp, ?!A, \exists x !?A^\perp}$$

4 Réseaux de preuve

Les réseaux de preuve ont été introduits dans [3] pour le cas multiplicatif puis complétés dans [5] et [7] à tout **LL**. Il s'agit d'une syntaxe représentant les preuves par des graphes ce qui permet d'oublier de nombreux problèmes de commutation de règles du calcul des séquents et en particulier pour l'élimination des coupures.

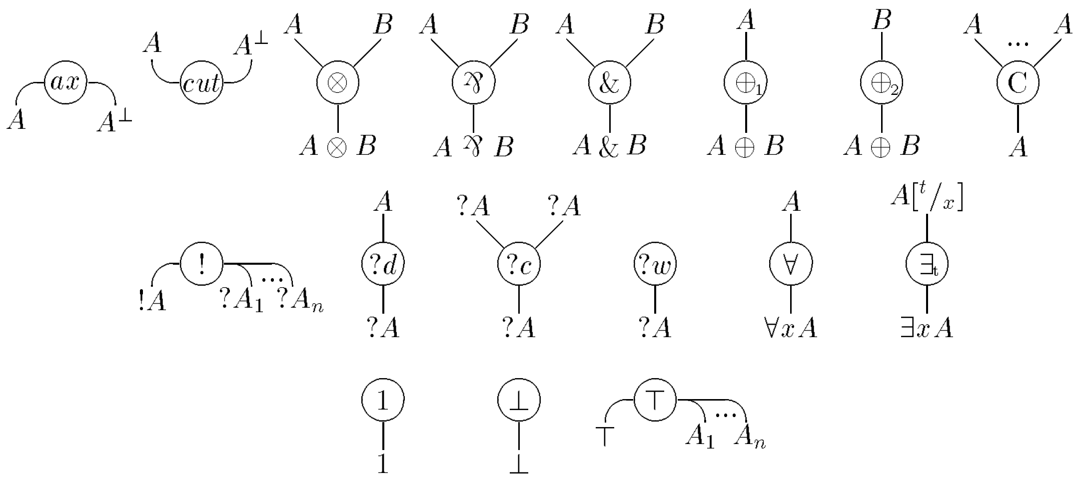
4.1 Définitions

Nous reprenons ici des définitions de [7] quelque peu modifiées parfois.

Poids. Etant donné un ensemble de *poids élémentaires* c'est-à-dire de variables booléennes (notés p, q, ...), un *poids* est un produit (conjonction) de poids élémentaires p et de négations de poids élémentaires $\bar{p}$.

On adopte comme convention que le produit vide vaut 1 et qu'un produit où apparaissent à la fois un poids et sa négation vaut 0. En considérant de plus que $p.p = p$ on obtient une notation “canonique” pour les poids : 0, 1 ou un produit où chaque poids élémentaire apparait au plus une fois soit sous sa forme p soit $\bar{p}$ (si p ou $\bar{p}$ apparait, on dit que le *poids dépend de* p).

Pré-réseau. Un *pré-réseau* est un graphe orienté à arêtes pendantes construit à partir des nœuds (ou *liens*) suivants en associant une formule à chaque arête de manière à respecter les contraintes de typage. L'orientation pour chacune des arêtes est implicitement du haut vers le bas :



Pour éviter toute confusion avec une autre orientation que nous introduirons plus tard sur les réseaux, l'orientation que nous venons de définir sera appelée *orientation géographique* et l'on y fera référence par les termes : haut, bas, dessus, dessous, monter, descendre, *prémisse* d'un nœud (arête descendant sur le nœud), *conclusion* d'un nœud (arête descendant du nœud), ...

Les liens avec une seule prémisse sont appelés *unaires* et ceux avec deux prémisses sont appelés *binaires*. Un lien C doit avoir au moins deux prémisses.

Par ailleurs :

- on se donne pour chaque lien & un poids élémentaire appelé *poids propre*
- on appelle *variable propre* d'un lien $\forall$ la variable sur laquelle il porte
- on se donne pour chaque lien $\perp$ et chaque lien ?w un ensemble non vide de nœuds (qui ne sont pas des *cut*) appelés *sauts du lien*

Les poids propres et les variables propres sont tous distincts.

On associe un poids non nul à chaque nœud avec la contrainte que deux nœuds reliés par une arête doivent avoir même poids excepté pour les arêtes prémisses de nœud & ou contraction additive (nœud C) auquel cas :

- si w est le poids d'un nœud & de poids propre p alors w ne dépend pas de p et les poids des sommets d'où partent les deux prémisses du & doivent être $w.p$ et $w.\bar{p}$
- si $w_1, \ldots, w_n$ sont les poids des sommets d'où partent des arêtes vers un nœud contraction additive donné alors le poids de ce nœud est w avec : $w = w_1 + \ldots + w_n$ et $w_i w_j = 0, \forall i \neq j$.

On définit les notions suivantes :

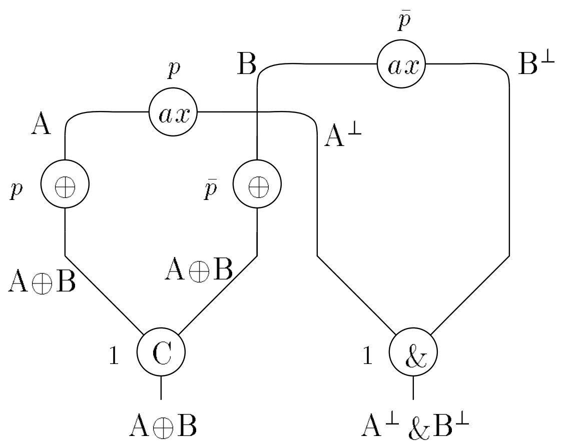
– Un nœud dépend du poids élémentaire p si son poids dépend de p ou si c'est un nœud de contraction additive situé juste sous un nœud dont le poids dépend de p.

– Un nœud dépend d'une variable x si celle-ci est libre dans une de ses conclusions ou bien s'il s'agit d'un nœud $\exists_t$ avec x libre dans t.

Un pré-réseau doit de plus vérifier certaines propriétés complémentaires :

- un *lien conclusion* (c'est-à-dire dont les conclusions sont pendantes et qui n'est pas un lien *cut*) a pour poids 1
- les formules associées aux arêtes pendantes ne contiennent pas de variable propre libre
- si w est le poids d'un nœud & dont le poids propre est p et si w' est un poids apparaissant dans le réseau et dépendant de p alors $w' \leq w$
- si w est le poids d'un nœud $\forall$ dont la variable propre est x et si w' est le poids d'un nœud dépendant de x alors $w' \leq w$
- si w est le poids d'un lien $\perp$ ou ?w et w' celui d'un de ses sauts alors $w \leq w'$

Cette notion permet de recouvrir toute la logique linéaire au prix d'un certaine complication par rapport au cas purement multiplicatif ou multiplicatif et exponentiel. Pour éclaircir un peu cette longue définition, on peut donner l'exemple d'un réseau montrant $A \oplus B \multimap A \oplus B$:



4.2 Séquentialisation et correction

Un élément essentiel de l'étude des réseaux est celui des critères de correction : un pré-réseau est-il une preuve?

Ce qui se dérive plus techniquement en : peut-on séquentialiser un pré-réseau c'est-à-dire le déconstruire inductivement.

Pour les seuls réseaux multiplicatifs de nombreux critères existent parmi lesquels ceux de [3] et [2] qui ont servi de point de départ à celui donné dans [7] pour les réseaux complets et que nous présentons ici.

Définition 7 (Séquentialisation d'un pré-réseau) *La relation* "$\mathcal{R}$ se séquentialise en $\mathcal{E}$ par L"*, où $\mathcal{R}$ est un pré-réseau, $\mathcal{E}$ un ensemble de pré-réseaux et L un nœud conclusion ou cut de $\mathcal{R}$, se définit selon la nature de L :*

ax, !, 1, $\top$: *si $\mathcal{R}$ a pour seul nœud L alors $\mathcal{R}$ se séquentialise en $\emptyset$ par L*

cut, $\otimes$: *si on peut séparer le graphe obtenu en effaçant L dans $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire en effaçant L et toutes les arêtes qui en partent) en deux pré-réseaux $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ alors $\mathcal{R}$ se séquentialise en $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$ par L*

$\parr$, $\oplus_1$, $\oplus_2$, ?d, ?c, ?w, $\forall$, $\exists$, $\bot$: *si en effaçant L dans $\mathcal{R}$ on obtient un pré-réseau alors $\mathcal{R}$ se séquentialise en $\{\mathcal{R}_0\}$ par L*

& : *si p est le poids propre de L et si en attribuant à p les valeurs 0 (resp. 1), en ne conservant que les nœuds dont le nouveau poids est non nul et en identifiant les nœuds C devenus unaires avec le nœud situé au-dessus (et en supprimant l'arête entre les deux) on obtient un pré-réseau $\mathcal{R}_0$ (resp. $\mathcal{R}_1$) alors $\mathcal{R}$ se séquentialise en $\{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1\}$ par L*

C : *un pré-réseau ne se séquentialise jamais par un nœud de contraction additive*

Définition 8 (Pré-réseau séquentialisable) *Un pré-réseau $\mathcal{R}$ est* séquentialisable *s'il existe un nœud L dans $\mathcal{R}$ tel que $\mathcal{R}$ se séquentialise par L en un ensemble de pré-réseaux eux-mêmes séquentialisables ou en l'ensemble vide.*

Définition 9 (Valuation) *Une* valuation *φ sur un pré-réseau $\mathcal{R}$ est une application de l'ensemble des poids propres de $\mathcal{R}$ dans $\{0,1\}$. Toute valuation sur $\mathcal{R}$ est étendue de manière naturelle en une application de l'ensemble des poids de $\mathcal{R}$ dans $\{0,1\}$.*

Définition 10 (Tranche *ou slice***)** *La* tranche *du pré-réseau $\mathcal{R}$ associée à la valuation φ, notée $\varphi(\mathcal{R})$, est le pré-réseau obtenu en ne gardant dans $\mathcal{R}$ que les nœuds de poids w tel que $\varphi(w) = 1$ et les arêtes dont on a conservé le nœud situé au-dessus. De plus on identifie les liens de contraction additive tous devenus unaires au sommet situé au-dessus en supprimant l'arête entre les deux.*

Il faut cependant montrer que la définition d'une tranche donne bien un pré-réseau comme annoncé à ceci près qu'il contient de nouveaux liens : des liens & unaires.

Démonstration : Si un nœud est présent dans une tranche alors toutes ses arêtes aussi excepté les liens & qui perdent tous une prémisse et deviennent unaires (et géométriquement identiques à des $\oplus$). En effet, un nœud ne peut perdre que l'une de ses prémisses et pour cela ce doit être un & ou un C, sinon les nœuds situés au-dessus de ses prémisses ont même poids que lui. Or étant donné un nœud de contraction additive, tous les nœuds situés au-dessus disparaissent sauf un avec lequel il est identifié ne laissant donc que des nœuds corrects.

Un nœud ?w ou $\bot$ qui reste ne perd aucun saut puisque si w est son poids et w' celui d'un de ses sauts, on a $w \leq w'$.

Pour ce qui est des autres contraintes il n'y a pas de problème, tous les poids devenant 1. □

Définition 11 (Basculement *ou switch***)** *Un* basculement $\mathcal{S}$ *d'un pré-réseau* $\mathcal{R}$ *pour une valuation* φ *est un graphe non orienté obtenu à partir de* $\varphi(\mathcal{R})$ *en oubliant l'orientation et en modifiant quelque peu les arêtes :*

- *pour chaque lien* $\parr$ *et* $?c$*, on ne garde qu'une prémisse*
- *pour chaque lien* $\&$*, on supprime la prémisse présente dans* $\varphi(\mathcal{R})$ *et on ajoute une arête, dite* arête de dépendance*, avec un nœud dépendant de son poids propre (ce qui peut revenir à remettre la prémisse)*
- *pour chaque lien* $\forall$*, on supprime la prémisse présente dans* $\varphi(\mathcal{R})$ *et on ajoute une arête, dite* arête de dépendance*, avec un nœud dépendant de sa variable propre (ce qui peut revenir à remettre la prémisse)*
- *pour chaque lien* $?w$ *et* $\perp$*, on ajoute une arête, dite* arête de saut*, entre le lien et un de ses sauts.*

Remarque : Comme dit dans la définition d'une tranche, les nœuds de contraction additive qui ne sont pas effacés à cause de leur poids sont identifiés au nœud du dessus, il n'y a donc pas de nœud de contraction additive dans une tranche et a fortiori dans un basculement.

Définition 12 (Réseau) *Un pré-réseau est un* réseau *si tous ses basculements sont acycliques et connexes.*

Théorème 4 (Séquentialisation – *J.-Y. Girard dans [7]***)** *Un pré-réseau est séquentialisable* ***ssi*** *c'est un réseau.*

5 Réseaux polarisés

Nous allons désormais appliquer cette notion de réseaux au cas particulier de **LLP**. La contrainte de polarisation est suffisament forte pour permettre des simplifications concernant le critère de correction.

Définition 13 (Pré-réseau polarisé) *Un* pré-réseau polarisé *est un pré-réseau dont toutes les formules sont polarisées et dont le lien* $\top$ *n'introduit qu'au plus une formule positive.*

Autrement dit, un pré-réseau polarisé est un pré-réseau typé par **LLP**. Par définition de $\mathbf{LLP}_{\mathrm{C}}$ comme fragment de **LLP**, tous les résultats à venir s'appliqueront également à $\mathbf{LLP}_{\mathrm{C}}$ fournissant un système de réseaux pour **LC** à travers les traductions données à la section 3.

Définition 14 (Arêtes) *Nous ajoutons un peu de terminologie concernant les arêtes :*

- *une arête est dite* positive *(resp.* négative*) si elle est étiquetée par une formule positive (resp. négative)*
- *dans un basculement, une* arête principale *est une arête qui était déjà présente dans le pré-réseau alors que les arêtes de dépendance et les arêtes de saut sont appelées* arêtes de basculement*. De plus, on étend la polarisation et l'orientation géographique aux arêtes de basculement en les considérant négatives et orientées vers le nœud* $\&$*,* $\forall$*,* $?w$ *ou* $\perp$ *auquel elles sont associées.*

On distinguera désormais deux nœuds de contraction additive C^+ et C^- selon qu'ils sont typés par une formule positive ou négative.

Définition 15 (Nœuds positifs et négatifs) *On appellera* nœuds positifs *les nœuds dont toutes les arêtes sont positives à savoir* $\otimes$*,* $\oplus_i$*,* C^+*,* $\exists$*,* 1 *et* nœuds négatifs *ceux dont toutes les arêtes sont négatives c'est-à-dire* $\parr$*,* $\&$*,* C^-*,* $?c$*,* $?w$*,* $\forall$ *et* $\perp$*.*

Basculement faible

Une première idée concernant la correction des réseaux polarisés est de trouver un critère sur les tranches des réseaux sans utiliser les basculements. Plus précisément on se contente de la notion de basculement faible.

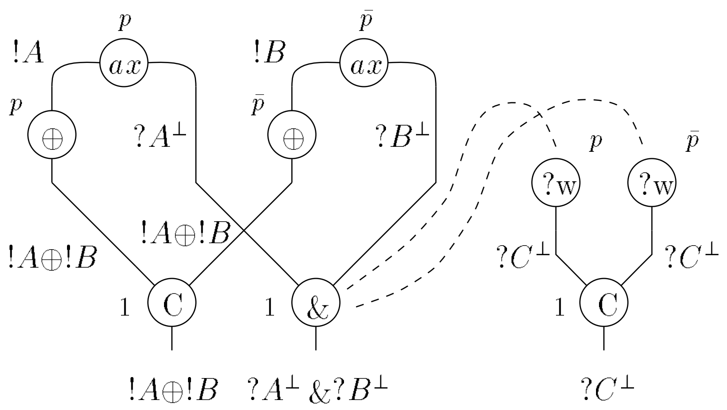
Définition 16 (Basculement faible) *Un* basculement faible *est un basculement qui relie systématiquement les liens* $\forall$ *et* & *à leur prémisse.*

A partir de cela, on peut obtenir divers résultats d'équivalence avec le critère des basculements généraux pour différents fragments de **LLP** que nous ne démontrons pas ici car leurs preuves ont peu d'intérêt.

Définition 17 (Coupure positive) *Une* coupure positive *est une coupure entre une formule strictement positive et une formule strictement négative.*

Proposition 5 *Un pré-réseau polarisé sans coupure positive ni affaiblissement a tous ses basculements faibles acycliques et connexes* ***ssi*** *il a tous ses basculements acycliques et connexes.*

Toutefois ce résultat est assez fragile car il se comporte mal vis-à-vis de l'élimination des coupures et l'apparition d'affaiblissements le rend faux comme on peut le voir sur cet exemple (où les arêtes pointillées représentent les arêtes de saut) :



Remarque : Contrairement à ce que pourrait faire croire ce dessin, l'orientation géographique des arêtes de saut est vers les ?w et donc ces nœuds sont considérés comme au-dessous du &.

Proposition 6 *Un pré-réseau multiplicatif polarisé avec quantificateurs a tous ses basculements acycliques et connexes* ***ssi*** *il a tous ses basculements faibles acycliques et connexes.*

Cette proposition devient fausse avec l'ajout des exponentiels car l'inversion de polarité dans une boîte permet de faire disparaître des variables libres et induit un comportement beaucoup plus complexe.

6 Un critère spécifique

Les résultats et contre-résultats qui précèdent montre que la tentative d'obtenir un critère de correction par basculements faibles pour les réseaux polarisés n'amène pas de solutions satisfaisantes, les choses ne se passant convenablement que pour des fragments très petits de **LLP**.

Toutefois une voie différente apporte de véritables simplifications pour le cas polarisé par rapport au cas général. L'idée essentielle est l'existence d'une orientation dans les réseaux polarisés (comme le montre le lemme 2) qui permet, en parlant d'acyclicité orientée, d'abandonner la notion de basculement et même ensuite de tranche réduisant radicalement la complexité du critère.

Ce type d'idée a déjà été utilisé en particulier par François Lamarche [8] dans le cadre des réseaux pour la logique linéaire intuitionniste où il définit un critère de correction basé sur l'orientation donnée par les polarités à la Danos-Regnier.

On définit désormais une nouvelle orientation sur les pré-réseaux polarisés, l'*orientation de polarisation* (ou *p-orientation*) : les arêtes positives sont orientées vers le haut, les arêtes négatives vers le bas (avec la convention de la définition 14 pour les arêtes de basculement). On y fera référence par les termes : arriver sur, partir de, *arête entrante* ou *sortante*, ...

Lemme 1 *Dans un basculement d'un pré-réseau polarisé, chaque nœud n'a qu'au plus une arête entrante et les nœuds négatifs et positifs exactement une.*

Démonstration : Regardons chaque type de nœud :

- les nœuds $\&$, $\forall$, ?w et $\perp$ sont les seuls à pouvoir avoir une arête de basculement entrante et par définition d'un basculement on garde exactement une arête entrante (soit une prémisse soit une arête de basculement)
- les nœuds $⅋$ et ?c ne peuvent avoir comme arête entrante que leurs prémisses et la définition d'un basculement en conserve exactement une
- les nœuds positifs et *ax*, *cut* et ! n'ont comme arêtes entrantes que des arêtes principales et plus précisément exactement une : leur conclusion positive
- le nœud ?d ne pourrait avoir comme arête entrante qu'un arête principale or sa prémisse est positive et sa conclusion négative, il n'a donc aucune arête entrante
- le nœud $\top$ se comporte comme un ! s'il a une conclusion positive et s'il n'en a pas il n'a que des conclusions négatives et donc pas d'arête entrante

et il n'y a pas de contractions additives dans un basculement. □

Lemme 2 (Lemme d'orientation) *Un chemin sans rebroussement dans un basculement, qui commence selon l'orientation de polarisation, la respecte toujours.*

Démonstration : On prouve le résultat par induction sur la longueur du chemin, le cas de base étant donné par la condition initiale. On suppose que le chemin arrive sur un nouveau nœud, par le lemme 1 ce nœud n'a qu'une arête entrante qui est donc celle par laquelle il est arrivé et puisque le chemin est sans rebroussement il repart par une autre arête qui est sortante. □

Lemme 3 *Un cycle simple non orienté dans un basculement d'un pré-réseau polarisé est un cycle p-orienté.*

Démonstration : Si l'on choisit une arête du cycle sa polarité nous donne le sens avec lequel on peut commencer le parcours de ce cycle et par le lemme 2 la p-orientation est respectée jusqu'au retour au point de départ sans rebroussement puisque le cycle est simple. □

Remarque : Ceci a pour conséquences qu'un cycle simple dans un basculement d'un pré-réseau polarisé ne peut pas passer d'une prémisse d'un lien $\otimes$ à l'autre, ni passer par un lien ?d ou 1.

En particulier, on est amené à donner la définition suivante utilisant fortement l'orientation de polarisation :

Définition 18 (Graphe de correction d'un pré-réseau) *Soit $\mathcal{R}$ un pré-réseau polarisé, le* graphe de correction *de $\mathcal{R}$ est obtenu à partir de $\mathcal{R}$ en orientant les arêtes selon l'orientation de polarisation et en ajoutant de nouvelles arêtes :*

- *de tout nœud dépendant d'un poids propre vers le nœud & correspondant*
- *de tout nœud dépendant d'une variable propre vers le nœud $\forall$ correspondant*
- *depuis les sauts vers le nœud auxquels ils sont associés.*

Lemme 4 *Si un basculement d'un pré-réseau polarisé contient un cycle (au sens non orienté) alors le graphe de correction du pré-réseau contient un cycle (au sens p-orienté).*

Démonstration : Par le lemme 3 un tel cycle respecte l'orientation de polarisation or le graphe de correction contient plus d'arêtes que le basculement donc en particulier le cycle. □

Définition 19 (Sommets initiaux et finaux) *Un* sommet initial *(resp.* final*) d'un graphe de correction est un sommet dont les seules arêtes entrantes (resp. sortantes) sont pendantes.*

Remarque : Un sommet final est un sommet conclusion et donc a poids 1, par ailleurs un nœud ?d est toujours initial.

Lemme 5 *Dans un graphe de correction, tout sommet ayant une conclusion positive pendante est initial.*

Démonstration : Un tel nœud ne peut-être qu'un nœud positif ou ax, ! ou $\top$ or ces nœuds ne reçoivent aucune arête de saut et aucune arête de dépendance et on constate que leur autres arêtes sont toutes sortantes. □

Lemme 6 *Dans un graphe de correction, un sommet négatif n'est jamais initial.*

Démonstration : En regardant chaque cas de nœud négatif, on constate que dans un graphe de correction ils ont toujours au moins une arête entrante (lemme 1) et ces arêtes sont soit des arêtes principales venant d'un nœud situé au-dessus soit des arêtes de basculement et donc ne sont jamais pendantes. □

6.1 Critère faible

Nous donnons tout d'abord un premier critère utilisant la notion d'orientation de polarisation sur les réseaux polarisés qui est équivalent au critère général et permet d'oublier les basculements mais utilise encore la notion de tranche.

Définition 20 (Tranche du graphe de correction) *Une* tranche du graphe de correction *d'un pré-réseau est le graphe obtenu en ne conservant que les sommets et les arêtes contenus dans une tranche du réseau (ou autrement dit le graphe de correction de cette tranche).*

Théorème 7 (Critère de correction) *Un pré-réseau polarisé a tous ses basculements acycliques et connexes* ***ssi*** *le graphe de correction vérifie que toutes ses tranches sont acycliques (au sens p-orienté), contiennent un unique sommet initial et ont tous leurs sommets p-accessibles à partir de ce sommet initial (on dira que le graphe de correction est* faiblement correct*).*

Démonstration : On sait qu'un pré-réseau dont tous les basculements sont acycliques et connexes est séquentialisable (théorème 4), or si $\mathcal{R}$ est un pré-réseau séquentialisable, on montre par induction que son graphe de correction est faiblement correct.

Montrons réciproquement que si le graphe de correction est faiblement correct alors les basculements sont acycliques et connexes. L'acyclicité est vérifiée par le lemme 4, reste la connexité : on considère une tranche $\mathcal{T}$ du pré-réseau et on appelle i son sommet initial. On prouve par induction sur la somme Σ des longueurs des chemins allant de i à un sommet s dans $\mathcal{T}$ que dans tout basculement $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$, s est relié à i :

- si $\Sigma = 0$ alors $s = i$
- si $\Sigma = n + 1$, s n'est pas initial et on remarque qu'il existe un sommet s' et une arête a de s' vers s dans $\mathcal{T}$ tels que a soit conservée dans $\mathcal{B}$, en effet si s n'est pas négatif il ne perd aucune arête en passant dans $\mathcal{B}$ (et puisqu'il n'est pas initial dans $\mathcal{T}$, il existe un sommet s' et une arête a qui conviennent) et si s est négatif il garde exactement une de ses arêtes entrantes a venant d'un sommet s' en passant dans $\mathcal{B}$. Par définition de s', la somme Σ' des longueurs des chemins de i à s' dans $\mathcal{T}$ est inférieure à n (par acyclicité de $\mathcal{T}$) et donc par hypothèse d'induction il existe un chemin entre i et s' dans $\mathcal{B}$ auquel il suffit d'ajouter l'arête a pour obtenir un chemin entre i et s

et donc tous les basculements de $\mathcal{T}$ sont connexes. □

En particulier un pré-réseau polarisé dont le graphe de correction est faiblement correct est un réseau et on peut lui appliquer tous les résultats de [7] sur la séquentialisation, l'élimination des coupures, ...

6.2 Critère fort

En continuant dans cette direction et en supprimant même l'utilisation des tranches on obtient un critère de correction encore plus simple mais qui accepte strictement moins de pré-réseaux que le critère général.

Définition 21 (Critère de correction forte) *Le graphe de correction d'un pré-réseau polarisé est dit* fortement correct *s'il est acyclique et si ses sommets initiaux sont incompatibles, c'est-à-dire ont des poids $w_1, \ldots, w_n$ tels que : $w_i w_j = 0, \forall i \neq j$.*

Théorème 8 (Critère fort et critère faible) *Un graphe de correction fortement correct est faiblement correct.*

Démonstration : Le passage aux tranches supprime des arêtes donc conserve l'acyclicité.

Pour ce qui est de la connexité, il faut tout d'abord remarquer que si le graphe de correction est fortement correct alors ses tranches contiennent exactement un sommet initial, en effet dans une tranche les sommets négatifs ne sont jamais initiaux (lemme 6) et un sommet positif ne peut pas devenir initial par passage à une tranche puisque le sommet situé au-dessous ayant un poids plus grand ne peut pas disparaître sans lui, et de manière similaire pour les autres nœuds. La contrainte sur les poids des sommets initiaux assure donc qu'il y en a au plus un par tranche, l'acyclicité garantissant qu'il y en a au moins un.

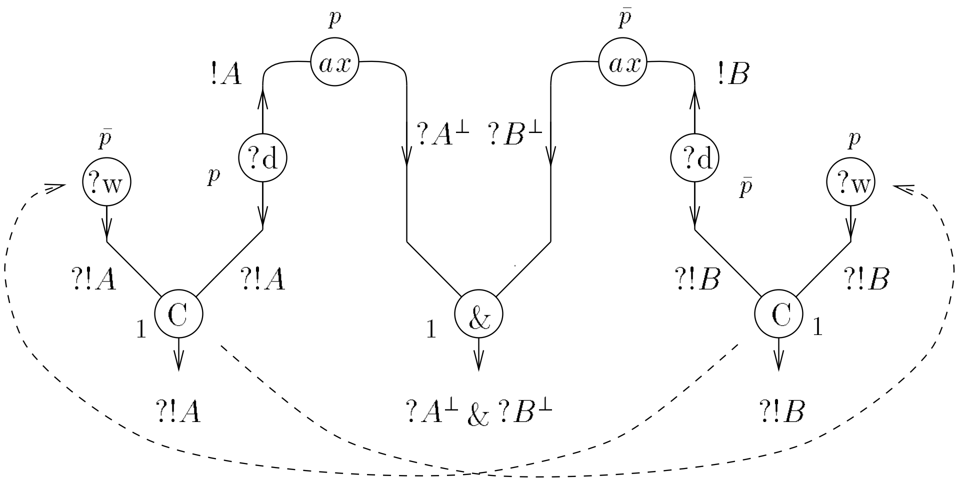
Par ailleurs pour un graphe de correction acyclique, on montre par induction sur la somme Σ des longueurs des chemins allant d'un sommet initial à un sommet s donné que dans toute tranche où s apparait, il est accessible à partir du sommet initial de cette tranche.

- si $\Sigma = 0$, s est initial donc dans une tranche où il apparait il ne peut être que le sommet initial

– si $\Sigma = n+1$, on se place dans une tranche où s apparait, si s y est initial aucun problème, sinon il existe un sommet s' dans cette tranche avec une arête de s' à s. Dans le graphe de correction, la somme des longueurs des chemins Σ' pour s' est inférieure à n donc par hypothèse d'induction s' est accessible à partir du sommet initial dans chaque tranche où il apparait et en particulier dans celle qui nous intéresse. Il reste à ajouter l'arête de s' à s à un chemin qui relie le sommet initial à s' pour montrer que s est accessible dans cette tranche

le critère faible est donc vérifié. □

Mais la réciproque est fausse, il existe des pré-réseaux corrects pour le critère faible (et donc pour le critère général) qui sont rejetés par ce critère fort, en effet certaines interactions entre tranches peuvent donner lieu à des cycles :



Toutefois ceci n'est pas gênant puisque l'on conserve bien un réseau pour chaque preuve du calcul des séquents et la stabilité du critère par élimination des coupures comme nous le verrons dans les sections 6.4 et 6.5.

6.3 Séquentialisation

Nous allons maintenant donner une preuve de la séquentialisabilité des pré-réseaux polarisés dont le graphe de correction est fortement correct que nous appellerons tout simplement *réseaux* dans la suite car c'est la seule notion de correction qui nous intéresse désormais. Cette preuve est une preuve directe autre que celle qui consiste à passer par le cas non polarisé en appliquant successivement les théorèmes 8, 7 puis 4.

Définition 22 (Arbre positif) *Un* arbre positif *d'un graphe de correction est un ensemble non vide connexe maximal (pour l'inclusion) de sommets et d'arêtes positifs.*

Un arbre positif $\mathcal{A}$ est dit terminal *si pour tout sommet s de l'arbre et toute arête positive a du graphe de correction, s'il existe un chemin de s à a alors a est dans $\mathcal{A}$.*

Lemme 7 *Soit a une arête positive d'un graphe de correction, il existe un arbre positif terminal $\mathcal{A}$ tel qu'il y ait un chemin de a vers $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire entre a et une arête de $\mathcal{A}$).*

Démonstration : Par induction sur la longueur maximale des chemins reliant a à une arête positive, cette longueur étant finie puisque le graphe de correction du pré-réseau est fini et acyclique.

Soit il n'existe aucun chemin de a vers une autre arête positive auquel cas a est au sommet d'un arbre positif terminal $\mathcal{A}$ et on a le chemin vide de a vers $\mathcal{A}$.

Soit on a un chemin de a vers une autre arête positive b et par hypothèse d'induction il existe un arbre positif terminal $\mathcal{A}$ avec un chemin de b vers $\mathcal{A}$ donc de a vers $\mathcal{A}$. □

Théorème 9 (Séquentialisation) *Un réseau polarisé est séquentialisable.*

Démonstration : La preuve s'articule en deux parties, tout d'abord supprimer tous les nœuds négatifs finaux, puis pour un réseau sans tels nœuds, trouver un nœud par lequel séquentialiser (à l'aide de la notion d'arbre positif terminal).

Le graphe de correction du réseau étant acyclique il possède un sommet final. Supprimer un sommet final ne peut jamais créer de cycle et ne risque pas de supprimer un saut d'un ?w ou d'un $\perp$ par définition d'un sommet final. On considère les différents nœuds finaux possibles :

- $⅋$ en le supprimant, on conserve un réseau puisqu'on ne modifie rien aux sommets initiaux
- $\&$ On considère les graphes obtenus à partir du réseau en séquentialisant par rapport au $\&$. Il faut montrer que ces graphes sont des réseaux, en particulier que ce sont des pré-réseaux. Tout d'abord on remarque si une extrémité d'une arête a disparue parce que son poids s'est annulé alors l'autre également excepté s'il s'agit d'une prémisse d'une contraction additive auquel cas on obtient un nœud C avec moins de prémisses : soit aucune et dans ce cas le nœud disparait aussi par définition de son poids, soit une et par définition de la séquentialisation le nœud est remplacé par une arête, soit plusieurs et dans ce cas la contrainte de poids sur les prémisses reste vérifiée. On a donc un graphe orienté construit sur les bons nœuds, vérifiant les contraintes de typage et les contraintes de poids. Il faut toutefois vérifier que les poids élémentaires qui apparaissent sont bien associés à des nœuds $\&$ ce qui est donné par la contrainte que si un poids w dépend de q alors le poids du nœud $\&$ correspondant est plus grand et donc n'a pas pu être annulé sans que w le soit. De la même manière, si une variable propre est présente alors son $\forall$ associé également. La contrainte sur les poids des sauts assure qu'un nœud restant ne perd aucun saut. Ces trois contraintes de poids sont facilement conservées pour les nœuds restants. Les conclusions du pré-réseau sont soit des conclusions déjà existantes avant et donc ont poids 1 et leurs formules ne contiennent pas de variable propre libre, soit la prémisse du $\&$ restante et son poids devient 1 par disparition de p et sa formule ne contient pas de variable propre sinon celle de la conclusion du $\&$ en aurait contenue. Il s'agit donc d'un pré-réseau. De plus c'est un réseau car on ne peut pas créer de cycle et ses sommets initiaux sont inchangés excepté au niveau des C^+ conclusions devenus unaires qui sont remplacés par le sommet situé au-dessus qui est de même poids
- ?c cas identique à celui d'un $⅋$
- ?w on le supprime ce qui conserve le fait d'être un pré-réseau et les sommets qui restent n'ont vu disparaître aucune arête entrante donc les sommets initiaux sont inchangés
- $\perp$ idem
- $\forall$ on le supprime et comme pour ?w les sommets initiaux sont inchangés.

On remarque que les nœuds $\otimes$, $\oplus_i$, $\exists$, C^+, C^-, *cut* et ?d ne peuvent pas être finaux. Par conséquent si aucun des nœuds étudiés jusqu'ici n'est final, les nœuds finaux sont tous soit ax, soit !, soit 1,soit $\top$.

Ce qui termine la première partie de la preuve. □

Lemme 8 *Une arête négative ne peut arriver que sur un nœud négatif ou un cut.*

Démonstration : Immédiat. □

Lemme 9 *Dans un réseau polarisé avec pour seuls nœuds finaux ax, !, 1 et $\top$, si s n'est pas un sommet final alors il existe un chemin de s à une arête positive.*

Démonstration : Si s a une arête positive sortante le résultat est évident. Si s est un nœud ax, ! ou $\top$, n'étant pas final il possède une arête sortante vers un autre sommet qui ne peut être qu'un sommet négatif ou une coupure par le lemme 8. Reste à montrer que de tout sommet négatif s il existe un chemin vers une coupure et on sera ramené au cas d'un sommet possédant un chemin vers une coupure ce qui prouve le lemme puisque de toute coupure part une arête positive.

On raisonne par induction sur le nombre n de sommets négatifs s' tels qu'il y ait un chemin de s à s'. Si $n = 0$, s possède une arête vers une coupure par le lemme 8 et si $n > 0$, on considère un sommet négatif s' tel qu'il y ait un chemin de s à s' et par hypothèse d'induction s' admet un chemin vers une coupure. □

Définition 23 (Arbre positif coupé) *On dit qu'un arbre positif est* coupé *si l'un des nœuds situés héréditairement au-dessous est une coupure.*

Démonstration (théorème 9 – suite) : On considère désormais un réseau avec pour seuls nœuds finaux des nœuds ax, !, 1 et $\top$ ce qui entraine que soit il est constitué d'un unique nœud $\top$ sans arête positive (ce qui ne pose pas de problème de séquentialisation) soit il possède une arête positive. Dans un tel réseau, en haut d'un arbre positif terminal se trouvent des sommet ax, !, 1 ou $\top$ et ceux-ci sont finaux sinon par le lemme 9 l'arbre ne serait pas terminal. Il en découle qu'un tel arbre a tous ses sommets de poids 1 car les liens qui se situent en haut ont poids 1 et le poids ne peut que croître en descendant.

Etant donné un arbre positif terminal, par contrainte de typage s'il y a un nœud sous la racine c'est un *cut* ou un ?d or dans ce dernier cas, le nœud est de poids 1 et ne peut donc être que le seul ?d du réseau puisqu'un tel nœud est toujours initial. S'il y a un nœud sous ce ?d c'est soit une coupure soit un nœud négatif par le lemme 8 mais dans tous les cas un nœud non final, le lemme 9 s'applique à ce nœud et par le lemme 7 on trouve un autre arbre positif terminal qui lui ne peut pas avoir de ?d sous sa racine. On a ainsi montré l'existence d'un arbre positif terminal non coupé ou dont la racine est prémisse d'un nœud *cut*.

Considérons un tel arbre $\mathcal{A}$, supposons tout d'abord qu'il est non coupé et appelons s la racine de l'arbre ou le nœud ?d situé au-dessous s'il y en a un. s est initial et de poids 1 donc seul sommet initial du réseau. Le réseau est donc constitué de s et des nœuds situés au-dessus car si on suppose qu'il existe un autre nœud s', soit il existe un chemin de s à s' et dans ce cas s est un ?d et s' est nécessairement un nœud négatif au-dessous de s ce qui contredit le fait que $\mathcal{A}$ est non coupé par le lemme 9 soit il n'existe pas de tel chemin et alors la composant connexe de s' doit contenir un sommet initial, par acyclicité, ce qui est impossible puisque s est le seul. Pour un réseau aussi simple la séquentialisation ne pose alors aucun problème. Si par contre $\mathcal{A}$ a une coupure à sa racine, on montre que ce lien *cut* sépare le réseau en deux sous-réseaux. Tout d'abord, les formules associées aux arêtes de la coupure ne contiennent pas de variable propre sinon l'arbre positif en contiendrait et donc les conclusions des liens finaux qui se trouvent à son sommet ce qui contredirait le fait que l'on ait un réseau. D'autre part le *cut* a poids 1 puisqu'il est sous un arbre positif terminal (les poids croissent en descendant). Ensuite on inclut dans $\mathcal{A}$ les nœuds situés à son sommet et on appelle $\mathcal{R}$ le reste du réseau. Aucune arête ne peut relier $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$ car par terminalité aucune arête ne peut partir de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{R}$ et $\mathcal{A}$ ne contenant pas de nœud négatif, les seules arêtes qui puissent aller de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{A}$ sont celles de la coupure. $\mathcal{R}$ est alors facilement un réseau et $\mathcal{A}$ également puisqu'il est acyclique et possède pour unique sommet initial celui qui se trouvait au-dessus de la coupure et donc de poids 1. Si bien que l'on peut séquentialiser par rapport à cette coupure.

Il ne reste alors que des nœuds ax, !, 1 et $\top$ finaux (donc de poids 1) mais aussi initiaux en l'absence de coupure or par incompatibilité des sommets initiaux, il ne peut y en avoir qu'un et la séquentialisation ne pose aucun problème. □

Proposition 10 *Le théorème 9 donne un critère de correction en temps cubique en la taille du réseau (c'est-à-dire son nombre de liens).*

Démonstration : La construction du graphe de correction associé à un pré-réseau est linéaire puis la vérification de l'acyclicité d'un graphe orienté également. La vérification sur les poids des sommets initiaux coûte un temps cubique. □

6.4 Traduction du calcul des séquents

Nous prouvons maintenant que le critère fort conserve suffisament de réseaux en montrant qu'il existe une traduction des preuves du calcul des séquents **LLP** dans les réseaux polarisés.

Pour parler de correction et de séquentialisation nous ne considérions que des réseaux pour lesquels le ! était un simple nœud sous forme d'axiome généralisé mais dès que l'on s'intéresse à traduire les preuves du calcul des séquents dans des réseaux et par la suite pour l'élimination des coupures, il est nécessaire d'associer à ces nœuds un réseau qui correspond à leur preuve. Nous redéfinissons donc les réseaux avec cette information complémentaire :

Définition 24 (Pré-réseau et réseau avec boîtes) *Un* pré-réseau avec boîtes *se définit inductivement comme étant :*

- *soit un pré-réseau ne contenant aucun nœud* !
- *soit un pré-réseau auquel on associe un pré-réseau avec boîtes de conclusions A, $?B_1, \ldots,$ $?B_n$ à chaque nœud ! de conclusions $!A$, $?B_1, \ldots, ?B_n$.*

On définit de la même manière la notion de réseau avec boîtes *à partir des réseaux.*

Dans la suite, on utilisera par abus de langage le terme *réseau (pré-réseau)* pour des *réseaux (pré-réseaux) avec boîtes* car ce sont désormais les seuls qui nous intéressent.

Définition 25 (Traduction d'une preuve) *On définit la traduction d'une preuve du calcul des séquents* **LLP** *en pré-réseau par induction sur sa taille en étudiant chaque cas de dernière règle possible :*

& *soit p un nouveau poids propre, on multiplie tous les poids du pré-réseau associé à la prémisse gauche par p et ceux du pré-réseau associé à la prémisse droite par $\bar{p}$ et on ajoute un nœud & sur les arêtes pendantes corespondant aux deux formules du & et des nœuds de contraction additive pour chaque paire d'éléments du contexte ; on vérifie aisément que l'on a ainsi défini un pré-réseau*

! *on obtient le pré-réseau formé d'un unique nœud ! avec pour conclusions $!A, ?A_1, \ldots, ?A_n$ (les mêmes que celles de la preuve) et on associe à ce nœud le pré-réseau obtenu à l'étape précédente de conclusions $A, ?A_1, \ldots, ?A_n$*

$?w$ *on ajoute un lien $?w$ avec comme ensemble de sauts tous les nœuds conclusions du pré-réseau obtenu à l'étape précédente*

$\perp$ *comme pour $?w$*

et les autres cas sont évidents.

Théorème 11 *La traduction précédente associe un réseau à toute preuve de* **LLP***.*

Démonstration : On prouve la correction du pré-réseau obtenu par induction sur la définition de la traduction, en observant la conservation de l'acyclicité et l'évolution de l'ensemble des sommets initiaux du graphe de correction :

ax Aucun problème.

cut On rattache deux graphes acycliques par un unique chemin ce qui ne peut pas créer de cycle. La prémisse positive de la coupure était arête pendante donc conclusion d'un sommet conclusion initial par le lemme 5. Ce sommet était de poids 1 donc seul sommet initial de son pré-réseau et il disparait. Les sommets initiaux du pré-réseau obtenu sont exactement les sommets initiaux du réseau dont provient la prémisse négative de la coupure qui, par hypothèse d'induction, sont incompatibles.

$\otimes$ Par le lemme 5, les deux nœuds situés au-dessus du $\otimes$ étaient les seuls sommets initiaux de leur graphe de correction et sont remplacés par un unique sommet initial : le $\otimes$. Par ailleurs on ne crée pas de cycle.

$⅋$ On ne crée pas de cycle et on n'ajoute que des arêtes sortantes ce qui ne modifie pas la nature (initial ou non) des sommets.

& On ajoute un nœud & ce qui ne peut pas créer de cycle. Les conclusions des réseaux sont réunies deux à deux par des contractions additives ce qui ne crée pas non plus de cycle et enfin on ajoute des arêtes de dépendance de différents nœuds vers le nœud & or celui-ci ayant pour seule arête sortante une arête pendante, on ne crée pas de cycle. Les sommets initiaux deviennent tous deux à deux incompatibles par multiplication par p et $\bar{p}$ dans chacun des réseaux des prémisses du & et l'ajout des nouveaux nœuds conserve cette incompatibilité pour les mêmes raisons que dans les cas du $\otimes$ (au niveau des C^+) et du $⅋$ (au niveau du & et des C^-).

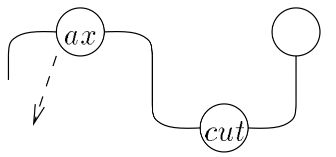
! Le pré-réseau qui lui est associé est bien correct par hypothèse d'induction et l'axiome généralisé ne pose pas de problème.

Les autres cas sont similaires à ceux-ci. □

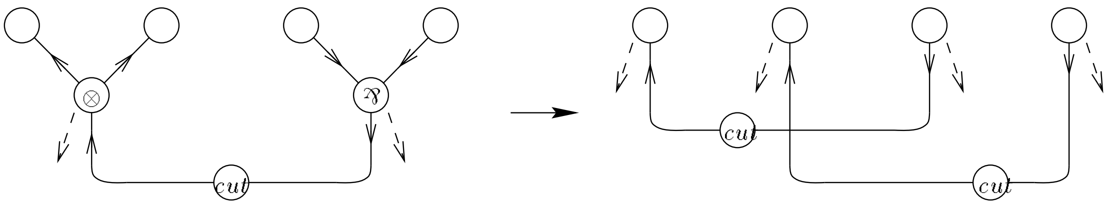
6.5 Elimination des coupures

Définition 26 (Etape de réduction) *On définit les* étapes de réduction *des coupures en fonction des nœuds situés au-dessus de leurs prémisses :*

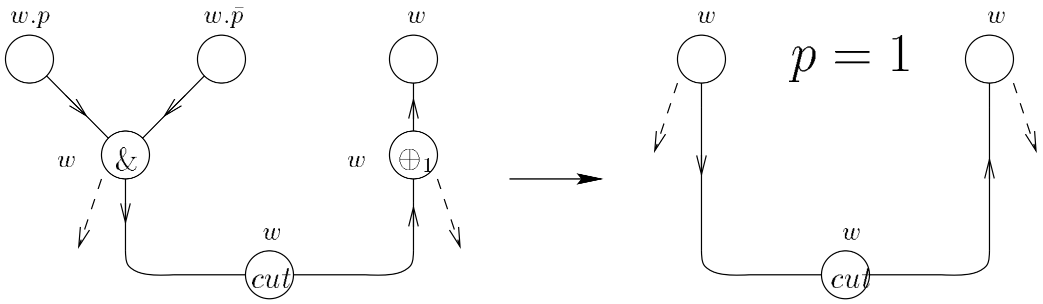
La coupure axiome *est éliminée en supprimant le nœud ax et le nœud cut. Si le nœud ax est un saut alors le nœud situé au-dessus du cut devient saut à sa place.*



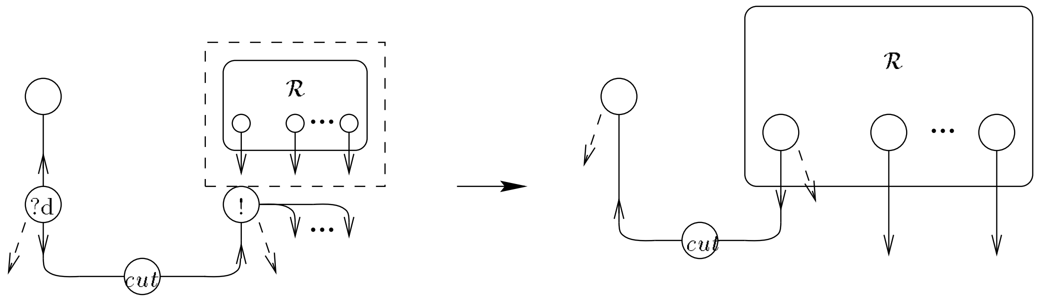
La coupure multiplicative *est remplacée par deux coupures entre les prémisses correspondantes. Par ailleurs les sauts qui partaient du $\otimes$ sont dupliqués en des sauts qui partent de chacun des nœuds situés au-dessus et de même pour le $⅋$.*



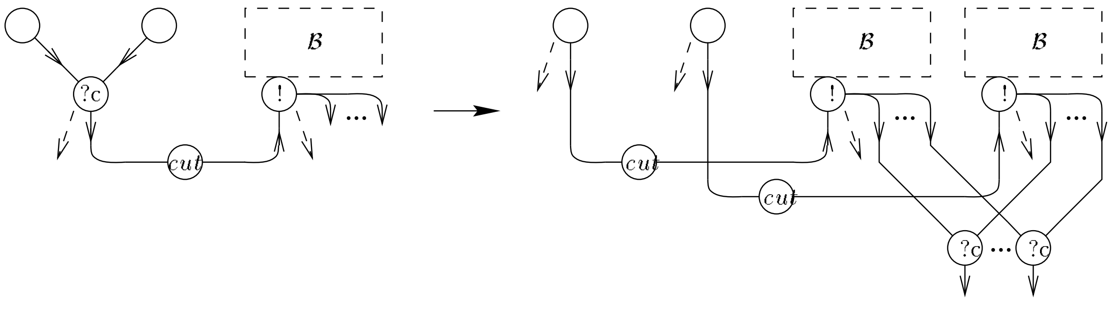
La coupure additive *est éliminée en effaçant du réseau la partie dont les poids sont nuls lorsque $p = 1$ (resp. $p = 0$) si on a un lien $\oplus_1$ (resp. $\oplus_2$). La coupure est reportée entre la* *prémisse restante du lien & et celle du lien $\oplus_i$ (ces deux liens étant supprimés). Les sauts éventuels sont reportés sur les nœuds du dessus.*



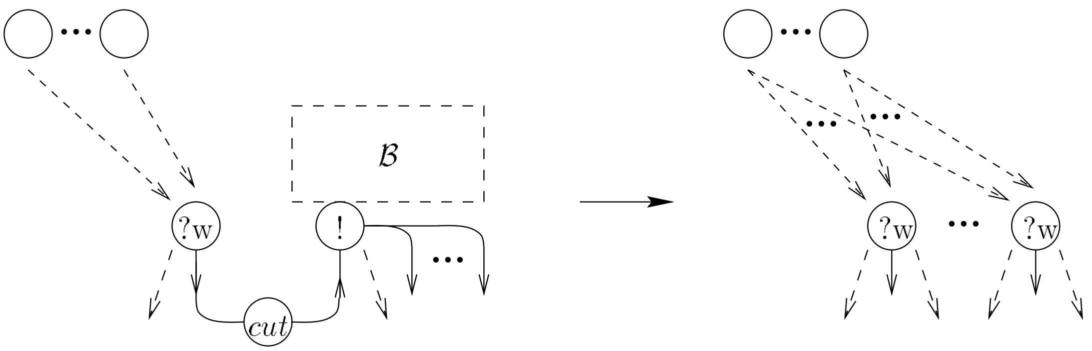
La coupure déréliction *ouvre la boîte du ! et est remplacée par une coupure entre le nœud au-dessus du ?d et la conclusion du réseau associé au ! sur laquelle porte la promotion. De plus les poids de ce réseau sont multipliés par le poids du !. On remonte par ailleurs les sauts.*



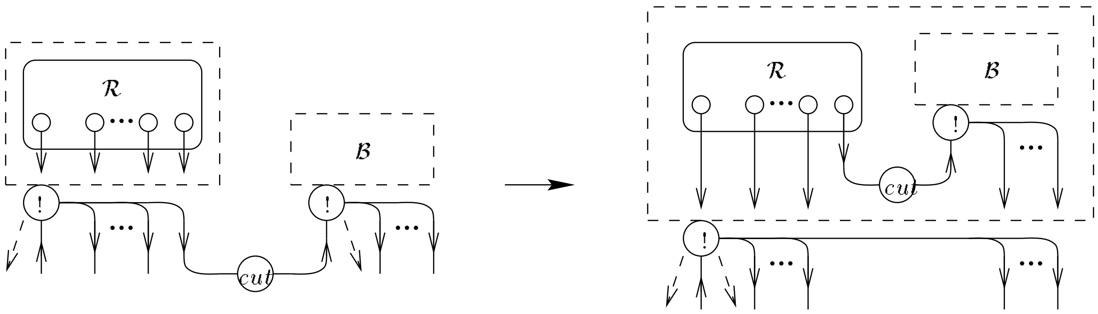
La coupure contraction *duplique le ! donnant deux coupures entre ces ! et les nœuds situées au-dessus du ?c, de plus on ajoute des ?c entre les paires de conclusions identiques des !. Les sauts du ?c sont dupliqués sur les deux nœuds du dessus et ceux du ! dupliqués sur les deux ! obtenus.*



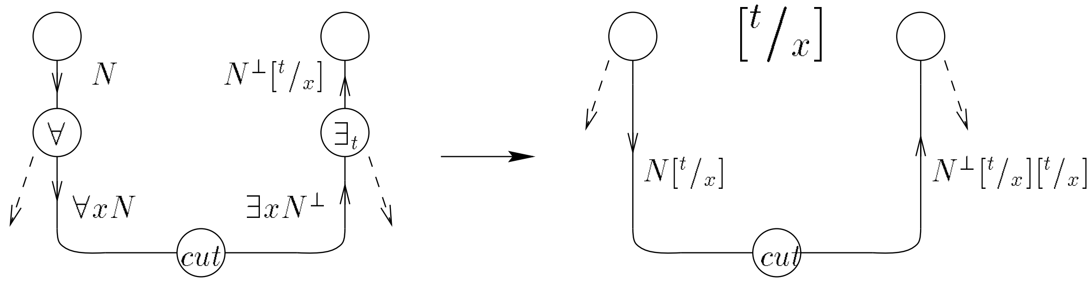
La coupure affaiblissement *efface le ! et le remplace par des ?w sur chacune de ses conclusions négatives. Les sauts de ces nouveaux ?w sont les sauts du ?w effacé. Si le ?w et le ! effacés étaient des sauts, les ?w ajoutés les remplacent.*



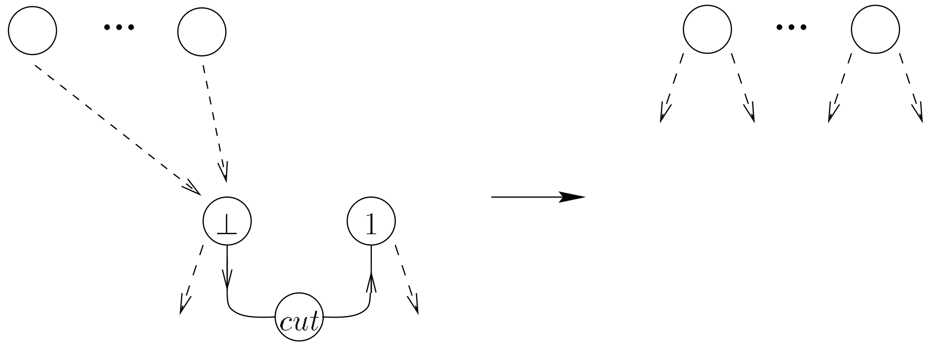
La coupure commutative exponentielle *fait rentrer une boîte dans l'autre et déplace les sauts du* ! *qui rentre sur le* ! *resté au dehors.*



La coupure quantificateur *s'élimine en substituant dans tout le réseau la variable propre par le terme introduit par le* $\exists$ *et en remontant la coupure. Les sauts qui partent du* $\exists$ *ou du* $\forall$ *sont reportés sur les nœuds du dessus.*



La coupure constante multiplicative *s'élimine en suprimant 1,* $\perp$ *et cut. Si 1 et* $\perp$ *étaient des sauts, les sauts de* $\perp$ *les remplacent.*



Dans cette définition il manque deux configurations de coupures à éliminer, s'il l'un des deux nœuds situés au-dessus de la coupure est un $\top$ ou une contraction additive. Pour le cas du $\top$ on ne connait pas de solution satisfaisante, son comportement sans boîte reste à étudier. Le cas de la contraction additive est un peu différent, une solution est proposée dans [7] mais totalement non uniforme par rapport au reste, on espère trouver une solution plus locale par propagation de ces contractions additives à travers les coupures de manière confluente. Toutefois pour le cas particulier d'un réseau n'ayant pas de connecteur & dans les formules associées à ses arêtes pendantes, ce qui suffit pour bien des calculs, les étapes que l'on a définies suffisent pour la normalisation :

Théorème 12 *Un réseau sans lien* $\top$ *et sans connecteur & dans les formules associées à ses arêtes pendantes qui ne peut être réduit par aucune des étapes de la définition 26 est en forme normale (c'est-à-dire n'a pas de lien cut).*

Ce théorème a été prouvé par J.-Y. Girard pour le cas des réseaux multiplicatifs-additifs sans constantes dans [7] à l'aide de la technologie qu'il développe dans cet article (empires maximaux, ...). Nous en donnons ici une preuve pour ce cas plus général basée uniquement sur la p-orientation.
Démonstration : Si le réseau ne contient pas de nœud &, tous les poids sont 1 et il ne peut pas y avoir de contraction additive.

Sinon, soit L un lien & terminal pour la p-orientation c'est-à-dire tel qu'il n'y ait pas de chemin de L à un autre lien & dans le graphe de correction du réseau (il en existe par acyclicité du graphe de correction). Si on descend sous le lien L on ne peut pas arriver à un arête pendante par hypothèse, on arrive donc à une coupure et ceci en respectant la p-orientation puisque sous un lien négatif ne peuvent se trouver que des arêtes négatives. Si l'une des prémisses de cette coupure est une contraction additive C alors il y a un chemin de L vers C (n'utilisant que des arêtes principales) mais un nœud de contraction additive dépend toujours d'un poids propre et donc possède une arête vers un nœud & ce qui contredit la terminalité de L ou l'acyclicité, cette coupure peut donc être réduite. □

Théorème 13 (Elimination des coupures) *La réduction des réseaux conserve la correction forte.*

Démonstration : Tout d'abord les étapes de réduction transforment un pré-réseau en un pré-réseau excepté la coupure quantificateur qui par contre transforme un réseau en pré-réseau car le seul problème est de savoir si $N^{\perp}[{}^{t}/_{x}][{}^{t}/_{x}] \stackrel{?}{=} N^{\perp}[{}^{t}/_{x}]$ c'est-à-dire si x est libre dans t mais par définition de la dépendance d'un nœud vis-à-vis d'une variable propre ceci engendrerait un cycle dans le graphe de correction. On considère désormais un réseau et on étudie chaque étape de réduction :

- Pour les coupures axiome, multiplicative, additive, contraction, affaiblissement, commutative exponentielle, quantificateur et constante multiplicative on ne crée pas de nouveaux chemins susceptibles de donner des cycles et on ne modifie pas les sommets initiaux.
- Si la coupure déréliction créait un nouveau cycle il passerait par le nouveau nœud coupure et ferait un cycle à l'intérieur du réseau sorti de la boîte ce qui est impossible par correction de ce réseau. Par ailleurs la déréliction qui était sommet initial est remplacée par les sommets initiaux du réseau contenu dans la boîte qui ont des poids incompatibles et deviennent bien incompatibles avec les autres sommets initiaux du réseau par leur modification de poids.

Le critère est donc conservé. □

Conclusion

A travers l'étude de l'application de la contrainte de polarisation provenant de **LC** à la notion de réseau pour la logique linéaire complète, nous avons pu faire apparaître d'importantes simplifications dans le critère de correction applicable à ces réseaux polarisés. On obtient ainsi un système de réseaux pour **LC** résolvant un problème syntaxique important.

Ce travail se termine sur le problème de l'élimination des coupures qui se trouve au même niveau d'avancement que dans [7] et qu'il reste à étudier de manière plus précise en particulier dans le cas polarisé.

Mais bien d'autres voies s'ouvrent également, comme l'extension au second ordre, l'étude d'une géométrie de l'interaction ou d'une sémantique des jeux pour ces réseaux, la poursuite de l'étude de la polarisation des réseaux pour la logique intuitionniste dans l'esprit de [6], ...

Références

[1] V. Danos, J.-B. Joinet, and H. Schellinx. Computational isomorphisms in classical logic (extended abstract). In J.-Y. Girard, M. Okada, and A. Scedrov, editors, *Proceedings Linear Logic '96 Tokyo Meeting, Keyo Univ., Tokyo, Japan, 28 March – 2 Apr 1996*, volume 3 of *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. Elsevier, Amsterdam, 1996. Full version available at ftp://ftp.logique.jussieu.fr/pub/distrib/danos/DJS/decostringopolaro.ps.Z (Manuscript, April 1997).

[2] V. Danos and L. Regnier. The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, 28:181–203, 1989.

[3] J.-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–102, 1987.

[4] J.-Y. Girard. A new constructive logic : classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1(3):255–296, 1991.

[5] J.-Y. Girard. Quantifiers in linear logic II. In Corsi and Sambin, editors, *Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza*, pages 79–90, Bologna, 1991. CLUEB.

[6] J.-Y. Girard. On the unity of logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 59:201–217, 1993.

[7] J.-Y. Girard. Proof-nets : the parallel syntax for proof-theory. In Ursini and Agliano, editors, *Logic and Algebra*, New York, 1996. Marcel Dekker.

[8] F. Lamarche. From proof nets to games (extended abstract). In J.-Y. Girard, M. Okada, and A. Scedrov, editors, *Proceedings Linear Logic '96 Tokyo Meeting, Keyo Univ., Tokyo, Japan, 28 March – 2 Apr 1996*, volume 3 of *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. Elsevier, Amsterdam, 1996.

[9] M. Quatrini and L. Tortora de Falco. Polarisation des preuves classiques et renversement. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 323:113–116, 1996.

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier Laurent REGNIER pour son sujet, son encadrement et le temps passé à relire ce rapport mais également toute l'équipe de Logique De la Programmation pour son fabuleux accueil, l'ambiance qui y règne et le plaisir qu'on a à y travailler.