THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean-Louis KRIVINE

1re THESE. - SOUS-ESPACES ET CONES CONVEXES DANS LES ESPACES L^p.

2e THESE. - PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE.

Soutenues le 21 Juin 1967 **devant la Commission d'examen.**

M. KAHANE	*Président*
M. NEVEU	*Examinateurs*
M. LACOMBE	

- INTRODUCTION -

Ce travail se compose de deux parties : dans la première, on étudie les espaces normés qu'on peut plonger dans un espace L^p (où p est un réel fixé ≥ 1). Un système complet de conditions est obtenu lorsque p n'est pas un entier pair ; ces conditions sont de type fini, c'est-à-dire sont satisfaites par un espace normé dès que tout sous-espace de dimension finie les satisfait. Leur écriture nécessite l'introduction d'une généralisation de la notion de fonction de type négatif sur un espace vectoriel, que j'appelle fonction 2k-positive.

La théorie se développe d'une façon parallèle pour les cônes convexes normés, les valeurs exceptionnelles de p étant alors toutes les valeurs entières.

Les démonstrations s'appuient sur deux outils fondamentaux :

1°) - Une généralisation au cas des espaces L^p du théorème de Kakutani sur la représentation des espaces L.

2°) - La notion d'ultraproduit d'une famille d'espaces L^p, qui est une adaptation d'une notion classique en théorie des modèles. Elle comporte diverses variantes dont on donne des applications (en particulier à l'étude des isométries des sous-espaces des espaces L^p).

Dans la deuxième partie, on étudie les préordres archimédiens sur les $\mathbb{R}$-algèbres. La notion très simple d'algèbre ordonnée archimédienne semble se retrouver assez souvent en analyse - en particulier dans la transformation de Laplace et en probabilités (cf. thèses de MM. BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE) - pour mériter d'être dégagée.

On en donne ici deux applications :

1°) - à un théorème sur la transformation de Laplace à plusieurs variables, qui est utilisé dans la première partie.

2°) - à une généralisation du théorème de Hille-Yosida aux semi-groupes distributions de type σ (k) définis par J. PEETRE.

Une grande partie de ce travail a été réalisée au cours d'une collaboration très étroite avec MM. BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE ; il est donc impossible (et d'ailleurs sans grand intérêt) de démêler nos parts respectives dans plusieurs des résultats exposés ici. Je saisis cette occasion de leur exprimer ma reconnaissance pour tout ce que cette collaboration n'a cessé de m'apporter.

Je remercie très vivement M. KAHANE qui s'est intéressé à mon travail dès son début, et avec qui j'ai eu de très profitables conversations ; son appui m'a été précieux pour mener à bien cette thèse dont il a accepté la direction.

Je remercie également M. NEVEU qui a bien voulu faire partie du jury, ainsi que M.LACOMBE, qui m'a initié en Logique mathématique, et qui a accepté de donner le deuxième sujet.

Enfin mes remerciements vont aussi au service de Secrétariat du Département de Mathématiques de PARIS, et particulièrement à Mme FAURE grâce à qui cette thèse a pu être ronéotypée.

P R E M I E R E   P A R T I E

SOUS ESPACES ET CONES

CONVEXES DANS LES ESPACES L^p.

I

Rappelons tout d'abord la définition et quelques propriétés des R-espaces vectoriels réticulés (appelés aussi espaces de Riesz). Les démonstrations se trouvent par exemple dans [1].

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est dit réticulé s'il est muni d'une opération binaire, notée $\cap$, satisfaisant les axiomes :

1) - $x \cap x = x$; $x \cap y = y \cap x$; $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ quels que soient $x, y, z \in E$.

2) - $(x+a) \cap (y+a) = x \cap y + a$ quels que soient $x, y, a \in E$.

3) - $\lambda(x \cap y) = \lambda x \cap \lambda y$ quels que soient $x, y \in E$ et $\lambda \in R^+$.

On définit alors $x \cup y = -[(-x) \cap (-y)]$; sur E est définie une relation d'ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel si on pose $x \geqslant y \iff x \cap y = y$; $x \cap y$ et $x \cup y$ sont alors respectivement borne inférieure et borne supérieure de $\{x, y\}$ pour cette relation d'ordre.

On a les propriétés suivantes (voir [1]) :

$x \cup y + x \cap y = x + y \quad \forall x, y \in E$.
$(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z) \quad \forall x, y, z \in E$.
$(x \cap y) \cup z = (x \cup z) \cap (y \cup z) \quad \forall x, y, z \in E$.

(distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$).

Deux éléments a et b de E sont dits étrangers si $a \cap b = 0$ (ils sont alors nécessairement $\geqslant 0$).

Pour tout $x \in E$ $\quad x \cup 0$ et $(-x) \cup 0$ sont étrangers et $x \cup (-x) = x \cup 0 + (-x) \cup 0$. On pose $|x| = x \cup (-x)$.

Quels que soient $x, y, a \in E$ on a alors :

$|x + y| \leq |x| + |y|$
$|x \cup a - y \cup a| \leq |x-y|$ et $|x \cap a - y \cap a| \leq |x-y|$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ; l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel réticulé, normé complet, pour $1 \leq p \leq \infty$. Le théorème suivant, qui est fondamental pour toute la suite, caractérise les espaces L^p $(1 \leq p < \infty)$ parmi les espaces de Banach réticulés.

Le cas particulier $p = 1$ a été montré par Kakutani [2], (qui a aussi étudié dans [3] le cas $p = \infty$), et la démonstration du cas général est analogue.

Théorème 1. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$, réticulé. Pour qu'il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tel que E soit isomorphe, en tant qu'espace de Banach réticulé à $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (p nombre réel , $1 \leq p < \infty$) il faut et il suffit que

a) $\| |x| \| = \|x\|$ pour tout $x \in E$

b) $\|x + y\|^p \geq \|x\|^p + \|y\|^p \geq \|x \cup y\|^p$, quels que soient les éléments $x, y \geq 0$ de E.

On a seulement à montrer que ces conditions sont suffisantes.

Si x, y sont étrangers on a $x \cap y = 0$, d'où $x \cup y = x + y$ et donc (d'après b) $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$. Par récurrence sur k on en déduit que si $x_1, \ldots, x_k$ sont étrangers deux à deux on a

$$\|x_1 + \ldots + x_k\|^p = \|x_1\|^p + \ldots + \|x_k\|^p.$$

En particulier $\|x \cup 0 + (-x) \cup 0\|^p = \|x \cup 0\|^p + \|(-x) \cup 0\|^p$. Comme $x \cup 0 + (-x) \cup 0 = |x|$ et que $\| |x| \| = \|x\|$ d'après a), on a donc

$$\| x \|^p = \|x \cup 0\|^p + (-x) \cup 0\|^p.$$

Si $0 \leq x \leq y$, alors $\|x\| \leq \|y\|$: en effet on a $y = x + a$ avec $a \geq 0$; donc $\|y\|^p \geq \|x\|^p + \|a\|^p$ d'après b) d'où $\|y\| \geq \|x\|$.

Toute suite décroissante d'éléments $\geqslant 0$ de E converge :
En effet, d'après ce qui précède, si $x_n \geqslant 0$, et $x_n \geqslant x_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, la suite $||x_n||^p$ décroît vers une limite α. On choisit l'entier N de façon que $||x_n||^p \leqslant \alpha + \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, ε étant un nombre réel > 0.
Si $N \leq n \leq m$, on a d'après b)

$||x_n||^p \geqslant ||x_m||^p + ||x_n - x_m||^p$ (en effet $x_m \geqslant 0$ et $x_n - x_m \geqslant 0$) et donc
$\alpha + \varepsilon \geqslant ||x_m||^p + ||x_n - x_m||^p \geqslant \alpha + ||x_n - x_m||^p$.

D'où $||x_n - x_m||^p \leq \varepsilon$, ce qui montre que la suite x_n est une suite de Cauchy d'éléments de E.

Toute suite croissante d'éléments de E, majorée par un élément de E converge :
car si la suite x_n est croissante, $x_n \leqslant x$, la suite $x - x_n$ est décroissante et ≥ 0.

Les fonctions $x \cup y$ et $x \cap y$ sont des applications continues de E x E dans E.

$$\text{On a } |a \cup b - c \cup d| \leq |a \cup b - c \cup b| + |c \cup b - c \cup d| \leq |a - c| + |b - d|$$

Donc $||\,|a \cup b - c \cup d|\,|| \leq ||\,|a - c|\,|| + ||\,|b - d|\,||$, ou encore
$||a \cup b - c \cup d|| \leq ||a - c|| + ||b - d||$, ce qui montre que la fonction $x \cup y$ est continue sur E x E. Il en est de même de la fonction
$x \cap y = - [(-x) \cup (-y)]$.

- A chaque élément $e \geqslant 0$ de E on associe le sous-espace vectoriel $Z(e) = \{x \in Z$; il existe $n \in \mathbb{R}^+$ tel que $ne \geqslant |x|\}$. Il est immédiat que Z(e) est un sous-espace vectoriel réticulé de E.

Si e_1, e_2, .. e_k sont étrangers deux à deux, $Z(e_1), \ldots, Z(e_k)$ sont linéairement indépendants:

Sinon il existe $x_1 \in Z(e_1), \dots, x_k \in Z(e_k)$ tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$ avec par exemple $\lambda_1 \neq 0$, $x_1 \neq 0$. D'où $x_1 = \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k$ et

$$|x_1| \leq |\alpha_2|\,|x_2| + \dots + |\alpha_k|\,|x_k|$$

Comme $|x_2| \leq n_2 e_2, \dots, |x_k| \leq n_k e_k$ avec $n_2, \dots, n_k \in \mathbb{R}^+$ on a $|u_1| \leq M(e_2 + \dots + e_k)$ où $M = \sup(n_2|\alpha_2|, \dots, n_k|\alpha_k|)$.

Comme $|u_1| \leq n_1 e_1$ avec $n_1 \in \mathbb{R}^+$, on a si $N = \sup(M, n_1)$

$$|u_1| \leq N[e_1 \cap (e_2 + \dots + e_k)] = 0$$

donc $u_1 = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

Soit alors J un sous-ensemble de E, dont tous les éléments sont $\geqslant 0$, de norme 1, étrangers deux à deux, qui soit maximal dans la famille des sous-ensembles de E qui ont ces propriétés : l'existence d'un tel ensemble J est une conséquence immédiate du théorème de Zorn appliqué à cette famille.

Soit Z le sous-espace vectoriel de E engendré par les Z(e) pour $e \in J$. D'après ce qui précède il est isomorphe à la somme directe des Z(e) pour $e \in J$.

Z est partout dense dans E : comme tout élément de E est différence de deux éléments $\geqslant 0$, il suffit de montrer que si ξ est un élément $\geqslant 0$ de E alors $\xi \in \overline{Z}$.

Soit I un sous-ensemble fini de J. On a :

$$\xi \geqslant \bigcup_{e \in I} (\xi \cap e) = \sum_{e \in I} \xi \cap e$$

(puisque les $\xi \cap e$ sont étrangers deux à deux). D'après la condition b) on en déduit :

$$\|\xi\|^p \geqslant \Big\|\sum_{e \in I} \xi \cap e\Big\|^p \geqslant \sum_{e \in I} \|\xi \cap e\|^p .$$

On a donc $\sum_{e \in I} ||\xi \cap e||^p \leq ||\xi||^p$ pour tout sous-ensemble fini I de J. On en déduit que $\{e \in J \; ; \; \xi \cap e \neq 0\}$ est dénombrable (puisque, pour chaque entier $n > 0$, $\{e \in J \; ; \; ||\xi \cap e|| \geq \frac{1}{n}\}$ est fini).

Soit $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ ce sous-ensemble de J. Posons

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{2^k} \quad \text{(cette série converge puisque } ||e_k|| = 1).$$

$$\text{On a } \xi \cap n\,f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi \cap \left(\frac{ne_k}{2^k}\right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \xi \cap \left(\frac{ne_k}{2^k}\right) .$$

Cela montre que $\xi \cap nf \in \bar{Z}$, pour tout entier $n > 0$.

La suite $\xi \cap n\,f$ est croissante et $\leq \xi$. Elle a donc une limite u, et $u \in \overline{Z}$. On pose $v = \xi - u$ et $w = v \cap f$. On a donc $0 \leq v \leq \xi - \xi \cap n\,f$ pour tout $n > 0$. Donc $0 \leq w \leq f$ et $w \leq \xi - \xi \cap n\,f$ pour tout $n > 0$. Montrons par récurrence sur k que $k\,w \leq \xi$; c'est vrai si $k = 0$; en admettant l'inégalité $k\,w \leq \xi$, on a $w + \xi \cap k\,f \leq \xi$ donc

$w + (k\,w) \cap (k\,f) \leq \xi$, soit puisque $w \leq f$:

$(k + 1)\,w \leq \xi$, ce qu'il fallait démontrer.

Comme $w \geq 0$, on a $k||w|| \leq ||\xi||$ pour tout entier $k > 0$ et donc $w = 0$.

Cela montre que $v \cap f = 0$, et donc $v \cap e_n = 0$ pour tout n ; or $0 \leq v \leq \xi$, et donc $v \cap e = 0$ pour tout $e \notin \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$. On a donc $v \cap e = 0$ pour tout $e \in J$. Si v était non nul, l'ensemble $J \cup \left\{\frac{v}{||v||}\right\}$ serait formé d'éléments de norme 1, étrangers deux à deux, ce qui contredit la maximalité de J.

Donc $v = 0$, et $\xi = u$, d'où $\xi \in \overline{Z}$. c.q.f.d.

Supposons démontré que pour chaque $e \in J$, il existe un espace mesuré (Ω_e, μ_e) tel que $\overline{Z(e)}$ soit isomorphe à $L^p(\Omega_e, \mu_e)$. Soit (Ω, μ) l'espace mesuré qui est somme directe des espaces (Ω_e, μ_e) $(e \in J)$.

Pour chaque $e \in J$ on a un isomorphisme $\varphi_e : Z(e) \longrightarrow L^p(\Omega_e, \mu_e)$, tel que $\varphi_e(Z(e))$ soit partout dense dans $L^p(\Omega_e, \mu_e)$. On en déduit un isomorphisme $\varphi : Z \longrightarrow L^p(\Omega, \mu)$ par somme directe (c'est bien une isométrie, car si $x_1 \in Z(e_1), \dots, x_n \in Z(e_n)$, $|x_1|, \dots, |x_n|$ sont étrangers deux à deux, et donc $||x_1 + \dots + x_n||^p = ||x_1||^p + \dots + ||x_n||^p$).

Comme Z est dense dans E, et que $\varphi(Z)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$, φ se prolonge en un isomorphisme de E sur $L^p(\Omega, \mu)$.

Il reste donc à démontrer que si $e > 0$, $\overline{Z(e)}$ est isomorphe à $L^p(\Omega, \mu)$ pour un certain espace mesuré (Ω, μ).

Soit $S = \{u \in Z(e) \ ; \ u \cap (e - u) = 0\}$; on a donc $0 \leq u \leq e$ pour chaque $u \in S$.

Si $u, v \in S$, on a $e-u \cup v = -[(u-e) \cup (v-e)]$
$= (e-u) \cap (e-v)$. Donc

$$(u \cup v) \cap [e-u \cup v] = (u \cup v) \cap [(e-u) \cap (e-v)]$$
$$= [u \cap (e-u) \cap (e-v)] \cup [v \cap (e-v) \cap (e-u)] = 0$$

Donc $u \cup v \in S$.
Si $u \in S$, il est clair que $e-u \in S$.
Si u_n est une suite croissante d'éléments de S, u_n a une limite u dans E, (car $u_n \leq e$) et $u \in S$ puisque $u \cap (e-u) = \lim_{n \to \infty} u_n \cap (e-u_n) = 0$.

Cela montre que S est une σ-algèbre, où la complémentation est $u \longrightarrow e-u$. D'après un théorème de Loonis [4], il existe un ensemble Ω, une σ-algèbre $\mathcal{A}$ de parties de Ω, et un σ-idéal $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ tels que S soit isomorphe à la σ-algèbre $\mathcal{A}/\mathcal{A}_0$.

On définit une mesure $\mu \geqslant 0$ sur S (donc une mesure sur l'espace mesurable $(\Omega , \mathcal{A})$ qui annule tous les éléments de $\mathcal{A}_0$) en posant $\mu(u) = ||u||^p$; μ est additive car si $u \wedge v = 0$, on a $||u \vee v||^p = ||u||^p + ||v||^p$; μ est dénombrablement additive car si $u_n \downarrow 0$, alors $u_n \longrightarrow 0$ dans E, donc $||u_n||^p \longrightarrow 0$.

Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace de Z(e) engendré par S. Il est clair qu'il est isomorphe à l'espace des fonctions réelles étagées sur $(\Omega , \mathcal{A} , \mu)$, modulo le sous-espace des fonctions nulles μ presque partout.

<u>Il suffit donc de montrer que $\mathcal{E}$ est dense dans Z(e)</u> : l'isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur l'espace des fonctions étagées sur $(\Omega , \mathcal{A} , \mu)$ se prolongera alors en un isomorphisme de $\overline{\mathcal{E}} = \overline{Z(e)}$ sur $L^p(\Omega , \mu)$.

Montrons d'abord le lemme suivant :

<u>Si $\xi \in Z(e)$, $\xi \geqslant 0$, $\xi \neq 0$, il existe $u \in S$, $u \neq 0$, et un entier $n > 0$, tel que $\xi \geqslant \frac{u}{n}$.</u>

En multipliant ξ par un entier > 0 convenable, on peut supposer que ξ n'est pas $\leqslant e$ (si $n\,\xi \leq e$ pour tout entier $n > 0$, alors $\xi = 0$). On pose $z = (\xi - e) \vee 0$, (donc $z > 0$) et $u = \lim\limits_{n \to \infty} e \wedge nz$. Comme $z > 0$, $z \wedge e > 0$ (si $z \wedge e = 0$, comme $z \in Z(e)$ on a $z = 0$) ; donc $u > 0$ puisque $u \geqslant z \wedge e$.

Si $w_k = (e-u) \wedge k\,z$ (k entier $\geqslant 0$) on a $0 \leqslant w_k \leqslant k_z$ et $w_k \leqslant e-u \leqslant e - e \wedge n\,z$ pour tout $n > 0$. On montre par récurrence sur n que $n\,w_k \leq e$: c'est vrai si $n = 0$; en admettant l'inégalité $n\,w_k \leqslant e$, on a $w_k \leqslant e - e \wedge p\,z$

pour tout entier p, donc $w_k + e \cap nkz \leq e$ d'où $w_k + n\, w_k \cap nkz \leq e$ soit $w_k + n\,(w_k \cap kz) \leq e$.

Comme $w_k \leq kz$ on a donc $(n+1)\, w_k \leq e$ ce qu'il fallait démontrer.

On a donc $0 \leq n\, w_k \leq e$ pour tout entier n, d'où $w_k = 0$. Donc $(e-u) \cap kz = 0$, soit $(e-u) \cap e \cap kz = 0$. En faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient $(e-u) \cap u = 0$; cela montre que $u \in S$.

Mais si $w = e \cap n(\xi - e)$, on a $w \leq e$, $w \leq n\xi - n\,e$ soit $w + n\,e \leq n\xi$ donc $(n+1)w \leq n\,\xi$; donc $\xi \geq (1 + \frac{1}{n})\, w$ et comme $\xi \geq 0$, on a

$$\xi \geq [(1 + \frac{1}{n})\, w] \cup 0 = (1 + \frac{1}{n})\,(w \cup 0) \quad ;$$

donc $\xi \geq w \cup 0$, c'est-à-dire

$$\xi \geq [e \cap n(\xi - e)] \cup 0 = e \cap [n(\xi - e) \cup 0] = e \cap n\, z.$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on a $\xi \geq u$, ce qui démontre le lemme.

Supposons alors que $\mathcal{E}$ ne soit pas partout dense dans Z(e) et soit $\xi \geq 0$, $\xi \in Z(e)$, $\xi \in \overline{\mathcal{E}}$. Soit m la borne supérieure des $\|\eta\|$ pour $\eta \in \overline{\mathcal{E}}$ $0 \leq \eta \leq \xi$. Soit η_n une suite d'éléments de $\mathcal{E}$, $0 \leq \eta_n \leq \xi$ telle que $\|\eta_n\| \uparrow m$. On peut supposer la suite η_n croissante, en la remplaçant au besoin par $\bigcup_{k \leq n} \eta_k$. Alors η_n tend vers une limite $\eta \in \overline{\mathcal{E}}$, et $\|\eta\|^p = m$, $0 \leq \eta \leq \xi$. Comme $\xi - \eta \neq 0$ (sinon $\xi \in \overline{\mathcal{E}}$), d'après le lemme précédent il existe $u \in S$, $u \neq 0$, et un entier $n > 0$ tels que

$$\xi - \eta \geq \frac{u}{n} . \text{ Alors } \eta + \frac{u}{n} \in \overline{\mathcal{E}},\ 0 \leq \eta + \frac{u}{n} \leq \xi$$

$$\text{et } \|\eta + \frac{u}{n}\|^p \geq \|\eta\|^p + \|\frac{u}{n}\|^p > m.$$

Cela contredit la définition de m. Cette contradiction montre que $\mathcal{E}$ est dense dans Z(e) et termine la démonstration du théorème 1.

<u>Exemple</u> : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On désigne par Λ^p (p étant un nombre réel, $1 \leq p < \infty$) l'ensemble des couples (X, P) où P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et X une fonction mesurable telle que $\int_\Omega |X|^p dP < \infty$.
Sur Λ^p on définit une relation d'équivalence : $(X,P) \sim (Y,Q)$ si pour une probabilité R telle que P et Q soient absolument continues par rapport à R (ou, ce qui revient au même, pour toute telle probabilité) on a

$$X\left(\frac{dP}{dR}\right)^{\frac{1}{p}} = Y\left(\frac{dQ}{dR}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{R-presque sûrement.}$$

Sur l'ensemble quotient on a une structure de $\mathbb{R}$-espace de Banach réticulé si on pose :

$$(X,P) + (Y,Q) = \left(X\left(\frac{dP}{dR}\right)^{\frac{1}{p}} + Y\left(\frac{dQ}{dR}\right)^{\frac{1}{p}}, R\right)$$

$$\lambda(X,P) = (\lambda X, P)$$

$$(X,P) \cap (Y,Q) = \left(X\left(\frac{dP}{dR}\right)^{\frac{1}{p}} \cap Y\left(\frac{dQ}{dR}\right)^{\frac{1}{p}}, R\right)$$

$$\|(X,P)\| = \left[\int_\Omega |X|^p \, dP\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Cet espace est considéré dans [5].

On vérifie aisément que pour chaque probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un sous-espace de Λ^p.

D'autre part les conditions du théorème 1 sont alors satisfaites par Λ^p, comme on le voit immédiatement. Cela montre que Λ^p est isomorphe, en tant qu'espace de Banach réticulé à $L^p(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$, pour un certain espace mesuré $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$.

Nous nous proposons, dans la suite, d'étudier les problèmes suivants (p désigne un nombre réel ≥ 1 ou $+\infty$) :

I. E étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, existe-t-il une application linéaire et isométrique de E dans un espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ pour un certain espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$? Si c'est le cas on dira que E est un espace normé de type p.

II. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et Γ un cône convexe de E ($x, y \in \Gamma, \lambda \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \lambda x \in \Gamma$ et $x + y \in \Gamma$). Existe-t-il un espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et une application φ de Γ dans $L^p_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (cône des fonctions ≥ 0 de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$) telle que :

$$x, y \in \Gamma \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \ ; \ \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \ ;$$
$$\|\varphi(x)\|_p = \|x\|.$$

Si c'est le cas on dira que Γ est un cône convexe normé de type p. (Remarquer que φ n'est pas forcément injective).

III. T étant un espace métrique, existe-t-il une isométrie de T dans un espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$? Si c'est le cas on dira que T est un espace métrique de type p.

Nous traitons tout de suite le cas $p = \infty$, qui ne fait pas intervenir, en fait, les espaces mesurés, et qui est trivial pour les cas I et III :

Tout espace normé E est de type $+\infty$: l'application qui à $x \in E$ fait correspondre la fonction $\omega \longrightarrow \langle x, \omega \rangle$ sur la boule unité Ω de E^* est l'application cherchée.

Tout espace métrique T est de type $+\infty$: si $\mathcal{B}(T)$ est l'espace des fonctions réelles bornées sur T, l'application de T dans $\mathcal{B}(T)$ qui à t fait correspondre la fonction $u \longrightarrow d(t,u)$ est l'application cherchée.

Théorème 2. Pour qu'un cône convexe normé Γ soit de type $+\infty$, il faut et il suffit que $x, y \in \Gamma \implies ||x+y|| \geq ||x||$.

La condition est évidemment nécessaire. Considérons alors un cône convexe Γ d'un espace normé E, satisfaisant cette condition. Comme E se plonge isométriquement dans $\mathcal{C}(K)$ pour un certain espace compact K, on peut supposer que Γ est un cône convexe de l'espace normé $\mathcal{C}(K)$.

Soient $f \in \Gamma$, $f \neq 0$, et $g_1, \ldots, g_k \in \Gamma$. On pose
$K_f(g_1, \ldots, g_k) = \{x \in K \; ; \; |f(x)| = ||f|| \; ; \; (g_1 f)(x) \geq 0 \; ; \ldots, (g_k f)(x) \geq 0\}$

C'est un fermé de K ; on montre par induction sur k qu'il est non vide, pour toute $f \neq 0$ de Γ.

On pose $K_1 = K_f(g_1) = \{x \; ; \; |f(s)| = ||f|| \; ; \; (g_1 f)(x) \geq 0\}$.

$U = \{x \; ; \; (g_2 f)(x) < 0\} \cup \ldots \cup \{x \; ; \; (g_k f)(x) < 0\}$.

U est ouvert dans K, et, en supposant que $K_f(g_1, \ldots g_k) = \emptyset$, on a $K_1 \subset U$.

Soit ε un nombre réel positif, assez petit pour que $\varepsilon ||g_1|| \leq \frac{||f||}{2}$. On pose $f_\varepsilon = f + \varepsilon g_1$; $M_\varepsilon = \{x \; ; |f_\varepsilon(x)| = ||f_\varepsilon||\}$.

Alors M_ε est un compact non vide.

D'après l'hypothèse faite sur le cône Γ, on a $||f + \varepsilon g_1|| \geq ||f||$.

Donc $x \in M_\varepsilon \implies |f(x) + \varepsilon g_1(x)| \geq ||f||$ et comme $\varepsilon ||g_1|| \leq \frac{||f||}{2}$, on a $x \in M_\varepsilon \implies (g_1 f)(x) \geq 0$.

D'autre part $x \in M_\varepsilon \implies |f(x)| \geq ||f|| - \varepsilon ||g_1||$.

Donc si on pose $K_\varepsilon = \{x \in K \; ; \; |f(x)| \geq ||f|| - \varepsilon ||g_1|| \; ; \; (g_1 f)(x) \geq 0\}$, on a $M_\varepsilon \subset K_\varepsilon$.

Quand $\varepsilon \downarrow 0$, les K_ε forment une famille décroissante de compacts dont l'intersection est K_1. Comme U est un voisinage de K_1, on a $K_\varepsilon \subset U$ pour ε assez petit. Donc $M_\varepsilon \subset U$ pour ε assez petit.

Or sur M_ε, f et f_ε ont le même signe, puisque $|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \varepsilon ||g_1||$, $|f_\varepsilon(x)| = ||f_\varepsilon|| \geq ||f||$ et $\varepsilon ||g_1|| \leq ||\frac{f}{2}||$.

Donc $M_\varepsilon \subset \{x \; ; \; (g_2 f_\varepsilon)(x) < 0\} \cup \ldots \cup \{x \; ; \; (g_k f_\varepsilon)(x) < 0\}$.

Par suite $\{x \; ; \; |f_\varepsilon(x)| = ||f_\varepsilon|| \; ; \; (g_2 f_\varepsilon)(x) \geq 0 ; \ldots ; (g_k f_\varepsilon)(x) \geq 0\} = \emptyset$.
et cela contredit l'hypothèse de récurrence.

Comme $K_f(g_1, \ldots g_k) = K_f(g_1) \cap \ldots \cap K_f(g_k)$, on voit que lorsque g décrit $\mathcal{C}$, les $K_f(g)$ ont la propriété de l'intersection finie. Donc si on pose
$K_f = \{x \in K \; ; \; |f(x)| = ||f|| \; ; \; (gf)(x) \geq 0 \text{ pour toute } g \in \mathcal{C}\}$, K_f est un compact non vide de K.

On pose $K_f^+ = K_f \cap \{x \; ; \; f(x) = ||f||\}$

$$K_f^- = K_f^- \cap \{x \; ; \; f(x) = -||f||\} .$$

Alors K_f^+ et K_f^- forment une partition de K_f en deux compacts, dont l'un au moins est non vide.

Si f, g sont deux éléments non nuls de Γ on a $K_f^+ \cap K_g^- = \emptyset$: car sur K_f^+, g est ≥ 0 et sur K_g^-, g est égale à $-||g||$ donc < 0.

Par suite si $\Omega^+ = \bigcup_{f \in \Gamma - \{0\}} K_f^+$; $\Omega^- = \bigcup_{f \in \Gamma - \{0\}} K_f^-$, on a $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$.

On pose $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ et on définit une application φ de Γ dans le cône des fonctions numériques bornées ≥ 0 sur Ω en posant

$\varphi(f)(x) = f(x)$ si $x \in \Omega^+$

$\varphi(f)(x) = -f(x)$ si $x \in \Omega^-$.

Il est clair que l'application φ est solution du problème.

c.q.f.d.

Remarquons que la condition nécessaire et suffisante ci-dessus pour qu'un cône convexe normé Γ soit de type $+\infty$ (à savoir $x, y \in \Gamma \Longrightarrow ||x + y|| \geq ||x||$) est évidemment nécessaire pour que Γ soit de type p avec $1 \leq p < \infty$. Dans toute la suite, nous appellerons cône convexe normé un cône convexe Γ d'un espace normé E satisfaisant cette condition.

Nous étudions maintenant les espaces et les cônes de type p pour $1 \leq p < \infty$. La construction suivante (très voisine de celle bien connue en logique mathématique sous le nom d'ultraproduit) sera un outil très important pour la suite.

On se donne une famille $(p_i)_{i \in I}$ de réels ≥ 1, uniformément bornée, et une famille $(\Omega_i, \mu_i)_{i \in I}$ d'espaces mesurés. L'espace $L^{p_i}(\Omega_i, \mu_i)$ sera noté L^{p_i} pour abréger. On se donne également un ultrafiltre U sur l'ensemble d'indices I.

Un élément de l'espace vectoriel $\prod_{i \in I} L^{p_i}$ sera noté $(f_i)_{i \in I}$ ou même (f_i), avec $f_i \in L^{p_i}$ pour tout $i \in I$. Posons alors

$$\mathcal{L}_o = \left\{ (f_i)_{i \in I} \; ; \forall i \in I,\ f_i \in L^{p_i} \text{ et il existe un réel } N > 0 \text{ tel que } ||f_i|| \leq N \text{ pour tout } i \in I \right\} .$$

$\mathcal{L}_o$ est un sous-espace vectoriel de $\prod_{i \in I} L^{p_i}$, sur lequel on définit une semi-norme en posant

$||(f_i)_{i\in I}|| = \lim_U ||f_i||$ (c'est le réel r tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\{i \in I \ ; \ |r - ||f_i|| \ | \leq \varepsilon\} \in U$; il existe un tel r, puisque $0 \leq ||f_i|| \leq N$ pour tout $i \in I$).

Soit $\mathcal{N}$ le sous espace de $\mathcal{L}_o$ sur lequel cette semi-norme est nulle. Alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}_o/\mathcal{N}$ est un espace normé.

$\mathcal{L}_o$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réticulé si on définit :
$(f_i) \cap (g_i) = (f_i \cap g_i)$.

De plus si $(f_i), (f'_i), (g_i), (g'_i) \in \mathcal{L}_o$, on a pour tout $i \in I$:
$||f_i \cap g_i - f'_i \cap g'_i|| \leq ||f_i - f'_i|| + ||g_i - g'_i||$.

Donc en passant à la limite suivant l'ultrafiltre U :

$||(f_i)\cap(g_i) - (f'_i)\cap(g'_i)|| \leq ||(f_i) - (f'_i)|| + ||(g_i) - (g'_i)||$.

Cela montre que si $(f_i) \sim (f'_i)$ (mod. $\mathcal{N}$) et $(g_i) \sim (g'_i)$ (mod. $\mathcal{N}$) alors $(f_i)\cap(g_i) \sim (f'_i)\cap(g'_i)$ (mod. $\mathcal{N}$).

Donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}_o/\mathcal{N}$ est un espace normé réticulé, et la même inégalité montre que l'opération $\cap$ est continue pour la norme de $\mathcal{L}$.

Le complété $\bar{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ est donc un $\mathbb{R}$-espace de Banach réticulé.

On a $|(f_i)| = (|f_i|)$ et donc $||\ |(f_i)|\ || = ||(f_i)||$.

D'autre part si $(f_i) \geq 0$, $(g_i) \geq 0$ on peut supposer que $f_i \geq 0$ pour tout $i \in I$ (en remplaçant au besoin la famille (f_i) par la famille équivalente $(f_i \cup 0)$), et de même $g_i \geq 0$. On a alors
$||f_i + g_i||^{p_i} \geq ||f_i||^{p_i} + ||g_i||^{p_i} \geq ||f_i \cup g_i||^{p_i}$.

Donc en passant à la limite suivant U :
$||(f_i) + (g_i)||^p \geq ||(f_i)||^p + ||(g_i)||^p \geq ||(f_i) \cup (g_i)||^p$.

où $p = \lim_U p_i$.

Cela montre que l'espace $\bar{\mathcal{L}}$ satisfait les conditions du théorème 1, donc est isomorphe à un espace $L^p(\Omega, \mu)$.

<u>Cet espace $L^p(\Omega, \mu)$ sera appelé ultraproduit de la famille $L^{p_i}(\Omega_i, \mu_i)$ suivant l'ultrafiltre U et sera noté $\prod_{i \in I} L^{p_i}(\Omega_i, \mu_i)/U$.</u>

<u>Théorème 3</u>. <u>Pour qu'un $\mathbb{R}$-espace normé E soit de type p $(1 \leq p < \infty)$, il faut et il suffit que chaque sous-espace de dimension finie de E soit de type p</u>.

La condition est évidemment nécessaire. Soit alors E un espace normé sur $\mathbb{R}$ dont tous les sous-espaces de dimension finie sont de type p, et soit $\mathcal{F}$ la famille de ces sous-espaces. A chaque élément F de $\mathcal{F}$ est donc associée une application linéaire et isométrique J_F de F dans un espace $L^p(\Omega_F, \mu_F)$. On pose $X(F) = \{G \in \mathcal{F};\ G \supset F\}$.

Alors $X(F) \neq \emptyset$ (car $F \in X(F)$) et $X(F_1) \cap \dots \cap X(F_n) = X(F_1 + \dots + F_n) \neq \emptyset$).Il existe donc un ultrafiltre U sur $\mathcal{F}$ tel que $X(F) \in U$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.

On pose $L^p(\Omega, \mu) = \prod_{F \in \mathcal{F}} L^p(\Omega_F, \mu_F)/U$ (ultraproduit de la famille $L^p(\Omega_F, \mu_F)$ suivant l'ultrafiltre U). Les éléments de $L^p(\Omega, \mu)$ sont donc les familles $(f_F)_{F \in \mathcal{F}}$ telles que $f_F \in L^p(\Omega_F, \mu_F)$ et $||f_F|| \leq N$ pour un certain réel $N > 0$ et pour tout $F \in \mathcal{F}$.

On définit une application J de E dans $\prod_{F \in \mathcal{F}} L^p(\Omega_F, \mu_F)/U$ en posant $J(x) = (f_F)_{F \in \mathcal{F}}$ où $f_F = J_F(x)$ si $x \in F$

$$f_F = 0 \text{ si } x \notin F.$$

On a $||f_F|| = ||x||$ ou 0 pour tout F, puisque J_F est isométrique. De plus $\{F \; ; \; x \in F\} \in U$ d'après la définition de U.

Cela montre que $||(f_F)|| = ||x||$, c'est-à-dire $||J(x)|| = ||x||$. D'autre part on a évidemment $J(\lambda x) = \lambda J(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus $J(x + y) \sim J(x) + J(y) \pmod{\mathcal{N}}$: en effet $\{F \in \mathcal{F} \; ; \; x, y \in F\} \in U$; or si $x, y \in F$ on a

$J_F(x + y) = J_F(x) + J_F(y)$. Donc

$\{F \in \mathcal{F} \; ; \; J_F(x) + J_F(y) = J_F(x + y)\} \in U$ et par suite

$J(x + y) \sim J(x) + J(y) \pmod{\mathcal{N}}$.

Cela montre que J est une application linéaire et isométrique de E dans $L^p(\Omega, \mu)$, donc que E est de type p.

c.q.f.d.

Les deux théorèmes suivants ont une démonstration tout à fait semblable.

<u>Théorème 4. Soient E un espace normé, Γ un cône convexe de E. Pour que Γ soit de type p ($1 \leq p < \infty$) il faut et il suffit que tout sous-cône convexe de Γ engendré par un nombre fini d'éléments de Γ soit de type p.</u>

Si $x_1, \dots, x_n \in \Gamma$ le sous-cône engendré par $x_1, \dots, x_n$ est l'ensemble des $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$.

Soit $\mathcal{F}$ la famille de ces sous-cônes. Pour chaque $F \in \mathcal{F}$ on définit $X(F) = \{G \in \mathcal{F} \; ; \; G \supset F\}$. Il est clair qu'il existe un ultrafiltre U sur $\mathcal{F}$ tel que $X(F) \in U$ pour tout $F \in \mathcal{F}$. Pour chaque $F \in \mathcal{F}$ on a une application J_F de F dans $L^p_+(\Omega_F, \mu_F)$ telle que $J_F(\lambda x + \mu y) = \lambda J_F(x) + \mu J_F(y)$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in F$, et $||J_F(x)|| = ||x||$.

On pose $L^p(\Omega, \mu) = \prod_{F\in\mathcal{F}} L^p(\Omega_F, \mu_F)\big/ U$. Les éléments de $L^p_+(\Omega, \mu)$ correspondent aux suites $(f_F)_{F\in\mathcal{F}}$ telles que $f_F \in L^p_+(\Omega_F, \mu_F)$ $||f_F|| \leqslant N$ pour un certain réel $N > 0$ et pour tout $F \in \mathcal{F}$.

On définit alors une application J de Γ dans $L^p_+(\Omega, \mu)$ en posant

$J(x) = (f_F)_{F\in\mathcal{F}}$ où $f_F = J_F(x)$ si $x \in F$

$f_F = 0$ si $x \notin F$.

On vérifie comme pour le théorème précédent, qu'on a

$J(\lambda x) = \lambda J(x)$; $J(x + y) = J(x) + J(y)$; $||J(x)|| = ||x||$

quels que soient $x, y \in \Gamma$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Γ est donc bien de type p. c.q.f.d.

Théorème 5. Pour qu'un espace métrique T soit de type p, $(1 \leq p < \infty)$ il faut et il suffit que chaque sous-espace fini de T soit de type p.

On fait la même démonstration en prenant pour $\mathcal{F}$ la famille des sous-espaces finis F de T, et pour U un ultrafiltre sur $\mathcal{F}$ tel que pour chaque $F \in T$, $\{G \in \mathcal{F} ; G \supset F\} \in U$. Pour chaque $F \in \mathcal{F}$, on a une application isométrique J_F de F dans $L^p(\Omega_F, \mu_F)$.

On pose $L^p(\Omega, \mu) = \prod_{F\in\mathcal{F}} L^p(\Omega_F, \mu_F)\big/ U$.

On définit alors une application J de T dans $L^p(\Omega, \mu)$ en posant $J(x) = (f_F)_{F\in\mathcal{F}}$ où $f_F = J_F(x)$ si $x \in F$

$f_F = 0$ si $x \notin F$.

Si $x, y \in T$, $\{F \in \mathcal{F} ; x, y \in F\} \in U$; donc, si $J(x) = (f_F)$, $J(y) = (g_F)$, alors $\{F \in \mathcal{F} ; d(x,y) = ||g_F - f_F||\} \in U$.

Cela montre que $d(x,y) = ||J(x) - J(y)||$, c'est-à-dire que J est une application isométrique.

c.q.f.d.

Donnons encore une application de la notion d'ultraproduit.

Théorème. Soit d_n une suite de distances sur l'ensemble T, telles que (T,d_n) soit de type p_n (p_n réel $\geqslant 1$). Si la suite d_n converge simplement sur $T \times T$ vers d, et si $p_n \longrightarrow p$ quand $n \longrightarrow \infty$, alors (T,d) est de type p.

Pour chaque n, on a une application isométrique $J_n : (T, d_n) \longrightarrow L^{p_n}(\Omega_n, \mu_n)$. On choisit un ultrafiltre non trivial U sur $\mathbb{N}$, et on pose $L^p(\Omega, \mu) = \prod_{n \in \mathbb{N}} L^{p_n}(\Omega_n, \mu_n) / U$.

On définit alors une application J de T dans $L^p(\Omega, \mu)$ en posant $J(x) = (J_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $x, y \in T$ on a alors :

$||J(x) - J(y)|| = \lim_U ||J_n(x) - J_n(y)|| = \lim_U d_n(x,y) = d(x,y)$, ce qui montre que $(T,d\ )$ est de type p.

On a un résultat analogue sur les espaces normés :

Théorème. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une semi-norme $||\ ||_n$ de type $p_n \geqslant 1$. Si $p_n \longrightarrow p$ et si $\forall x \in E\ ||x||_n \longrightarrow ||x||$ quand $n \longrightarrow +\infty$, alors la semi-norme $||\ ||$ est de type p sur E.

II

Fonctions 2k-positives sur les espaces vectoriels et les cônes convexes normés.

Dans cette partie, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace normé E soit de type p lorsque p est un réel $\geqslant 1$ qui n'est pas un entier pair ; et aussi pour qu'un cône convexe normé Γ soit de type p, lorsque p est réel $\geqslant 1$ et n'est pas un entier (théorèmes 6 et 9).

Définition : E étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, une fonction $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sera dite 2k-positive sur E (k étant un entier > 0) si, quels que soient

$x_1,\dots,x_n \in E$ et $\rho_1,\dots \rho_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$, on a

$$\sum_{\pm,\, 1 \leq i_1,\dots,i_{2k} < n} \Phi(x_{i_1} \pm x_{i_2} \pm \dots \pm x_{i_{2k}})\, \rho_{i_1}\rho_{i_2}\cdots\rho_{i_{2k}} \geqslant 0.$$

(cette notation signifie qu'on somme sur toutes les combinaisons possibles de signe + et -).

Lemme 1. La fonction cos x est 2k-positive sur $\mathbb{R}$, pour tout entier $k > 0$; $\pm x^{2r}$ est 2k-positive sur $\mathbb{R}$, pour tout entier $r < 2k$; x^{4k} est 2k-positive sur $\mathbb{R}$.

On a en effet : $\sum_{\pm} \cos(x_1 \pm \dots \pm x_l) = 2^{l-1} \cos x_1 \cdots \cos x_l$.

Par suite $$\sum_{\pm,\, i_1,\dots,i_{2k}} \cos(x_{i_1} \pm \dots \pm x_{i_{2k}})\, \rho_{i_1}\cdots\rho_{i_{2k}} = 2^{2k-1}\Big(\sum_{i=1} \rho_i \cos x_i\Big)^{2k}$$

ce qui montre que cos x est 2k-positive sur $\mathbb{R}$.

D'autre part

$$\sum_{\pm,\, i_1,\dots,i_{2k}} \left(x_{i_1} \pm \dots \pm x_{i_{2k}}\right)^{2r} \rho_{i_1}\cdots\rho_{i_{2k}}$$

est le produit par $(-1)^r\ (2r)!$ du terme de degré $2r$ dans le développement en série de $\sum_{\pm, i_1, \dots, i_{2k}} \cos(x_{i_1} \pm \dots \pm x_{i_{2k}})\ \rho_{i_1} \dots \rho_{i_{2k}}$

donc de $2^{2k-1} (\sum_{i=1}^{n} \rho_i \cos x_i)^{2k}$. Comme $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$, ce terme est nul si $r < 2k$. Si $r = 2k$ ce terme est $2^{2k-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i \frac{x_i^2}{2}\right)^{2k}$ et est donc $\geqslant 0$.

c.q.f.d.

<u>Lemme 2. Soit p un nombre réel tel que $2r-2 < p < 2r$ (r entier > 0). Alors $(-1)^r |x|^p$ est $2k$-positive sur $\mathbb{R}$, pour tout entier k tel que $2k \geqslant r$.</u>

Posons $N_r(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!} - \cos x$. Alors pour chaque entier $r \geqslant 0$, $(-1)^r N_r(x)$ est $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$: en effet c'est évident pour $r = 0$; en supposant que c'est vrai pour l'entier $r-1$, on a

$\frac{d^2}{dx^2}\ (-1)^r N_r(x) = (-1)^{r-1} N_{r-1}(x) \geqslant 0$. Donc $(-1)^r N_r(x)$ est convexe, paire, nulle en 0, et donc est $\geqslant 0$. D'autre part le lemme précédent montre que $-N_r(x)$ est $2k$-positive sur $\mathbb{R}$ pour $r < 2k$, donc aussi $-N_r(ux)$ pour tout réel $u \geqslant 0$.

Or l'intégrale $\int_0^\infty N_{r-1}(ux)\, u^{-p-1}\, du$ est convergente pour $2r-2 < p < 2r$, et vaut $C_r |x|^p$, où $C_r = \int_0^\infty N_{r-1}(u) u^{-p-1}\, du$.

Donc C_r est du signe de $(-1)^{r-1}$. Comme d'autre part, $-\int_0^\infty N_{r-1}(ux) u^{-p-1}\, du$ est $2k$-positive sur $\mathbb{R}$ pour $r-1 < 2k$, soit $r \leqslant 2k$, on en déduit que $(-1)^r |x|^p$ est $2k$-positive sur $\mathbb{R}$.

Corollaire : Si p est un nombre réel tel que $2r-2 < p < 2r$ (r entier>0), alors $(-1)^r\|x\|^p$ est 2k-positive sur $L^p(\Omega, \mu)$, pour $2k \geq r$.

Car $$\sum_{\pm, i_1, \dots, i_{2k}} (-1)^r \| f_{i_1} \pm \dots \pm f_{i_{2k}} \|^p \rho_{i_1} \cdots \rho_{i_{2k}}$$

$$= \int_\Omega \mu(d\omega) \sum_{\pm, i_1, \dots i_{2k}} (-1)^r | f_{i_1}(\omega) \pm \dots \pm f_{i_{2k}}(\omega) |^p \rho_{i_1} \cdots \rho_{i_{2k}}$$

et la fonction à intégrer est ≥ 0 d'après le lemme précédent.

On a une définition et des lemmes analogues pour les cônes convexes :

Définition : Γ étant un cône convexe, une fonction $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ sera dite 2k-positive sur Γ (k étant un entier>0) si, quels que soient

$x_1, \dots, x_n \in E$, et $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$, on a

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n} \Phi(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_{2k}}) \rho_{i_1} \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_{2k}} \geq 0.$$

Lemme 3. La fonction e^{-x} est 2k-positive sur $\mathbb{R}^+$ pour tout entier $k > 0$; $\pm x^r$ est 2k-positive sur $\mathbb{R}^+$ si $r < 2k$; x^{2k} est 2k-positive sur $\mathbb{R}^+$.

On a en effet $$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n} e^{-x_{i_1} \cdots -x_{i_{2k}}} \rho_{i_1} \cdots \rho_{i_{2k}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i e^{-x_i} \right)^{2k}$$

ce qui montre que e^{-x} est 2k-positive. D'autre part

$$\sum_{1 \leq i_1 \dots, i_{2k} \leq n} (x_{i_1} + \dots + x_{i_{2k}})^r \rho_{i_1} \cdots \rho_{i_{2k}}$$ est le produit par $(-1)^r r!$

du terme de degré r dans le développement en série du 1° membre de l'égalité précédente, donc de $\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i e^{-x_i} \right)^{2k}$.

Pour $r < 2k$, ce terme est nul puisque $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$. Pour $r = 2k$, ce terme est $\left(-\sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i\right)^{2k}$ qui est $\geqslant 0$.

c.q.f.d.

<u>Lemme 4. Soit p un nombre réel tel que $r-1 < p < r$ (r entier > 0). Alors $(-1)^r x^p$ est 2k-positive sur $\mathbb{R}^+$, pour tout entier k tel que $2k \geqslant r$.</u>

On pose $N_r(x) = 1-x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^r \frac{x^r}{r!} - e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

On voit aisèment que $(-1)^r N_r(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

D'autre part, le lemme précédent montre que $-N_{r-1}(x)$ est 2k-positive sur $\mathbb{R}^+$ pour $r \leqslant 2k$, donc aussi $-N_{r-1}(ux)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^+$.

Or l'intégrale $\int_0^\infty N_{r-1}(ux)\, u^{-p-1}\, du$ converge pour $r-1 < p < r$, et sa valeur est $C_r x^p$, où $C_r = \int_0^\infty N_{r-1}(u)\, u^{-p-1}\, du$, est du signe de $(-1)^{r-1}$. Cela montre que $(-1)^r x^p$ est 2k-positive sur $\mathbb{R}^+$, pour $r \leqslant 2k$.

<u>Corollaire</u> . <u>Si p est un nombre réel tel que $r-1 < p < r$ (r entier > 0) et $2k \geqslant r$, alors $(-1)^r \|x\|^p$ est 2k-positive sur $L^p{}_+(\Omega, \mu)$.</u>

Car $\sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_{2k} \leqslant n} \|f_{i_1} + \dots + f_{i_{2k}}\|^p \rho_{i_1} \cdots \rho_{i_{2k}}$

$$= \int_\Omega \mu(d\omega) \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_{2k} \leqslant n} |f_{i_1}(\omega) + \dots + f_{i_{2k}}(\omega)|^p \rho_{i_1} \cdots \rho_{i_{2k}}$$

et si $f_1, \dots, f_n \in L^p{}_+(\Omega, \mu)$, la fonction à intégrer est $\geqslant 0$ d'après le lemme précédent.

<u>Lemme 5. Soit Φ une fonction continue 2k-positive sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, telle que $\Phi(x) = o(e^{A|x|})$ quand $x \longrightarrow \infty$ ($|x|$ est la norme euclidienne de x, et A un réel > 0). Alors $\langle \Phi, \mu^{*2k} \rangle \geq 0$ pour toute mesure μ sur E, réelle paire, telle que $\mu(E) = 0$ et $\int_E |\mu|(dx) e^{A|x|} < \infty$</u> .

Remarquons que pour toute mesure μ telle que $\int_E |\mu|(dx)e^{A|x|} < \infty$, Φ est intégrable pour $|\mu^{*2k}|$ et

$$\langle \Phi, \mu^{*2k} \rangle = \int_{E^{2k}} \Phi(x_1 + \ldots + x_{2k}) \mu(dx_1) \ldots \mu(dx_{2k}).$$

Donc si ρ est une mesure réelle, paire, telle que $\rho(E) = 0$, et formée d'un nombre fini de masses on a

$$\langle \Phi, \rho^{*2k} \rangle = \sum_{\pm, i_1, \ldots, i_{2k}} \Phi(\pm a_{i_1} \pm \ldots \pm a_{i_{2k}}) \rho_{i_1} \ldots \rho_{i_{2k}} \geq 0$$

(où $a_1, \ldots, a_p, -a_1, \ldots -a_p$ sont les points de E, où ρ a respectivement les masses $\rho_1, \ldots, \rho_p, \rho_1, \ldots, \rho_p$ avec $\sum_{i=1}^{p} \rho_i = 0$).

On a à montrer que $\langle \Phi, (\mu - \mu(E)\delta_0)^{*2k} \rangle \geq 0$ (δ_0 mesure de Dirac en 0) pour toute mesure μ, réelle paire, telle que $\int_E |\mu|(dx) e^{A|x|} < \infty$.

Or, étant donnée une telle mesure μ sur E, il existe une suite ρ_n de mesures réelles, paires et formées d'un nombre fini de masses telle que $\rho_n(dx) e^{A|x|} \longrightarrow \mu(dx)e^{A|x|}$ au sens de la convergence simple sur les fonctions de $\mathcal{C}_0(E)$ (espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini).

Alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_o(E^r)$,

$$\int_{E^r} \varphi(x_1,\dots,x_r)\, \rho_n(dx_1)\, e^{A|x_1|} \dots \rho_n(dx_r)\, e^{A|x_r|}$$

$$\longrightarrow \int_{E^r} \varphi(x_1,\dots,x_r)\mu(dx_1)\, e^{A|x_1|} \dots \mu(dx_r)\, e^{A|x_r|} \quad ;$$

en effet, c'est vrai si $\varphi(x_1,\dots,x_r)$ est de la forme $f_1(x_1)\dots f_r(x_r)$, avec $f_1,\dots, f_r \in \mathcal{C}_o(E)$, et on peut approcher uniformément toute $\varphi \in \mathcal{C}_o(E^r)$ par des combinaisons linéaires finies de tels produits.

Comme $\langle \Phi, (\rho_n - \rho_n(E)\,\delta_o)^{*2k} \rangle \geq 0$, on a en développant le premier membre de cette inégalité :

$$\sum_{r=0}^{2k} (-1)^r \rho_n(E)^{2k-r}\, C^r_{2k} \int_{E^r} \Phi(x_1 + \dots + x_r)\rho_n(dx_1)\dots\rho_n(dx_r) \geq 0.$$

Comme $\Phi(x_1 + \dots + x_r)\, e^{-A(|x_1| + \dots + |x_r|)} \in \mathcal{C}_o(E^r)$

on a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E^r} \Phi(x_1+\dots+x_r)\, e^{-A(|x_1|+\dots+|x_r|)} \rho_n(dx_1) e^{A|x_1|} \dots \rho_n(dx_r) e^{A|x_r|}$

$$= \int_{E^r} \Phi(x_1+\dots+x_r)\, e^{-A(|x_1|+\dots+|x_r|)} \mu(dx_1) e^{A|x_1|} \dots \mu(dx_r) e^{A|x_r|}$$

Donc lorsque $n \longrightarrow +\infty$ on obtient l'inégalité :

$$\sum_{r=0}^{2k} (-1)^r \mu(E)^{2k-r}\, C^r_{2k} \int_{E^r} \Phi(x_1+\dots+x_r)\mu(dx_1)\dots\mu(dx_r) \geq 0$$

soit $\langle \Phi, \langle \mu - \mu(E)\,\delta_o \rangle^{*2k} \rangle \geq 0.$

c.q.f.d.

Lemme 6. Soient Γ un cône convexe fermé de $E = \mathbb{R}^n$, et $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, 2k-positive sur Γ, telle que $\Phi(x) = O(e^{A|x|})$ pour un réel $A > 0$. Alors $< \Phi, \mu^{*2k} > \geqslant 0$ pour toute mesure réelle μ à support dans Γ telle que $\int_\Gamma |\mu|(dx)\, e^{A|x|} < \infty$, et telle que $\mu(\Gamma) = 0$.

On remarque que pour toute mesure μ, à support dans Γ, telle que $\int_\Gamma |\mu|(dx)\, e^{A|x|} < \infty$, est intégrable pour $|\mu^{*2k}|$ et

$$< \Phi, \mu^{*2k} > = \int_{\Gamma^{2k}} \Phi(x_1 + \ldots + x_{2k})\, \mu(dx_1) \ldots \mu(dx_{2k}) \quad .$$

Donc si ρ est la mesure formée des masses $\rho_1, \ldots, \rho_p$ aux points $a_1, \ldots a_p \in \Gamma$, avec $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$, on a

$$< \Phi, \rho^{*2k} > = \sum_{i_1, \ldots, i_{2k}} \Phi(a_{i_1} + \ldots + a_{i_{2k}})\, \rho_{i_1} \ldots \rho_{i_{2k}} \geqslant 0 \quad .$$

La démonstration se fait alors exactement comme la précédente.

Lemme 7. Soit Φ une fonction réelle continue, à croissance lente sur $E = \mathbb{R}^n$, qui est 2k-positive sur E. Alors $< \Phi, f^{*2k} > \geqslant 0$ pour toute $f \in \mathcal{S}(E)$ réelle paire et d'intégrale nulle. ($\mathcal{S}(E)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à croissance rapide sur E.).

- N étant un réel > 0, soit B_N la boule de centre 0 et de rayon N ; on pose

$$\varepsilon_N = \frac{1}{\Lambda(B_N)} \int_{B_N} f(x)dx = - \frac{1}{\Lambda(B_N)} \int_{\complement B_N} f(x)dx \quad ,$$

puisque f est d'intégrale nulle. (Λ désigne la mesure de Lebesgue dans E).

On pose $f_N = (f - \mathcal{E}_N).1_{B_N}$ (où 1_X désigne la fonction caractéristique de l'ensemble X). Alors f_N est borélienne, à support dans B_N, réelle paire et d'intégrale nulle. D'après le lemme 5 on a donc :

$$\int \Phi\,(x_1+\ldots+x_{2k})\, f_N(x_1)\ldots f_N(x_{2k})\, dx_1\ldots dx_{2k} \geqslant 0.$$

Comme f est à décroissance rapide on a

$|f(x)| \leq C_r(1+\rho)^{-r}$ (où $\rho = |x|$).

Donc $|\mathcal{E}_N| \leq \dfrac{C'_r}{\Lambda(B_N)} \displaystyle\int_{\complement B_N} dx(1+\rho)^{-r}$

Par suite $|\mathcal{E}_N| \leq \dfrac{C''_r}{(1+N)^r}$ et donc $|\mathcal{E}_N 1_{B_N}(x)| \leq C''_r(1+\rho)^{-r}$.

Cela montre que $|f_N(x)| \leq D_r\,(1+\rho)^{-r}$ où D_r est un réel >0 qui ne dépend que de r.

D'autre part on a (puisque Φ est à croissance lente)

$|\Phi\,(x_1+\ldots+x_{2k})| \leq M(\rho_1+\ldots+\rho_{2k}+1)^s$ (M et s entiers >0)

Donc $|\Phi\,(x_1+\ldots+x_{2k})\, f_N(x_1)\ldots f_N(x_{2k})| \leq \dfrac{M(\rho_1+\ldots+\rho_{2k}+1)^s}{D_r^{2k}\prod_{i=1}^{2k}(1+\rho_i)^r}$

On choisit l'entier r assez grand pour que $s-2kr \leq 2kn+1$. Alors le 2ème membre de l'inégalité est une fonction intégrale sur E^{2k}.

Lorsque $N \longrightarrow \infty$, $f_N \longrightarrow f$ en tout point de E.

Par suite on peut appliquer le théorème de Lebesgue à la suite $\Phi\,(x_1+\ldots+x_{2k})\, f_N(x_1)\ldots f_N(x_{2k})$ et on a

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E^{2k}} \Phi(x_1+\ldots+x_{2k})f_N(x_1)\ldots f_N(x_{2k})dx_1\ldots dx_{2k}$$

$$= \int_{E^{2k}} \Phi\,(x_1+\ldots+x_{2k})f(x_1)\ldots f(x_{2k})dx_1\ldots dx_{2k}$$

Le second membre de cette égalité est $\langle \Phi, f^{*2k} \rangle$ qui est donc ≥ 0 comme limite d'une suite de réels ≥ 0.

Lemme 8. Soit μ une mesure ≥ 0 sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, telle que pour tout réel $\lambda > 0$, et φ fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$, on ait $\int \varphi(\lambda x)\,\mu\,(dx) = \lambda^p \int \varphi(x)\mu\,(dx)$, p étant un réel > 0. Alors il existe une mesure de Radon $\nu \geq 0$ sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mu\,(dx) = \nu(ds)\rho^{-p-1}\,d\rho$, avec $\rho = |x|$, $s = \frac{x}{|x|}$.

Si $B = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x| \geq 1\}$ alors $\mu(B) < \infty$: en effet soit $B_1 = \{x \ ; \ 1 \leq |x| < 2\}$; alors $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} 2^n B_1$. Or on a $1_{2^nB_1}(x) = 1_{B_1}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ (1_X étant la fonction caractéristique de l'ensemble X). Donc $\int 1_{2^nB_1}(x)\mu\,(dx) = \frac{1}{2^{np}}\int 1_{B_1}(x)\mu\,(dx)$ soit $\mu(2^nB_1) = \frac{1}{2^{np}}\mu(B_1)$. Donc $\mu(B) = \mu\,(B_1)(1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{2^{np}} + \ldots) < \infty$.

On définit une mesure de Radon ν sur S en posant
$\nu\,(U) = p\ \mu\,(U \times [1, \infty[)$ pour tout borélien U de S.

On pose $\mu_1(dx) = \nu(ds)\,\rho^{-p-1}\,d\rho$. Pour montrer que $\mu = \mu_1$, il suffit de vérifier que $\mu\,(U \times [\ \lambda\ , +\infty[) = \mu_1(U \times [\ \lambda, +\infty[\ )$ pour tout borélien U de S et tout réel $\lambda > 0$. Car on aura alors $\mu\,(U \times [\alpha, \beta[\ ) = \mu_1\ (U \times [\alpha, \beta[\ )$ et les réunions d'ensembles disjoints de la forme $U \times [\alpha, \beta[$ forment un anneau qui engendre la σ- algèbre de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

$$\text{Or } \mu_1 (U \times [\lambda, +\infty[ ) = \gamma(U) \int_\lambda^\infty \rho^{-p-1}\, d\rho = \frac{1}{p} \gamma(U) \lambda^{-p}$$

$$= \lambda^{-p} \mu (U \times [1, +\infty[ ) \text{ par définition}$$

de γ, mais $\mu(U \times [\lambda, +\infty[ ) = \lambda^{-p} \mu (U \times [1, +\infty[ )$ car si $\varphi(x)$ est la fonction caractéristique de $U \times [1, \infty[$, $\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ est celle de $U \times [\lambda, +\infty[$.

c.q.f.d.

<u>Théorème 6</u>. <u>Pour qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E soit de type p, avec $2r - 2 < p < 2r \leq 4k$ (r et k entiers > 0, p réel ≥ 1), il faut et il suffit que $(-1)^r \|x\|^p$ soit une fonction 2k-positive sur E.</u>

On a déjà vu que la condition est nécessaire (corollaire du lemme 2). D'après le théorème 3, pour montrer qu'elle est suffisante, on peut supposer que E est de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

On prend donc $E = \mathbb{R}^n$, et on pose $\Phi(x) : (-1)^r \|x\|^p$. Alors Φ est continue sur $\mathbb{R}^n$ et à croissance lente : car si $M = \sup_{|x|=1} |\Phi(x)|$, on a $|\Phi(x)| \leq M|x|^p$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Comme Φ est 2k-positive sur $\mathbb{R}^n$, on a $\langle \Phi, f^{*2k} \rangle \geq 0$ pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ réelle, paire et d'intégrale nulle (lemme 7).

Soit T la transformée de Fourier de Φ (au sens des distributions tempérées). On a donc $\langle T, g^{2k} \rangle \geq 0$ pour toute $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ réelle paire, telle que $g(0) = 0$.

Soit φ une fonction ≥ 0, indéfiniment dérivable à support compact disjoint de 0 ; alors $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$: en effet, on peut supposer que φ est paire, puisque $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle$ avec $\psi(x) = \frac{1}{2} (\varphi(x) + \varphi(-x))$. Soit h, une fonction paire, indéfiniment dérivable à support compact disjoint de 0, telle que h = 1 sur le support de φ, et $0 \leq h \leq 1$ partout.

Pour chaque réel $\varepsilon > 0$, $(\varphi + \varepsilon)^{\frac{1}{2k}}$ est indéfiniment dérivable, donc $h.(\varphi+\varepsilon)^{\frac{1}{2k}} = g$ est indéfiniment dérivable, paire, à support compact disjoint de 0. Donc $\langle T, g^{2k} \rangle \geqslant 0$, c'est-à-dire $\langle T, \varphi . h^{2k} \rangle \geqslant -\varepsilon \langle T, h^{2k} \rangle$. Mais ε est arbitraire et $\varphi h^{2k} = \varphi$. D'où $\langle T, \varphi \rangle \geqslant 0$.

Il en résulte qu'il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ telle que $\langle T, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle$ pour toute φ à support compact contenu dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $T_a = [1 - \cos\langle a, x\rangle]^{2k} \times T$. Alors $\langle T_a, g^{2k} \rangle \geqslant 0$ pour toute $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ réelle paire. En effet $\langle T_a, g^{2k} \rangle = \langle T, [(1-\cos\langle a,x\rangle)g]^{2k} \rangle$ et $(1-\cos\langle a,x\rangle)g$ est réelle, paire et nulle en 0.

On en déduit (par le même raisonnement que celui qu'on vient de faire sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$) que $\langle T_a, \varphi \rangle \geqslant 0$ pour toute $\varphi \geqslant 0$, indéfiniment dérivable à support compact. Donc T_a est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^n$.

Or $\langle T_a, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x)\,(1-\cos\langle a,x\rangle)^{2k} \rangle = \langle \mu, \varphi(x)\,(1-\cos\langle a,x\rangle)^{2k} \rangle$ si φ est à support compact dans $\mathbb{R}^n - \{0.\}$

Il en résulte que $T_a = \mu(dx)\,(1-\cos\langle a,x\rangle)^{2k} + m\,\delta_0$ avec m réel $\geqslant 0$. Donc pour toute $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\langle T, h(x)\,(1-\cos\langle a,x\rangle)^{2k+1} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (1-\cos\langle a,x\rangle)^{2k+1}\, h(x)\mu(dx).$$

En désignant par $\hat{h}$ la fonction dont h est la transformée de Fourier, on a donc :

$$<\Phi, \hat{h} * [\delta_o - \frac{1}{2}\delta_a - \frac{1}{2}\delta_{-a}]^{*2k+1}> = \int_{\mathbb{R}^n - 0} (1 - \cos <a, x>)^{2k+1} h(x)\mu(dx).$$

On prend $h(x) = e^{-\frac{|x|^2}{N}}$. Quand $N \to \infty$, $\hat{h}$ décrit une approximation de l'unité, et comme $\Phi * [\delta_o - \frac{1}{2}\delta_a - \frac{1}{2}\delta_{-a}]^{*2k+1}$ est continue à croissance lente, on a en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$<\Phi * [\delta_o - \frac{1}{2}\delta_a - \frac{1}{2}\delta_{-a}]^{*2k+1}, \delta_o> = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (1 - \cos <a,x>)^{2k+1} \mu(dx).$$

D'après l'homogénéité de Φ, le premier membre s'écrit $K \Phi(a)$, où K est un réel indépendant de a.

Si $K = 0$, on a $\int_{\mathbb{R}^n - 0} (1 - \cos <a, x>)^{2k+1} \mu(dx) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et donc $\mu = 0$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut trouver $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $(1 - \cos <a,x>^{2k+1} = 1)$.
Mais comme $<T, \varphi> = <\mu, \varphi>$ pour toute φ à support compact dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$, on voit que le support de T est alors $\{0\}$, donc Φ est un polynome [12] ; mais cela contredit l'identité $\Phi(\lambda x) = |\lambda|^p \Phi(x)$ puisque, par l'hypothèse, p n'est pas un entier pair.

On a donc $K \Phi(a) = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (1 - \cos <a,x>)^{2k+1} \mu(\lambda x)$ avec $K \neq 0$.

Soient φ à support compact dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et λ un réel >0. On pose $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$. Alors $\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \varphi(\lambda x)\mu(dx) = <T, \varphi_\lambda> = <\Phi, \hat{\varphi}_\lambda>$,
$\hat{\varphi}_\lambda$ étant la fonction dont φ est la transformée de Fourier.

Or $\hat{\varphi}_\lambda = \frac{1}{\lambda^n} (\hat{\varphi})_{\frac{1}{\lambda}}$, et donc $\langle \Phi, \hat{\varphi}_\lambda \rangle = |\lambda|^p \langle \Phi, \hat{\varphi} \rangle$. puisque $\Phi(\lambda x) = \lambda^p \Phi(x)$.

Donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \varphi(\lambda x)\mu(dx) = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \varphi(x)\mu(dx)$.

on déduit alors du lemme 8 qu'il existe une mesure de Radon $\vartheta \geq 0$ sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$, telle que

$$\mu(dx) = \vartheta(ds)\rho^{-p-1} d\rho \quad , \text{ avec } \rho = |x|, \ s = \frac{x}{|x|} .$$

Donc $K\,\Phi(a) = \displaystyle\int_{S \times (\mathbb{R}^+ - \{0\})} (1-\cos\langle a, \rho s\rangle)^{2k+1} \vartheta(ds)\rho^{-p-1} d\rho$.

Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+ - \{0\}} (1-\cos\rho\langle a,s\rangle)^{2k+1} \rho^{-p-1} d\rho = K'|\langle a,s\rangle|^p$

avec $K' = \displaystyle\int_0^\infty (1-\cos u)^{2k+1} u^{-p-1} du$, on a

$K\,\Phi(a) = K' \displaystyle\int_S |\langle a,s\rangle|^p \vartheta(ds)$ soit $\|a\|^p = K'' \displaystyle\int_S |\langle a,s\rangle|^p \vartheta(ds)$.

K'' est ≥ 0 car $\|a\|^p$ est ≥ 0. L'application de E dans $L^p(S, K''\vartheta)$ qui, à l'élément a de E associe la fonction $s \longrightarrow \langle a,s\rangle$ sur S est donc linéaire et isométrique, ce qui prouve que E est de type p.

c.q.f.d.

La condition nécessaire et suffisante du théorème 6 prend une forme particulièrement simple lorsque $1 \leq p < 2$ ou $2 < p < 4$. On peut en effet prendre alors $k = 1$, et on obtient les énoncés :

Pour que l'espace vectoriel normé E soit de type p ($1 \leq p < 2$) il faut et il suffit que, quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in E$, et $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \mathbb{R}$ avec

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0, \text{ on ait } \underline{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \left(\| x_i + x_j \|^p + \| x_i - x_j \|^p \right) \rho_i \rho_j \leq 0}$$

<u>Pour qu'il soit de type p $(2 < p < 4)$ il faut et il suffit que, quels que soient</u> <u>$x_1, \dots, x_n \in E$, et $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$ avec $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$, on ait</u>

$$\underline{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \left(\| x_i + x_j \|^p + \| x_i - x_j \|^p \right) \rho_i \rho_j \geq 0}$$

<u>Remarque 1</u> : on peut trouver sur $E = \mathbb{R}^2$, une fonction Φ continue, homogène de degré 4, et 2k-positive pour tout entier $k \geq 1$, telle que $\sqrt[4]{\Phi}$ ne soit pas une norme de type 4 sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème précédent ne s'étend donc pas au cas où p est un entier pair.

Pour cela il suffit pour $x = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ de poser $\Phi(x) = \xi^2 \eta^2$.

On a $\sum_{i,j} (\Phi(x_i + x_j) + \Phi(x_i - x_j)) \rho_i \rho_j = \left(\sum_i \rho_i \xi_i \eta_i\right)^2 \geq 0$ si $\sum_i \rho_i = 0$. De plus pour $k \geq 1$, on a $\sum_{\pm, i_1, \dots, i_{2k}} \Phi(x_{i_1} \pm \dots \pm x_{i_{2k}}) \rho_{i_1} \cdots \rho_{i_{2k}} = 0$

puisque Φ est un polynôme de degré $< 4k$.

<u>Remarque 2.</u> Un espace de Hilbert H est de type p pour tout réel $p \geq 1$. En effet on peut supposer que H est un espace de variables aléatoires gaussiennes sur l'espace de probabilité (Ω, P). Si $X \in H$ a pour distribution $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} dx$ alors $\| X \|_2 = \sqrt{\sigma}$. Or $\| X \|_p^p = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^\infty x^p e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} dx$

Soit $\| X \|_p^p = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{p+1}{2})(\sqrt{2\sigma})^p$. Donc $\| X \|_p = C\sqrt{\sigma} = C \| X \|_2$ ce qui montre que H est de type p.

Cas où $1 \leq p \leq 2$. Fonctions de type négatif.

Rappelons d'abord les définitions et résultats suivants, dus à Schoenberg [6].

T étant un ensemble quelconque, une application $f : T^2 \longrightarrow R$, est dite de type positif sur T si, quels que soient $t_1, \ldots, t_n \in T$ et $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$ on a $f(t_1,t_2) = f(t_2,t_1)$, et $\sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} f(t_i,t_j)\, \xi_i \xi_j \geq 0$.

Une application $\Phi : T^2 \longrightarrow R$ est dite de type négatif si $\Phi(t_1, t_2) = \Phi(t_2,t_1)$; $\Phi(t_1,t_1) = 0$; $\sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \Phi(t_i,t_j)\, \xi_i \xi_j \leq 0$ quels que soient $t_1, \ldots t_n \in T$ et $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i = 0$.

On montre aisèment que Φ est alors nécessairement ≥ 0 sur T.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°) Φ est de type négatif sur T.

2°) $e^{-\lambda\Phi}$ est de type positif pour tout $\lambda > 0$, et $\Phi(t,t) = 0$ $\forall t \in T$.

3°) $\sqrt{\Phi}$ est une distance hilbertienne sur T, c'est-à-dire $(T, \sqrt{\Phi})$ est un espace métrique isomorphe à une partie d'un espace de Hilbert.

Enfin, si Φ est de type négatif, et si μ est une mesure ≥ 0 sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty (1 \cap \frac{1}{x})\mu(dx) < \infty$, alors $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x\Phi}}{x} \mu(dx)$ est de type négatif.

En particulier Φ^α est de type négatif pour $0 < \alpha \leq 1$.

Le théorème suivant est un corollaire du théorème 6 :

<u>Théorème 7. Pour que l'espace vectoriel normé E soit de type p ($1 \leq p \leq 2$), il faut et il suffit que la fonction $\| x - y \|^p$ soit de type négatif sur E.</u>

La fonction $(x-y)^2$ est de type négatif sur $\mathbb{R}$ (c'est le carré d'une distance hilbertienne), donc aussi la fonction $|x-y|^p$ pour $0 < p \leq 2$. Il en résulte immédiatement que la fonction $\| f-g \|^p$ est de type négatif sur $L^p(\Omega, \mu)$ pour $1 \leq p \leq 2$. La condition est donc nécessaire.

Inversement, soit E un espace normé tel que $\|x-y\|^p$ soit de type négatif sur E, et soient $x_1, \dots, x_n \in E$, $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$. On pose $x_{i+n} = -x_i$, $\rho_{i+n} = \rho_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On a alors

$$\sum_{1 \leq i,\, j \leq n} (\| x_i + x_j \|^p + \| x_i - x_j \|^p) \rho_i \rho_j = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 2n} \| x_i - x_j \|^p \rho_i \rho_j \geq 0$$

D'où le résultat d'après le théorème 6, lorsque $p \neq 2$. Pour le cas $p = 2$ voir [6].

Remarquons que si E est de type p ($1 \leq p \leq 2$), il est de type p' pour $1 \leq p' \leq p$: car si $\| x-y \|^p$ est de type négatif sur E, $\| x-y \|^{p'}$ l'est aussi.

<u>Définition</u> : Etant donnée une suite finie ($X_1, \dots, X_n$) de variables aléatoires, on dira que sa loi est stable d'indice p ($1 \leq p \leq 2$) si sa fonction caractéristique est de la forme $e^{-\Phi(x)}$, où Φ est une fonction réelle sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\Phi(\lambda x) = |\lambda|^p \Phi(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour p=2 cela implique que la suite donnée a une distribution gaussienne. Dans le cas général, comme $\Phi(x)$ est alors de type négatif, $[\Phi(x)]^{\frac{1}{p}}$ est une norme de type p sur $\mathbb{R}^n$ et on a donc $\Phi(x) = \int_S |\langle x, s \rangle|^p \nu(ds)$,

où ν est une mesure ≥ 0 sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction aléatoire $(X_t)_{t \in T}$ sur l'ensemble T sera dite stable d'indice p si la loi de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est stable d'indice p, quels que soient $t_1, \ldots, t_n \in T$.

<u>Théorème 8. Soient T un ensemble, et $\mathcal{E}(T)$ l'espace des combinaisons linéaires formelles à coefficients réels d'éléments de T. La donnée d'une fonction aléatoire stable d'indice p $(1 \leq p \leq 2)$ sur T équivaut à la donnée d'une semi-norme de type p sur $\mathcal{E}(T)$</u>.

En effet si on a une semi-norme de type p sur $\mathcal{E}(T)$ on peut définir la fonction aléatoire $(X_t)_{t \in T}$ en posant

$$E\left(e^{i(\lambda_1 X_{t_1} + \ldots + \lambda_n X_{t_n})}\right) = e^{-\|\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n\|}$$

On définit ainsi la loi de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ pour chaque sous-ensemble fini $\{t_1, \ldots, t_n\}$ de T, et il est immédiat que ces lois forment un système compatible. D'où le résultat d'après le théorème de Kolmogoroff.

Inversement si on a une fonction aléatoire $(X_t)_{t \in T}$, stable d'indice p sur T, on définit une semi-norme sur $\mathcal{E}(T)$ en posant

$$\|\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n\| = -\log E\left(e^{i(\lambda_1 X_{t_1} + \ldots + \lambda_n X_{t_n})}\right).$$

On sait que cette semi-norme est de type p sur chaque sous-ensemble de $\mathcal{E}(T)$ de dimension finie, donc est de type p sur $\mathcal{E}(T)$ tout entier d'après le théorème 3.

c.q.f.d.

<u>En particulier si T est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la donnée d'une semi-norme de type p sur T équivaut à la donnée d'une fonction aléatoire</u> X_t <u>stable d'indice p, linéaire sur T.</u>

(c.à d. $X_{\lambda t} = \lambda X_t$ et $X_{t+u} = X_t + X_u$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $t, u \in T$) En effet, si on pose :

$$E\left(e^{i(\lambda_1 X_{t_1} + \ldots + \lambda_n X_{t_n})}\right) = e^{-\|\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n\|}$$

on a $E\left(e^{i\lambda(X_{t+u} - X_t - X_u)}\right) = e^{-|\lambda| \|t+u-t-u\|} = 1$

D'où $X_{t+u} = X_t + X_u$ p.s. et de même $X_{\lambda t} = \lambda X_t$ p.s.

Nous revenons maintenant à l'étude des cônes convexes normés de type p (p réel $\geqslant 1$), en démontrant un théorème analogue au théorème 6.

<u>Théorème 9. Pour qu'un cône convexe normé Γ soit de type p, avec $r-1 < p < r \leq 2k$ (r et k entiers > 0, p réel > 1), il faut et il suffit que $(-1)^r \|x\|^p$ soit une fonction 2k-positive sur Γ</u> .

On a déjà vu que la condition est nécessaire (corollaire du lemme 4). D'après le théorème 4, pour montrer qu'elle est suffisante, on peut supposer que Γ est engendré par un nombre fini d'éléments.

Soit alors E l'espace vectoriel, de dimension finie n, engendré par Γ ; Γ est donc un cône convexe fermé de E, d'intérieur non vide. De plus Γ ne contient pas de droite : car si $x, y \in \Gamma$, on a $\|x+y\| \geqslant x$; donc si x et $-x \in \Gamma$ on a $\|x-x\| = 0 \geqslant \|x\|$ d'où $x = 0$.

Il en résulte que si $\Gamma^* = \{t \in E^* \ ; \langle t,x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \Gamma\}$, Γ^* est un cône convexe fermé de E^*, d'intérieur non vide et ne contenant pas de droite.

On pose $\Phi(x) = (-1)^r \|x\|^p$. Par hypothèse Φ est 2k-positive sur le cône Γ .

Désignons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $f \in L^1(\Gamma, dx)$ telles qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec $\int_\Gamma |f(x)|\, e^{\varepsilon |x|} dx < \infty$ ($|x|$ désigne la norme euclidienne de x). D'après le lemme 6, on a $\langle \Phi, f^{*^{2k}} \rangle \geqslant 0$ pour toute $f \in \mathcal{A}$ d'intégrale nulle sur Γ .

Par suite, $f \longrightarrow \langle \Phi, f \rangle$ est une forme linéaire sur $\mathcal{A}$ à laquelle on peut appliquer le théorème 4 (de la 2ème partie). On en déduit qu'il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur $\Gamma^* - \{0\}$ et une seule, telle que

$$\langle \Phi, f \rangle = \int_{\Gamma^* - \{0\}} \hat{f}(t)\mu(dt) \qquad (1)$$

pour toute $f \in \mathcal{A}$ de la forme $f = f_1 * f_2 * \cdots * f_{4k}$ avec $f_i \in \mathcal{A}$ d'intégrale nulle ($1 \leqslant i \leqslant 4k$) (Nous désignerons l'ensemble de ces fonctions par $\mathcal{A}_0^{4k}$) ; $\hat{f}(t)$ est défini par $\hat{f}(t) = \int_{\Gamma} f(x)\, e^{-\langle t,x\rangle} dx$ pour tout $t \in \Gamma^*$.

λ étant un réel > 0, on définit f_λ par $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ et la mesure μ_λ sur $\Gamma^* - \{0\}$ par $\int_{\Gamma^* - \{0\}} \varphi(t)\mu_\lambda(dt) = \int_{\Gamma^* - \{0\}} \varphi(\lambda t)\mu(dt)$

pour toute φ continue à support compact dans $\Gamma^* - \{0\}$.

D'après l'homogénéité de Φ on a $\langle \Phi, f_{\frac{1}{\lambda}} \rangle = \lambda^{n+p} \langle \Phi, f \rangle$.

Or $\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}} = \lambda^n(\hat{f})$. On a donc

$$\lambda^{n+p} \langle \Phi, f \rangle = \lambda^n \int_{\Gamma^* - \{0\}} \hat{f}(\lambda t)\mu(dt) = \lambda^n \int_{\Gamma^* - \{0\}} \hat{f}(t)\, \mu_\lambda(dt).$$

Donc $\langle \Phi, f \rangle = \lambda^{-p} \int_{\Gamma^* - \{0\}} \hat{f}(t)\mu_\lambda(dt)$, pour toute $f \in \mathcal{A}_0^{4k}$.

D'après l'unicité de μ, on en déduit $\mu(dt) = \lambda^{-p} \mu_\lambda(dt)$.

D'après le lemme 8, il existe donc une mesure de Radon $\nu \geqslant 0$ sur la sphère unité S^* de E^* telle que

$$\mu(dt) = \nu(ds)\rho^{-p-1} d\rho \text{ (avec } \rho = |t| \text{ et } s = \frac{t}{|t|} \text{).}$$

Comme μ est concentrée sur $\Gamma^* - \{0\}$, ν est concentrée sur $S^* \cap \Gamma^*$.

Dans l'égalité (1) on prend $f = [h_N * (1-\delta_a)]^{*4k}$, où $a \in \Gamma$, δ_a la mesure de Dirac au point a, et où h_N est une fonction ≥ 0 continue sur E tout entier, de support contenu dans $\{x \in \Gamma ;\ |x| \leq \frac{1}{N}\} = B_N$, et d'intégrale 1. La suite h_N constitue donc une approximation de l'unité. Comme $\Phi(x) = (-1)^r \|x\|^p$ est continue sur E on a donc

$$\lim_{N \to \infty} \langle \Phi , [h_N *(1-\delta_a)]^{*4k} \rangle = \langle \Phi, (1-\delta_a)^{*4k} \rangle .$$

D'autre part on a $\hat{f}(t) = [\hat{h}_N(t) . (1 - e^{-\langle a,t \rangle})]^{4k}$

Donc $\langle \Phi, [h_N * (1-\delta_a)^{*4k}] \rangle = \int_{\Gamma^* - \{0\}} (\hat{h}_N(t))^{4k} (1-e^{-\langle a,t\rangle})^{4k} \mu(dt)$.

Quand $N \to \infty$, le 1° membre, donc aussi le second tend vers une limite. La suite de fonctions ≥ 0 $(\hat{h}_N(t))^{4k} (1-e^{-\langle a,t\rangle})^{4k}$ a donc ses intégrales uniformément majorées.

Comme $\hat{h}_N(t) = \int_{B_N} h(x)\, e^{-\langle t,x\rangle} dx$ converge vers 1 pour chaque $t \in \Gamma^*$, le lemme de Fatou montre que la limite de cette suite, c.à.d. $(1-e^{-\langle a,t\rangle})^{4k}$ est μ-intégrable. Mais comme $\hat{h}_N(t) \leq \int_{B_N} h(x)\, dx = 1$, on voit que cette suite est majorée par la fonction μ-intégrable $(1-e^{-\langle a,t\rangle})^{4k}$. On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue, et passer à la limite sous le signe somme, ce qui donne :

$$\langle \Phi, (1-\delta_a)^{*4k} \rangle = \int_{\Gamma^* - \{0\}} (1-e^{-\langle a,t\rangle})^{4k} \mu\, (dt) \qquad (2).$$

D'après l'homogénéité de Φ, le premier membre s'écrit $K\,\Phi(a)$ où K est un réel indépendant de a. Si K = 0, on a

$$\int_{\Gamma^* - \{0\}} (1-e^{-\langle a,t\rangle})^{4k} \mu\, (dt) = 0 \text{ pour tout } a \in \Gamma .$$

Il en résulte que $\mu = 0$; en effet, si a est un point intérieur à Γ, on a $\langle a,t\rangle > 0$ pour tout $t \in \Gamma^* - \{0\}$.

Donc $(1-e^{-\langle a,t\rangle})^{4k} > 0$ pour tout $t \in \Gamma^* - \{0\}$.

L'égalité (1) montre alors que $\langle \Phi, f\rangle = 0$ pour toute $f \in \mathcal{A}_0^{4k}$.

Prenons alors $f(x) = [h_N(x) * \delta_b * (1-\delta_a)]^{*4k}$ avec $a,b \in \Gamma$.

D'où $\langle \Phi, [h_N(x) * \delta_b * (1-\delta_a)]^{*4k}\rangle = 0$, et donc quand $N \longrightarrow \infty$:

$$\langle \Phi, [\delta_b * (1-\delta_a)]^{*4k}\rangle = 0 \text{ soit } \langle \Phi, \delta_c * (1-\delta_a)^{*4k}\rangle = 0$$

où $c = 4k\, b$.

ce qui s'écrit :

$$\Phi(c) - C^1_{4k}\,\Phi(c+a) + C^2_{4k}\,\Phi(c+2a) - \ldots + (-1)^r\, C^r_{4k}\,\Phi(c+ra) + \ldots + \Phi(c+4ka) = 0$$

Soit $x_0 \in \Gamma$, $c = \alpha x_0$, $a = \beta x_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Si on pose $\Phi(\alpha x_0) = \varphi(\alpha)$ on a

$$\varphi(\alpha) - C^1_{4k}\,\varphi(\alpha+\beta) + C^2_{4k}\,\varphi(\alpha+2\beta) - \ldots + (-1)^r C^r_{4k}\,\varphi(\alpha+r\beta) + \ldots + \varphi(\alpha+4k\beta) = 0.$$

Les seules fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ satisfaisant cette équation $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ sont les polynômes de degré $\leq 4k - 1$.

Mais $\varphi(\alpha) = \Phi(\alpha x_0) = \alpha^p\, \Phi(x_0)$ et p n'est pas un entier, par hypothèse.

On a donc une contradiction, ce qui prouve que $K \neq 0$.

L'égalité (2) s'écrit donc $K\,\Phi(a) = \int_{\Gamma^* - \{0\}} (1-e^{-\langle a,t\rangle})^{4k}\, \mu(dt)$

$$\text{soit } K\,\Phi(a) = \int_{(S^* \cap \Gamma^*) \times (\mathbb{R}^+ - \{0\})} (1-e^{-\rho\langle a,s\rangle})^{4k}\, \rho^{-p-1}\, \nu(ds)\, d\rho$$

Par suite $K\,\Phi(a) = K' \int_{S^* \cap \Gamma^*} \langle a,s\rangle^p\, \nu(ds)$

où $K' = \int_0^{\infty} (1-e^{-u})^{4k} u^{-p-1} du$.

Donc $\| a\|^p = K'' \int_{S^* \cap \Gamma^*} \langle a,s\rangle^p \gamma(ds)$.

L'application θ de Γ dans $L^p_+ (S^* \cap \Gamma^*, K'' \gamma)$, qui à l'élément a de Γ fait correspondre la fonction $s \longrightarrow \langle a, s\rangle$ répond aux conditions $\theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b)$; $\theta(\lambda a) = \lambda\theta(a)$ et $\|\theta(a)\| = \| a\|$. Cela montre que Γ est de type p.

c.q.f.d.

Lorsque $1 < p < 2$, on peut prendre $k = 1$, et on obtient l'énoncé : Pour qu'un cône convexe normé Γ soit de type p $(1 < p < 2)$ il faut et il suffit que, quels que soient $x_1,\dots,x_n \in \Gamma$ et $\rho_1,\dots,\rho_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$, on ait $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \| x_i + x_j \|^p \rho_i \rho_j \geq 0$.

III

Dans cette partie, nous donnons une autre méthode pour construire les espaces L^p, et nous l'appliquons à l'étude des isométries des espaces de type p.

Etant donné un ensemble I, on désigne par B(I) l'espace des fonctions réelles uniformément bornées sur I. On appelle moyenne sur I, une forme linéaire m sur B(I) telle que $m(1) = 1$ et $m(f) \geqslant 0$ pour toute $f \geqslant 0$. On en déduit que $|m(f)| \leqslant \|f\|_\infty = \sup_{i \in I} |f(i)|$ pour toute $f \in B(I)$.

Un ultrafiltre U sur I définit une telle moyenne si on pose $m(f) = \lim_U f(i)$. On sait que ces moyennes forment le spectre de l'algèbre normée B(I) et que toute moyenne sur I correspond à une probabilité sur ce spectre (théorie des algèbres normées commutatives).

Etant donnée une moyenne m sur I, et deux réels p, $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on montre, exactement comme dans le cas classique, les inégalités de Hölder et de Minkowski:

$$|m(f\,g)| \leqslant [m(|f|^p)]^{\frac{1}{p}} [m(|g|^q)]^{\frac{1}{q}}$$

$$[m(|f+g|^p)]^{\frac{1}{p}} \leqslant [m(|f|^p)]^{\frac{1}{p}} + [m(|g|^p)]^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } f,\ g \in B(I).$$

On se donne une famille $(\Omega_i, \mu_i)_{i \in I}$ d'espaces mesurés, un réel $p \geqslant 1$ et une moyenne m sur I. L'espace $L^p(\Omega_i, \mu_i)$ sera désigné par L_i^p pour abréger. Sur l'espace $\mathcal{L}_o = \left\{ (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} L_i^p \right.$; la famille $(\|f_i\|)_{i \in I}$ est une famille de réels $\geqslant 0$ uniformément bornée $\left.\right\}$,

on définit une semi-norme en posant

$$\|(f_i)_{i \in I}\|^p = m(\|f_i\|^p)_{i \in I} .$$

On a bien une semi-norme : car

$\| (f_i + g_i) \|^p = m (\| f_i + g_i \|^p) \leq m [(\|f_i\| + \| g_i\|)^p]$.

Donc $\| (f_i + g_i) \| \leq [m (\| f_i \| + \| g_i \|)^p]^{\frac{1}{p}}$

D'après l'inégalité de Minkowski énoncée ci-dessus on a

$[m (\| f_i \| + \| g_i \|)^p]^{\frac{1}{p}} \leq [m \| f_i \|^p]^{\frac{1}{p}} + [m \|g_i \|^p]^{\frac{1}{p}} = \|(f_i)\| + \|(g_i)\|$.

On a donc bien $\| (f_i + g_i) \| \leq \|(f_i)\| + \|(g_i)\|$.

Soit $\mathcal{N}$ le sous-espace de $\mathcal{L}_o$ sur lequel cette semi-norme est nulle. Alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}_o/\mathcal{N}$ est un espace normé.

$\mathcal{L}_o$ est un sous-espace vectoriel réticulé de $\prod_{i \in I} L_i^p$.

De plus si $(f_i),(f'_i), (g_i) \in \mathcal{L}_o$ on a pour tout $i \in I$:

$\| f_i \cap g_i - f'_i \cap g_i \|^p \leq \|f_i - f'_i \|^p$.

Par suite en prenant la moyenne des deux membres :

$\| (f_i)\cap(g_i) - (f'_i)\cap(g_i) \|^p \leq \|(f_i) - (f'_i) \|^p$.

Cela montre que si $(f_i)\sim(f'_i)$ (mod. $\mathcal{N}$) alors $(f_i)\cap(g_i)\sim(f'_i)\cap(g_i)$ (mod. $\mathcal{N}$).

Donc $\mathcal{L}$ est un espace normé réticulé. La même inégalité montre que l'opération $\cap$ est continue pour la norme de $\mathcal{L}$, et par suite le complété $\bar{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ est un espace de Banach réticulé.

On a $|(f_i)| = (|f_i|)$ et donc $\| |(f_i)| \|^p = \| (f_i) \|^p$.

D'autre part si (f_i) et (g_i) sont ≥ 0, on peut supposer que $f_i \geq 0$ pour tout i (en remplaçant au besoin la famille (f_i) par la famille $(f_i \cup o)$ qui lui est équivalente) ; de même $g_i \geq 0$. On a alors pour tout $i \in I$:

$\| f_i + g_i \|^p \geq \|f_i \|^p + \| g_i \|^p \geq \| f_i \cup g_i \|^p$

et donc en prenant la moyenne :

$\| (f_i) + (g_i) \|^p \geq \|(f_i) \|^p + \| (g_i) \|^p \geq \|(f_i) \cup (g_i) \|^p$.

Cela montre que l'espace $\tilde{\mathcal{L}}$ satisfait les conditions du théorème 1, donc est isomorphe à un espace $L^p(\Omega, \mu)$.

Cet espace $L^p(\Omega, \mu)$ sera appelé produit de la famille $L^p(\Omega_i, \mu_i)$ ($i \in I$) suivant la moyenne m, et sera noté $\prod_{i \in I} L^p(\Omega_i, \mu_i)/m$.

Etant donné un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{a}, \mu)$, un automorphisme V de l'espace réticulé $L^p(\Omega, \mathcal{a}, \mu)$ est par définition un automorphisme de l'espace de Banach $L^p(\Omega, \mathcal{a}, \mu)$ compatible avec l'opération $\cap$: $Vf \cap Vf = V(f \cap g)$ quels que soient $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{a}, \mu)$. (V est alors nécessairement $\geqslant 0$). Rappelons la structure de ces automorphismes, lorsque (Ω, μ) est somme directe d'une famille $(\Omega_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ d'espaces mesurés de mesure finie (c'est le cas de tous les espaces L^p obtenus à l'aide du théorème 1 ainsi, évidemment, que de tous les espaces séparables) :

Il existe un automorphisme τ de la σ-algèbre $\mathcal{a}$ (modulo les ensembles de mesure nulle) tel que : $\tau(A-B) = \tau(A) - \tau(B)$; $\tau(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n \tau(A_n)$ pour toute suite A_n d'éléments de $\mathcal{a}$; $\mu(\tau A) = 0 \Longleftrightarrow \mu(A) = 0$; et il existe une fonction mesurable $F > 0$ sur Ω tout entier tels que $V\, 1_A = F.\, 1_{\tau A}$ pour tout $A \in \mathcal{a}$. On a alors $\mu(A) = \int_{\tau A} F^p \, d\mu$ pour tout $A \in \mathcal{a}$.

V étant un automorphisme de l'espace réticulé $L^p(\Omega, \mu)$ et E un sous-espace invariant par V, on obtient ainsi un espace de type p muni d'un opérateur isométrique. Le théorème suivant montre que c'est le cas général.

Théorème 10. Soient E un espace vectoriel normé de type p ($1 \leq p < \infty$) et U un opérateur isométrique sur E. On peut alors plonger E dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ de façon que U soit la restriction à E d'un automorphisme V de l'espace de de Banach réticulé $L^p(\Omega, \mu)$.

On choisit un ultrafiltre U non trivial sur $\mathbb{N}$, et on définit une moyenne m sur $\mathbb{N}$ en posant :

$m(\varphi) = \lim_U \frac{1}{n} \; [\varphi(o) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n)]$ pour chaque $\varphi \in B(\mathbb{N})$.

On voit que m est une moyenne invariante par translation : si φ' et φ'' sont définies par $\varphi'(n) = \varphi(n+1) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\varphi''(o) = 0 \; ; \varphi''(n) = \varphi(n-1) \;\; \forall n \geq 1$$

on a immédiatement $m(\varphi) = m(\varphi') = m(\varphi'')$.

Comme E est de type p, on peut supposer que E est plongé, en tant qu'espace normé, dans $L^p(\Omega_o, \mu_o)$. On effectue alors le produit, suivant la moyenne m, d'une suite d'espaces identiques à $L^p(\Omega_o, \mu_o)$ et on pose

$$L^p(\Omega, \mu) = (L^p(\Omega_o, \mu_o))^{\mathbb{N}} / _m .$$

Les éléments d'un sous-espace réticulé $\mathcal{L}$ dense dans $L^p(\Omega, \mu)$ sont donc les suites (f_n) d'éléments de $L^p(\Omega_o, \mu_o)$ uniformément bornées en norme.

On définit un opérateur V sur $\mathcal{L}$ en posant

$V[(f_n)] = (f'_n)$ avec $f'_n = f_{n+1}$

On a à vérifier que si $(f_n) \sim 0$ alors $(f'_n) \sim 0$.

Mais $\|(f_n)\|^p = \lim_U \frac{1}{n} [\|f_o\|^p + \|f_1\|^p + \ldots + \|f_n\|^p]$

$$= \lim_U \frac{1}{n} [\|f_1\|^p + \|f_2\|^p + \ldots + \|f_{n+1}\|^p]$$

$$= \|(f'_n)\|^p.$$

On a donc bien défini un opérateur sur $\mathcal{L}$, et de plus V est isométrique. C'est en fait un automorphisme de $\mathcal{L}$, puisque si la suite (f''_n) est définie par $f''_o = 0$; $f''_n = f_{n-1}$ pour $n \geq 1$, on a $V[(f''_n)] = (f_n)$.

De plus si $(f_n), (g_n) \in \mathcal{L}$ on a évidemment

$V[(f_n) \cap (g_n)] = V[(f_n)] \cap V[(g_n)]$.

Donc V se prolonge à $\bar{\mathcal{L}} = L^p(\Omega, \mu)$ en un automorphisme de l'espace de Banach réticulé $L^p(\Omega, \mu)$.

On définit une application J de E dans $\mathcal{L}$ en posant pour $h \in E$: $J(h) = (h_n)$ avec $h_n = U^n h$. Comme $\| U^n h \| = \| h \|$ pour tout n, on a $\| J(h) \| = \| h \|$. Donc J est une application linéaire et isométrique de E dans $\mathcal{L}$, donc dans $L^p(\Omega, \mu)$. Or, il est clair, d'après la définition de V que $J(Uh) = V[(h_n)] = V(J(h))$.

c.q.f.d.

<u>Théorème 11. Soient E un espace vectoriel normé de type p $(1 \leq p < \infty)$ et $(U_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un semi-groupe fortement continu d'isométries de E $(U_{t+t'} = U_t \cdot U_{t'}$; $U_t h \longrightarrow h$ pour tout $h \in E$ quand $t \longrightarrow 0)$. On peut alors plonger E dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ de façon que $(U_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit la restriction à E d'un semi-groupe $(V_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ fortement continu d'automorphismes de l'espace de Banach réticulé $L^p(\Omega, \mu)$.</u>

On choisit un ultrafiltre non trivial U sur $\mathbb{R}^+$, et pour chaque fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ on pose $m(\varphi) = \lim_U \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u)\, du$;

si a est un réel ≥ 0 et si on définit φ_a et φ_{-a} par $\varphi_a(t) = \varphi_a(a+t)$.

$\varphi_{-a}(t) = 0$ si $0 \leq t \leq a$; $\varphi_{-a}(t) = \varphi(t-a)$ pour $t > a$, on a alors $m(\varphi) = m(\varphi_a)$ $= m(\varphi_{-a})$.

E étant un espace de type p, on peut supposer que E est plongé dans $L^p(\Omega_0, \mu_0)$.

On considère l'espace $\mathcal{L}_0$ des applications uniformément continues et uniformément bornées en norme de $\mathbb{R}^+$ dans $L^p(\Omega_0, \mu_0)$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réticulé si on pose $(F \cap G)(t) = F(t) \cap G(t)$ pour $F, G \in \mathcal{L}_0$: car si F, G sont uniformément continues et bornées on a

$\| (F \cap G)(t) - (F \cap G)(u) \| \leq \| F(t) - F(u) \| + \| G(t) - G(u) \|$ ce qui montre que $F \cap G$ est aussi uniformément continue et bornée.

Sur $\mathcal{L}_0$ on définit une semi-norme en posant :

$\| F \|^p = m(\| F(t) \|^p) = \lim_U \frac{1}{t} \int_0^t \| F(t) \|^p\, dt.$

En faisant le quotient par le sous-espace sur lequel cette semi-norme est nulle on obtient un espace normé $\mathcal{L}$. Il est réticulé puisque
$\| F \cap G - F' \cap G \|^p \leq \| F - F' \|^p$ et donc
$F \sim F' \Longrightarrow F \cap G \sim F' \cap G$. La même inégalité montre que l'opération $\cap$ est continue pour la norme. Donc le complété $\bar{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ est un espace de Banach réticulé.
Si $F, G \geq 0$ on a $\| F(t) + G(t) \|^p \geq \| F(t) \|^p + \| G(t) \|^p \geq \| F(t) \cup G(t) \|^p$.
Donc $\| F + G \|^p \geq \| F \|^p + \| G \|^p \geq \| F \cup G \|^p$. De plus on a $\| \, |F| \, \| = \| F \|$.
Il résulte alors du théorème 1 que $\bar{\mathcal{L}}$ est isomorphe à un espace $L^p(\Omega, \mu)$.

Si a est un réel ≥ 0 on définit un opérateur V_a sur $\mathcal{L}_o$ en posant $(V_a F)(t) = F(t+a)$. On a alors

$$\| V_a F \|^p = \lim_U \frac{1}{t} \int_0^t \| F(t+a) \|^p \, dt = \lim_U \frac{1}{t} \int_0^t \| F(t) \|^p \, dt$$
$$= \| F \|^p.$$

Cela montre que V_a est un opérateur isométrique sur $\mathcal{L}$. C'est en fait un automorphisme de $\mathcal{L}$: en effet si $F \in \mathcal{L}_o$ et si on définit $G \in \mathcal{L}_o$ par

$$G(t) = F(0) \quad (0 \leq t \leq a)$$
$$G(t) = F(t-a) \quad (t \geq a)$$

alors $V_a G = F$.

De plus, il est clair que $V_a(F \cap G) = V_a F \cap V_a G$, quels que soient $F, G \in \mathcal{L}_o$.
Cela montre que V_a est un automorphisme de l'espace de Banach réticulé $L^p(\Omega, \mu)$.
Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a $V_a \cdot V_b = V_{a+b}$. D'autre part, si $F \in \mathcal{L}_o$, comme F est uniformément continue, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que $\| F(t+\eta) - F(t) \|^p \leq \varepsilon$, quel que soit $t \in \mathbb{R}^+$, et $0 \leq \eta < \delta$. Par suite

$$\| V_\eta F - F \|^p = \lim_U \frac{1}{t} \int_0^t \| F(t+\eta) - F(t) \|^p \, dt \leq \varepsilon .$$

Cela montre que $V_a F \longrightarrow F$ quand $a \longrightarrow 0$.

Par suite la famille $(V_a)_{a \in \mathbb{R}^+}$ est un semi-groupe fortement continu d'automorphismes de l'espace de Banach réticulé $L^p(\Omega, \mu)$.

On définit une application J de E dans $\mathcal{L}_0$, en posant pour $h \in E$: $J(h) = F$ avec $F(t) = U_t\, h$. En effet comme le semi-groupe U_t est fortement continu, la fonction $t \longrightarrow U_t\, h$ est uniformément continue, et bornée. On a, par ailleurs, $\| J(h) \|^p = \lim_U \frac{1}{t} \int_0^t \| U_{t+u}\, h \|^p\, du = \|h\|^p$.

Donc J est une application linéaire et isométrique de E dans $L^p(\Omega, \mu)$. Par définition de J, on a évidemment $J(U_a\, h) = V_a(J(h))$.

c.q.f.d.

Cas où $1 \leq p \leq 2$. Fonctions aléatoires stables stationnaires

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ une fonction aléatoire stable d'indice p ($1 \leq p \leq 2$) stationnaire, continue en probabilité sur $\mathbb{R}^+$: si $t_1, \dots t_n\ h \in \mathbb{R}^+$, la loi de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est une loi stable d'indice p, qui est la même que celle de $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$; d'autre part $X_{t+h} - X_t$ tend vers 0 en probabilité lorsque $h \longrightarrow 0$.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des variables aléatoires de la forme $\lambda_1 X_{t_1} + \dots + \lambda_n X_{t_n}$. $\mathcal{E}$ est muni d'une norme de type p si on pose

$$\| \lambda_1 X_{t_1} + \dots + \lambda_n X_{t_n} \|^p = -\log E\left(e^{i(\lambda_1 X_{t_1} + \dots + \lambda_n X_{t_n})}\right).$$

De plus il est clair que la topologie définie par cette norme est celle de la convergence en probabilité.

Le complété $\bar{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ est donc la fermeture de $\mathcal{E}$ pour cette topologie : c'est un espace de variables aléatoires sont toutes les lois sont stables d'indice p.

On définit U_h opérateur linéaire sur $\mathcal{E}$ en posant

$U_h(\lambda_1 X_{t_1} + \ldots + \lambda_n X_{t_n}) = \lambda_1 X_{t_1+h} + \ldots + \lambda_n X_{t_n+h}$.

Alors U_h est un opérateur isométrique sur $\mathcal{E}$.

Comme $\| U_h X_t - X_t \|^p = \| X_{t+h} - X_t \|^p = -\log E(e^{i(X_{t+h} - X_t)})$

on voit que $U_h X_t \longrightarrow X_t$ (au sens de la norme) lorsque $h \longrightarrow 0$.

Donc la famille $(U_h)_{h \in \mathbb{R}^+}$ est un semi-groupe fortement continu d'isométries sur l'espace $\mathcal{E}$ de type p.

Le théorème précédent montre alors qu'on peut plonger $\mathcal{E}$ dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ de façon que (U_h) se prolonge en un semi-groupe fortement continu (V_h) d'automorphismes de l'espace de Banach réticulé $L^p(\Omega, \mu)$.

Soit $f \longrightarrow Y_f$ la fonction aléatoire stable d'indice p et linéaire sur l'espace $L^p(\Omega, \mu)$ qui a déjà été définie. Si f_o est l'élément de $L^p(\Omega, \mu)$ qui correspond à X_o on a donc $X_t = Y_{V_t f_o}$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

On peut généraliser les théorèmes précédents aux représentations des semi-groupes abéliens par des isométries d'un espace de type p. On utilise pour cela l'existence de moyennes invariantes sur ces semi-groupes.

Théorème. Soit S un semi-groupe abélien (noté additivement). Il existe sur S une moyenne m telle que $\forall \varphi \in B(S)$ et $\forall a \in S$ on ait $m(\varphi) = m(\varphi_a)$ (où $\varphi_a(s) = \varphi(s+a)$).

La démonstration se trouve dans [7].

Théorème 12. Soit S un semi-groupe abélien topologique, avec élément neutre 0 et satisfaisant la règle de simplification $(s+a = t+a \Longrightarrow s = t \;\forall s,t,a \in S)$. Soit $(U_s)_{s \in S}$ une famille d'isométries d'un espace normé E de type p $(1 \leq p < \infty)$ telle que : $U_s . U_t = U_{s+t}$ $\forall s,t \in S$; $U_s f \longrightarrow f$ lorsque $s \longrightarrow 0$ $\forall f \in E$.

<u>Alors on peut plonger E dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ de façon que U_s soit la restriction à E d'un automorphisme V_s de l'espace de Banach réticulé $L^p(\Omega, \mu)$, la famille $(V_s)_{s \in S}$ satisfaisant les conditions $V_s . V_t = V_{s+t}$ $\forall s, t \in S$; $V_s f \longrightarrow f$ lorsque $s \longrightarrow 0$, $\forall f \in L^p(\Omega, \mu)$.</u>

(Remarquons que l'hypothèse que S satisfait la règle de simplification est naturelle, puisque si $U_{s+a} = U_{t+a}$ soit $U_a . U_s = U_a . U_t$, U_a étant une isométrie, on a de toutes façons $U_s = U_t$).

On prend une moyenne invariante m sur S ; par hypothèse on a $E \subset L^p(\Omega_o, \mu_o)$. On fait le produit, suivant la moyenne m d'une famille, indexée par S, d'espaces identiques à $L^p(\Omega_o, \mu_o)$; et on pose $L^p(\Omega', \mu') = [L^p(\Omega_o, \mu_o)]^S / m$.

Un sous-espace réticulé $\mathcal{L}'$ dense dans $L^p(\Omega', \mu')$ est formé des applications $F : S \longrightarrow L^p(\Omega_o, \mu_o)$, uniformément bornées. On considère l'espace $\mathcal{L} = \{F \in \mathcal{L}'$; il existe $a \in S$, tel que $\forall \varepsilon$ réel > 0, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de 0, tel que $\| F(a + s + t) - F(a + s) \| \leq \varepsilon$ $\forall s \in S$ et $\forall t \in \mathcal{W}\}$.

$\mathcal{L}$ est un sous-espace réticulé de $\mathcal{L}'$: si $\| F(a + s + t) - F(a + s)\| \leq \varepsilon/2$ $\forall t \in \mathcal{W}$, et si $\| F'(a' + s + t) - F'(a' + s)\| \leq \varepsilon/2$ $\forall t \in \mathcal{W}'$, alors $\| (F + F')(a + a' + s + t) - (F + F')(a + a' + s) \| \leq \varepsilon$ $\forall t \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}'$ et $\| (F \cap F')(a + a' + s + t) - (F \cap F')(a + a' + s)\| \leq \varepsilon$ $\forall t \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}'$.

La fermeture de $\mathcal{L}$ dans $L^p(\Omega', \mu')$ est donc de la forme $L^p(\Omega, \mu)$. Pour chaque $b \in S$, on définit un opérateur V_b sur $\mathcal{L}$, en posant $(V_b F)(s) = F(s + b)$. On a $\| V_b F \|^p = m (\| F(s + b) \|^p)$ $= m (\| F(s) \|^p) = \|F\|^p$ d'après l'invariance de m.

Donc V_b est un opérateur isométrique sur $\mathcal{L}$. De plus, il est clair que $V_b . V_c = V_{b+c}$ et que $V_b(F \cap G) = V_b F \cap V_b G$.

En fait V_b est un automorphisme de $\mathcal{L}$: en effet si $F \in \mathcal{L}$ on définit $G \in \mathcal{L}$ en posant $G(s + b) = F(s) \ \forall s \in S$

$$G(s) = 0 \text{ si } s \notin b + S$$

Comme S satisfait la règle de simplification cela définit bien G(s) pour tout $s \in S$. De plus si $\| F(a + s + t) - F(a + s) \| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in \mathcal{W}$, alors $\| G(a + b + s + t) - G(a + b + s) \| \leq \varepsilon \ \forall t \in \mathcal{W}$. Donc $G \in \mathcal{L}$. Enfin il est clair que $V_b G = F$.

Soit $F \in \mathcal{L}$; on a $\| V_t F - F \|^p = m(\| F(s + t) - F(s) \|^p)$.
$= m(\| F(a + s + t) - F(a + s \|^p)$ d'après l'invariance de m. On choisit un voisinage $\mathcal{W}$ de 0 tel que $\forall t \in \mathcal{W}$ on ait $\forall s \in S \ \| F(a + s + t) - F(a + s) \| \leq \varepsilon$. On a alors $\| V_t F - F \|^p \leq \varepsilon^p \ \forall t \in \mathcal{W}$. Cela montre que $V_t F \longrightarrow F$ quant $t \longrightarrow 0$.

Il en résulte que la famille $(V_s)_{s \in S}$ est une représentation de S, fortement continue en 0, par des automorphismes de l'espace de Banach réticulé $L^p(\Omega, \mu)$.

On définit une application J de E dans $\mathcal{L}$, en posant pour $h \in E$: $J(h) = F$ avec $F(s) = U_s h$. On a $\| U_s h \| = \| h \|$ et donc $\| J(h) \| = \| h \|$. Comme U_s est fortement continue en 0, $\forall \varepsilon > 0$, il y a un voisinage $\mathcal{W}$ de 0, tel que $t \in \mathcal{W} \Longrightarrow \| U_t h - h \| \leq \varepsilon$ et donc $\| U_{s+t} h - U_s h \| \leq \varepsilon \ \ \forall s \in S$. Donc $\| F(s+t) - F(s) \| \leq \varepsilon \ \ \forall s \in S$ et F est bien dans $\mathcal{L}$. Enfin si $a \in S$, on a $J(U_a h) = V_a(J(h))$ par définition de V_a.

c.q.f.d.

D E U X I E M E   P A R T I E

PREORDRES ARCHIMEDIENS SUR LES R-ALGEBRES

Soit A une algèbre sur $\mathbb{R}$, commutative, avec élément unité 1. Un sous-ensemble P de A est appelé préordre si

1°) $\mathbb{R}^+ \times 1 \subset P$, et $-1 \notin P$.

2°) $a, b \in P \Longrightarrow a\,b \in P$ et $a + b \in P$.

Le préordre P est dit archimédien si, pour tout $a \in A$, il existe un réel $N > 0$ tel que $N - a \in P$. Le couple (A,P) est alors appelé $\mathbb{R}$-algèbre préordonnée archimédienne, ou, pour abréger algèbre archimédienne.

On appelle spectre de l'algèbre archimédienne(A,P) et on désigne par Sp (A,P) l'ensemble des homomorphismes d'algèbres $\chi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\chi(a) \geq 0 \;\; \forall a \in P$. Pour chaque $x \in A$, il existe par hypothèse un réel $M(x) > 0$ tel que $M(x) \pm x \in P$. On a donc $-M(x) \leq \chi(x) \leq M(x) \;\; \forall x \in A$ et $\forall \chi \in$ Sp(A,P).
Donc $Sp(A,P) = \left\{ \chi \in \prod_{x \in A} [-M(x), M(x)] \; ; \; \chi(x) \geq 0 \;\; \forall x \in P \; ; \right.$
$\left. \chi(x\,y) = \chi(x)\chi(y) \;\; \forall x, y \in A \; ; \chi(1) = 1 \right\}$.
Donc Sp (A,P) est fermé dans l'espace compact $\prod_{x \in A} [-M(x), M(x)]$. Dans la suite on considère toujours Sp(A,P) comme muni de cette topologie, qui en fait un espace compact.

Pour chaque $x \in A$ on désigne par $\hat{x}$ la fonction continue réelle sur Sp(A,P) définie par $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$. Il est clair que $x \longrightarrow \hat{x}$ est un homomorphisme d'algèbres de A dans l'algèbre des fonctions continues sur Sp(A,P). L'image $\hat{A}$ de A sépare les points de Sp(A,P) (si $\hat{x}(\chi_1) = \hat{x}(\chi_2) \; \forall x \in A$ alors $\chi_1 = \chi_2$) donc est dense dans l'espace des fonctions réelles continues sur Sp(A,P) (théorème de Stone).

<u>Théorème 1. Soit T une forme linéaire sur A, telle que $T(a) \geq 0$, $\forall a \in P$, et $T(1) = 1$. Alors il existe une mesure de Radon $\mu \geq 0$ sur Sp(A,P) et une seule telle que $T(x) = \int_{Sp(A,P)} \hat{x}(\chi)\mu(d\chi)$.</u>

On désigne par A^* l'espace des formes linéaires sur A, muni de la topologie de la convergence simple sur A. C'est un espace localement convexe. Soit $K \subset A^*$, l'ensemble des formes linéaires T sur A, telles que $T(1) = 1$, qui sont ≥ 0 sur P. Alors K est un convexe compact de A^* : en effet $K = \{T \in A^* ; - M(x) \leq T(x) \leq M(x) \quad \forall x \in A ; T(x) \geq 0 \quad \forall x \in P ; T(1) = 1\}$.

Soit χ un point extrémal de K, et $a \in A$ tel que $a \in P$ et $1-a \in P$. On pose $U(x) = \chi(ax) - \chi(a)\chi(x)$. Alors $\chi \pm U \in K$: en effet $(\chi + U)(x) = \chi(x)\,[1 - \chi(a)] + \chi(ax)$; donc $(\chi + U)(1) = 1$ et si $x \in P$, alors $ax \in P$ et donc $\chi(x) \geq 0$, $\chi(ax) \geq 0$; comme $1-a \in P$, on a $1-\chi(a) \geq 0$ d'où $(\chi + U)(x) \geq 0$. De même $(\chi - U)(x) = \chi[x(1-a)] + \chi(a)\chi(x)$; on a encore $(\chi - U)(1) = 1$ et si $x \in P$ alors $x(1-a) \in P$, donc $(\chi - U)(x) \geq 0$.

Comme χ est extrémal, et que $\chi = \frac{1}{2}\,[(\chi + U) + (\chi - U)]$ on en déduit que $U = 0$. On a donc $\chi(ax) = \chi(a)\chi(x)$ si $a \in P$ et $1-a \in P$, pour tout $x \in A$. On a en fait $\chi(ax) = \chi(a)\chi(x)$ $\forall a \in P$: car pour M réel > 0 assez grand, on a $M-a \in P$. Donc $\frac{a}{M} \in P$ et $1-\frac{a}{M} \in P$, d'où $\chi(\frac{a}{M}x)\,\chi(x) = \chi(\frac{a}{M})\chi(x)$ et donc $\chi(ax) = \chi(a)\chi(x)$.
Finalement on a $\chi(ax) = \chi(a)\chi(x)$ $\forall a \in A$: car, pour M réel > 0 assez grand on a $M-a \in P$. Donc $\chi[(M-a)x] = \chi(M-a)\chi(x)$ soit $\chi(Mx) - \chi(ax) = \chi(M)\chi(x) - \chi(a)\chi(x)$ d'où $\chi(ax) = \chi(a)\chi(x)$.

Il en résulte que les points extrémaux de K sont tous dans Sp(A,P). D'après le théorème de Krein-Milman appliqué au convexe compact K de l'espace localement convexe A^*, pour chaque $T \in K$, il existe une mesure $\mu \geq 0$ sur Sp(A,P) telle que, pour tout $x \in A$ on ait
$T(x) = \int_{Sp(A,P)} \chi(x)\mu(d\chi)$. Car Sp(A,P) est un sous-ensemble compact de K qui contient tous les points extrémaux.

On a donc $T(x) = \int_{Sp(A,P)} \hat{x}(\chi)\mu(d\chi)$.

L'unicité de μ est évidente puisque les fonctions $\hat{x}$ sont denses dans l'espace des fonctions continues sur Sp(A,P)

c.q.f.d.

Théorème 2. Soit (A,P) une algèbre archimédienne, et soit $a \in A$, tel que $\hat{a}(\chi) > 0$ $\forall \chi \in Sp(A,P)$. Alors $a \in P$.

Supposons que $a \notin P$, et soit C_o le cône convexe de A formé des éléments de la forme $-\lambda a + p$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $p \in P$. Alors $C_o \supset P$, et $-1 \notin C_o$: car si $-1 = -\lambda a + p$ on a $\lambda \neq 0$ puisque $-1 \notin P$, d'où $a = \frac{p+1}{\lambda} \in P$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit C un élément maximal de la famille des cônes convexes Γ tels que $\Gamma \supset C_o$ et $-1 \notin \Gamma$. Le théorème de Zorn donne immédiatement l'existence d'un tel cône. On définit une application T de A dans $\mathbb{R}$ en posant :
$T(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \ ; \ \lambda - x \in C\}$.

Cette borne inférieure existe, puisqu'on a $M + x \in P$ pour un réel $M > 0$; alors $M + x \in C$, et si $\lambda - x \in C$ on a $\lambda + M = (\lambda - x) + (M + x) \in C$. D'où $\lambda \geqslant - M$ puisque $-1 \notin C$.
Il est clair que $T(\lambda) = \lambda$ pour tout réel λ.
Pour tout $x \in A$, on a $x \in C$ ou $-x \in C$: en effet si $x \notin C$, l'ensemble $\Gamma = \{\lambda x + c \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}^+, c \in C\}$ est un cône convexe contenant strictement C. D'après la maximalité de C, on a $-1 \in \Gamma$, soit $\lambda x + c = -1$. On a $\lambda \neq 0$ puisque $-1 \notin C$, et donc $-x = \frac{1+c}{\lambda} \in C$.

$T(-x) = -T(x)$ pour tout $x \in A$: Soit λ un réel tel que $\lambda < T(x)$; alors $\lambda - x \notin C$ et donc $-\lambda + x \in C$, d'où $-\lambda \geqslant T(-x)$. Comme λ est arbitraire $< T(x)$, on a $T(-x) \leqslant -T(x)$.

Soit λ un réel $> T(x)$; alors $\lambda - \varepsilon \geqslant T(x)$ pour ε réel > 0 assez petit, donc $\lambda - \varepsilon - x \in C$; si $-\lambda + x \in C$, on a $(\lambda - \varepsilon - x) + (-\lambda + x) \in C$ soit $-\varepsilon \in C$ ce qui est contraire à l'hypothèse : $-1 \notin C$. Donc $-\lambda + x \notin C$ et donc $-\lambda < T(-x)$. Comme λ est arbitraire $> T(x)$, on a $-T(x) \leqslant T(-x)$. Donc $T(x) = T(-x)$.

D'après la définition de T, il est clair que $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ si λ est réel $\geqslant 0$. On a donc $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\underline{T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x,y \in A}$: en effet si $\alpha > T(x)$, $\beta > T(y)$ alors $\alpha - x \in C$, $\beta - y \in C$ donc $\alpha + \beta - x - y \in C$ et $\alpha + \beta \geqslant T(x+y)$. Donc $T(x) + T(y) \geqslant T(x+y)$.

Par suite $T(-x) + T(-y) \geqslant T(-x-y)$ d'où $-T(x) - T(y) \geqslant -T(x+y)$. D'où l'égalité cherchée.

Il en résulte que T est une forme linéaire sur A, telle que $T(1) = 1$; de plus $T(x) \geqslant 0$ $\forall x \in C$: car si $x \in C$, $-x - \varepsilon \notin C$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ (sinon $x + (-x - \varepsilon) \in C$ d'où $-\varepsilon \in C$). Donc $-\varepsilon \leqslant T(x)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et $T(x) \geqslant 0$.

Comme $C \supset P$, on peut appliquer à T le théorème précédent et on en déduit que $T(x) = \int_{Sp(A,P)} \hat{x}(\chi)\mu(d\chi)$ pour une certaine mesure de Radon $\geqslant 0$ de masse 1, pour tout $x \in A$. Donc $T(a) = \int_{Sp(A,P)} \hat{a}(\chi)\mu(d\chi) > 0$ puisque $\hat{a}(\chi) > 0$ pour tout $\chi \in Sp(A,P)$ et que $\hat{a}$ est une fonction continue.

Or $-a \in C$, et donc $T(-a) \geqslant 0$ soit $T(a) \leqslant 0$, ce qui est une contradiction.

c.q.f.d.

Une algèbre A sur $\mathbb{R}$ est dite réelle si $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 1 \neq 0$ $\forall x_1, \ldots, x_n \in A$. Du théorème précédent il résulte que <u>si (A,P) est une algèbre archimédienne, alors A est une algèbre réelle</u> : en effet si $x_1, \ldots, x_n \in A$, $\hat{x}_1^2 + \ldots + \hat{x}_n^2 + \frac{1}{2}$ est évidemment > 0 sur $Sp(A,P)$; donc $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{1}{2} \in P$, d'où $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$.

Donnons deux exemples simples d'algèbres archimédiennes :

1°) - A est une algèbre de Banach sur $\mathbb{R}$, commutative avec unité, et réelle. Nous appellerons une telle algèbre, <u>une algèbre de Banach réelle.</u> On définit un préordre P sur A en posant $P = \{ x \in A$; il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $x = e^{x_1} + \ldots + e^{x_n} \}$. Comme A est réelle et que $e^{x_1}, \ldots e^{x_n}$ sont évidemment des carrés d'éléments de A, on a $-1 \notin P$. D'autre part P est archimédien : car si $x \in A$ et si $N > \| x \|$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{x}{N}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$ converge vers $y \in A$ et on a

$e^y = 1 - \frac{x}{N}$, donc $N - x \in P$.

Il en résulte que si $\chi \in Sp(A,P)$ on a $\chi(N-x) \geqslant 0$ pour tout réel $N > \| x \|$ et donc $\chi(x) \leqslant \| x \|$. De même $\chi(-x) \leqslant \| x \|$ et donc $| \chi(x) | \leqslant \| x \|$.

Sp (A,P) sera appelé le spectre de l'algèbre de Banach réelle A : c'est l'ensemble des homomorphismes continus de A dans $\mathbb{R}$. Le théorème 2 s'énonce donc, dans ce cas particulier :

<u>Théorème</u>. <u>Soient A une algèbre de Banach réelle et $a \in A$. Pour que a soit une somme d'exponentielles d'éléments de A, il faut et il suffit que $\hat{a}$ reste > 0 sur le spectre de A</u>.

2°) $A = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ (anneau des polynômes à coefficients réels à n variables). On considère le préordre P sur A, engendré par $X_1, \ldots, X_n$, $1-X_1, \ldots, 1-X_n$. Donc P est l'ensemble des polynômes $p(X_1, \ldots, X_n, 1-X_1, \ldots, 1-X_n)$ où $p(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ est un polynôme à 2n variables à coefficients $\geqslant 0$.

On montre par récurrence sur n, que P est archimédien : c'est évident pour $n = 0$; si $p(X_1, \ldots, X_n) \in A$, on a $p = p_1 - p_2$, où p_1, p_2 sont à coefficients $\geqslant 0$ (donc dans P). On a $p_1 = a_o + a_1 X_n + a_2 X_n^2 + \ldots + a_k X_n^k$, $a_o, a_1, \ldots, a_k$ étant des polynômes à coefficients $\geqslant 0$ en $X_1, \ldots, X_{n-1}$. On a alors

$a_o + a_1 + \ldots + a_k - p_1 = a_1(1-X_n) + a_2(1-X_n^2) + \ldots + a_k(1-X_n^k)$

$= (1-X_n)\ q\ (X_1,\ldots,X_{n-1})$, où q est à coefficients réels $\geqslant 0$.

Donc $a_o + \ldots + a_k - p_1 \in P$. D'après l'hypothèse de récurrence il existe N réel >0 tel que $N-a_o-\ldots-a_k \in P$. Donc $N-p_1 \in P$ et $N-p = N-p_1 + p_2 \in P$.

Sp(A,P) est l'ensemble des homomorphismes χ: $A \longrightarrow \mathbb{R}$, tels que $\chi(X_1),\ldots,\chi(X_n),\chi(1-X_1)\ldots,\chi(1-X_n) \geqslant 0$. Un tel homomorphisme est caractérisé par les n réels $\chi(X_1),\ldots,\chi(X_n)$ qui doivent satisfaire $0 \leqslant \chi(X_i) \leqslant 1$. Donc $Sp(A,P) = [0,1]^n$. Le théorème 2 s'énonce donc dans ce cas :

<u>Théorème</u>. <u>Soit $p(X_1,\ldots,X_n)$ un polynôme à coefficients réels, qui prend des valeurs $\geqslant 0$ pour $0 \leqslant X_i \leqslant 1$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Alors il existe un polynôme $q(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots v_n)$ à 2n variables, à coefficients réels $\geqslant 0$ tel que</u> :

$$\underline{p(X_1,\ldots,X_n) = q(X_1,\ldots,X_n,\ 1-X_1,\ldots,1-X_n).}$$

<u>Définition</u> : (A,P) étant une algèbre archimédienne, un idéal J de A sera dit régulier si tout élément de J est différence de 2 éléments de $J \cap P$.

Désignons par X le spectre de (A,P) ; si $f \in A$, et $x \in X$, nous noterons f(x) la valeur de l'homomorphisme x sur l'élément f de A (au lieu de $\hat{f}(x)$).

J étant un idéal de A, on pose $J^* = \{x \in X\ ;\ f(x) = 0 \text{ pour toute } f \in J\}$. Il est clair que J^* est un sous-ensemble fermé de X .

Nous désignerons par J^2 le carré de l'idéal J, c'est-à-dire l'ensemble $f_1g_1 + \ldots + f_ng_n$ pour $f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_n \in J$. Il est clair que J^2 est un idéal, qui est régulier si J l'est. Le théorème suivant généralise un théorème de [11]

<u>Théorème 3. Soient (A,P) une algèbre archimédienne, J un idéal régulier de A, et T une forme linéaire sur J, telle que $T(f) \geqslant 0$ $\forall f \in J \cap P$. Alors il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ et une seule sur l'espace localement compact $X - J^*$,</u>

<u>telle que</u> $\hat{J} \subset L^1(\mu)$ <u>et</u> $T(f) = \int_{X-J^*} f(x)\mu(dx)$ <u>pour toute</u> $f \in J^2$. <u>On a de plus</u>

$T(f) \geqslant \int_{X-J^*} f(x)\mu(dx)$ <u>pour toute</u> $f \in J \cap P$.

Si $\omega \in J \cap P$, et si on pose $T_\omega(f) = T(\omega f)$, pour toute $f \in A$, T_ω est une forme linéaire sur A, qui est $\geqslant 0$ sur P. Du théorème 1, on déduit qu'il existe une mesure de Radon $\mu_\omega \geqslant 0$ bornée sur X, telle que

$T(\omega f) = \int_X f(x)\mu_\omega(dx)$ pour toute $f \in A$.

Comme $T(\omega_1\omega_2 f) = \int_X f.\omega_1 d\mu_{\omega_2} = \int_X f.\omega_2 d\mu_{\omega_1} = \int_X f.\,d\mu_{\omega_1\omega_2}$ on voit,

d'après le théorème 1 (unicité) que

$\omega_1 d\mu_{\omega_2} = \omega_2 d\mu_{\omega_1} = d\mu_{\omega_1\omega_2}$ quels que soient $\omega_1, \omega_2 \in J \cap P$.

Pour tout compact $K \subset X-J^*$, il existe un élément ω_K de $J \cap P$ tel que $\omega_K(x) > 0$ $\forall x \in K$: en effet, pour tout $x \in K$, il existe $f \in J$ telle que $f(x) \neq 0$ (puisque $x \notin J^*$) ; or, puisque J est régulier, on a $f = f' - f''$ avec $f', f'' \in J \cap P$; on a $f'(x) \neq 0$ ou $f''(x) \neq 0$; cela montre que pour tout $x \in K$, il existe $f_x \in J \cap P$ telle que $f_x(x) > 0$, et par suite f_x est > 0 sur un voisinage V_x de x. On choisit $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ recouvrent K, et on pose $\omega_K = f_{x_1} + \ldots + f_{x_n}$. Alors $\omega_K \in J \cap P$ et ω_K est > 0 sur K.

On définit une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur $X-J^*$ de la façon suivante : si φ est continue à support compact $K \subset X-J^*$, on choisit $\omega \in J \cap P$, $\omega > 0$ sur K, et on pose $\mu(\varphi) = \int_X \frac{\varphi}{\omega}\, d\mu_\omega$.

Cette définition ne dépend pas du choix de ω : si ω_1, ω_2 sont > 0 sur K

on a $\int_X \frac{\varphi}{\omega_1\omega_2}\,.\,\omega_1\, d\mu_{\omega_2} = \int_X \frac{\varphi}{\omega_1\omega_2}\, \omega_2\, d\mu_{\omega_1}$ puisque

$\omega_1\, d\mu_{\omega_2} = \omega_2 d\mu_{\omega_1}$. Donc $\displaystyle\int_X \frac{\varphi}{\omega_2}\, d\mu_{\omega_2} = \int_X \frac{\varphi}{\omega_1}\, d\mu_{\omega_1}$.

Il est clair que μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur $X-J^*$. De plus pour toute fonction de Baire φ (mesurable pour la σ-algèbre engendrée par les fonctions continues à support compact contenu dans $X-J^*$) bornée et nulle en dehors d'un compact $K \subset X-J^*$, on a $\displaystyle\int_{X-J^*} \varphi\, d\mu = \int_X \frac{\varphi}{\omega}\, d\mu_\omega$, pour tout $\omega \in J \cap P$, $\omega > 0$ sur K.

Soit alors $\omega \in J \cap P$, et $K_n = \left\{x \;;\; \omega(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$. Alors K_n est compact et $K_n \subset X-J^*$. Désignons par ω_n la fonction égale à ω sur K_n et à 0 ailleurs. Il est clair que ω_n est une fonction de Baire, et donc
$\displaystyle\int_{X-J^*} \omega_n\, d\mu = \int_X \frac{\omega_n}{\omega}\, d\mu_\omega$. Donc $\displaystyle\int_{X-J^*} \omega_n\, d\mu \leq \int_X d\mu_\omega = T(\omega)$.

Lorsque $n \longrightarrow \infty$, ω_n est une suite croissante qui converge vers ω sur $X-J^*$. On en déduit que pour tout $\omega \in J \cap P$, $\omega \in L^1(\mu)$ et $\displaystyle\int_{X-J^*} \omega\, d\mu \leq T(\omega)$.

Comme tout élément de J est différence de deux éléments de $J \cap P$, on voit que $\hat{J} \subset L^1(\mu)$.

On a d'autre part $\displaystyle\int_{X-J^*} \omega_n\, \omega\, d\mu = \int_X \omega_n\, d\mu_\omega$ par définition de μ.
Quand $n \longrightarrow \infty$, $\omega_n \omega \uparrow \omega^2$, et $\omega_n \uparrow \omega$. Donc $\displaystyle\int_{X-J^*} \omega^2 d\mu = \int_X \omega\, d\mu_\omega = T(\omega^2)$ quel que soit $\omega \in J \cap P$. Par suite, si ω_1, $\omega_2 \in J \cap P$ on a
$\displaystyle\int (\omega_1+\omega_2)^2\, d\mu = T[(\omega_1+\omega_2)^2]$; $\displaystyle\int \omega_1^2\, d\mu = T(\omega_1^2)$; $\displaystyle\int \omega_2^2\, d\mu = T(\omega_2^2)$, d'où par différence $\displaystyle\int_{X-J^*} \omega_1 \omega_2\, d\mu = T(\omega_1 \omega_2)$.

Donc si f, $g \in J$, en écrivant f et g comme différences de 2 éléments de $J \cap P$, et en appliquant l'égalité précédente, on obtient $\int_{X-J^*} f\, g\, d\mu = T(fg)$, ce qui montre que $\int_{X-J^*} f\, d\mu = T(f)$ pour toute $f \in J^2$.

Il ne reste à montrer que l'unicité de μ : soit μ_1 une autre mesure de Radon $\geqslant 0$ sur $X-J^*$ telle que $\int_{X-J^*} f d\mu_1 = T(f)$ pour toute $f \in J^2$. Alors pour tout $\omega \in J \cap P$, et pour toute $f \in A$, on a $T(\omega^2 f) = \int_{X-J^*} \omega^2 f d\mu_1 = \int_{X-J^*} \omega^2 f\, d\mu$.

Comme les $f \in A$ sont denses dans $\mathscr{C}(X)$ (espace des fonctions réelles continues sur X) on a $\omega^2 d\mu_1 = \omega^2 d\mu$ et cela $\forall \omega \in J \cap P$. Mais pour tout $x \in X-J^*$, il existe $\omega \in J \cap P$ telle que $\omega > 0$ dans un voisinage de x comme on l'a vu plus haut. Il en résulte que $\mu = \mu_1$.

c.q.f.d.

Nous nous proposons maintenant d'appliquer les théorèmes 2 et 3 à certains exemples d'algèbres archimédiennes. Le premier servira à démontrer un résultat utilisé dans la 1ère partie (théorème 9).

On considère un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, et un cône convexe fermé $\Gamma \subset E$, d'intérieur non vide et ne contenant pas de droite. On pose $\Gamma^* = \{t \in E^*;\ \langle t,x \rangle \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \Gamma\}$. Alors Γ^* est un cône convexe fermé dans E^*, d'intérieur non vide et ne contenant pas de droite.

On choisit une norme $x \longrightarrow |x|$ sur E. On sait que, pour tout point t intérieur de Γ^*, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\langle t,x \rangle \geqslant \alpha |x|$.

On considère l'espace $\mathscr{A} = \left\{ f \in L^1(\Gamma, dx)\ ;\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \int_\Gamma |f(x)| e^{\varepsilon |x|} dx < \infty \right\}$ (où dx est la mesure de Lebesgue sur E).

$\mathscr{A}$ est une algèbre pour le produit de convolution :

$$(f * g)(x) = \int_E f(y) g(x-y) dy = \int_{\substack{y \in \Gamma \\ x-y \in \Gamma}} f(y) g(x-y) dy$$

En effet si on pose $M_\varepsilon(f) = \int_\Gamma |f(x)|\, e^{\varepsilon|x|}\, dx$, on a

$$M_\varepsilon(f_* g) = \int_{x\in\Gamma} e^{\varepsilon|x|} dx \left| \int_{\substack{y\in\Gamma \\ x-y\in\Gamma}} f(y)g(x-y)dy \right|$$

Donc $M_\varepsilon(f_* g) \leq \int_{x\in\Gamma} e^{\varepsilon|x|} dx \int_{\substack{y\in\Gamma \\ x-y\in\Gamma}} |f(y)|\ |g(x-y)|dy$

$$\leq \int_{\Gamma^2} e^{\varepsilon|x+y|} |f(x)|\ |g(y)|dx\, dy \leq M_\varepsilon(f).M_\varepsilon(g)$$

Donc $M_\varepsilon(f) < \infty$ et $M_\varepsilon(g) < \infty \Longrightarrow M_\varepsilon(f_* g) < \infty$.

L'algèbre $\mathcal{A}$ n'ayant pas d'élément unité, on désigne par $\mathcal{B}$ l'algèbre $\mathcal{A} + \mathbb{R}.\delta$ obtenue en lui ajoutant un élément unité noté δ .

Sur $\mathcal{B}$ on définit un préordre P : c'est l'ensemble des sommes de puissances $2k^{\text{ièmes}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$, où k est un entier fixé $\geqslant 1$.

On ne peut avoir $-\delta \in P$: car si $-\delta = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \delta + f_i)^{*2k}$ on a $-1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2k}$ ce qui est impossible.

<u>Pour toute $f \in \mathcal{A}$, tout $\varepsilon > 0$ tel que $M_\varepsilon(f) < \infty$ on a $M_\varepsilon(f)\delta - f \in P$.</u>

On pose $g = \frac{1}{M_\varepsilon(f)} \cdot f$. Donc $M_\varepsilon(g) = 1$

Le développement en série de $(1-x)^{\frac{1}{2k}}$ s'écrit

$(1-x)^{\frac{1}{2k}} = 1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_n x^n - \dots$ avec $a_n \geqslant 0$. Il converge absolument dans l'intervalle $[-1,1]$.

Comme $\| g\|_1 \leq M_\varepsilon(g) = 1$, et que $\| g^{*n} \|_1 \leq \| g \|_1^n$, la série $a_1 \|g \|_1 + a_2 \| g^{*2} \|_1 +\dots+ a_n \|g^{*n} \|_1+\dots$ converge. On peut donc poser $h = a_1 g + a_2 g^{*2}+\dots+a_n g^{*n}+\dots$ et on a $h \in L^1(\Gamma, dx)$.

On a $M_\varepsilon(h) \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i M_\varepsilon(g^{*i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$ puisque $M_\varepsilon(g^{*i}) \leq [M_\varepsilon(g)]^i = 1$.

Cela montre que $h \in \mathcal{A}$. Par construction de h, on a alors $(\delta - h)^{*2k} = \delta - g$ et par suite $\delta - g \in P$. Donc $M_\varepsilon(f)\, \delta - f \in P$.

Il en résulte que P est archimédien : si $\lambda\delta + f \in \mathcal{B}$, et si $N-\lambda \geq M_\varepsilon(f)$ alors $N\delta - (\lambda\delta + f) = (N-\lambda)\delta - f \in P$.

Il est clair que l'application $\lambda\delta + f \longrightarrow \lambda$ de B dans $\mathbb{R}$ est un homomorphisme de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$ qui est ≥ 0 sur P. C'est donc un élément du spectre de $(\mathcal{B}, P)$, qu'on appelle le point à l'infini.

Soit $\chi \in Sp(\mathcal{B}, P)$, différent du point à l'infini ; χ ne s'annule donc pas identiquement sur $\mathcal{A}$. C'est une forme linéaire sur $\mathcal{A}$, et comme $M_\varepsilon(f)\delta \pm f \in P$ $\forall f \in \mathcal{A}$ on a $|\chi(f)| \leq M_\varepsilon(f)$ $\forall f \in \mathcal{A}$ et $\forall \varepsilon > 0$ tel que $M_\varepsilon(f) < \infty$.

Quand $\varepsilon \downarrow 0$, $M_\varepsilon(f) \longrightarrow \| f \|_1$. On a donc $|\chi(f)| \leq \| f \|_1$ $\forall f \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est dense dans $L^1(\Gamma, dx)$ ($\mathcal{A}$ contient toutes les fonctions continues à support compact dans Γ) on voit que

$$\chi(f) = \int_\Gamma f(x)\chi(x)\, dx \text{ avec } \chi(x) \in L^\infty(\Gamma),\ \|\chi\|_\infty \leq 1.$$

Si $f, g \in \mathcal{A}$ on a $\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g)$. Ce qui s'écrit :

$$\int_{\Gamma^2} \chi(x+y)\, f(x)\, g(y)\, dx\, dy = \int_{\Gamma^2} \chi(x)\chi(y)\, f(x)\, g(y)\, dx\, dy.$$

$\forall f, g \in \mathcal{A}$. Comme les fonctions de la forme $f(x)g(y)$ engendrent un sous-espace dense de $L^1(\Gamma^2, dx\,dy)$, on a $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ presque partout sur Γ^2.

Si t est un point intérieur de Γ^* on a $\langle t,x\rangle \geq \alpha|x|$ $\forall x \in \Gamma$, pour un certain réel $\alpha > 0$, et donc $\chi(x)\, e^{-\langle t,x\rangle} \in L^1(\Gamma)$.

De plus $\int_\Gamma \chi(x)\, e^{-\langle t,x\rangle}\, dx$ ne peut être nul pour tout $t \in \overset{\circ}{\Gamma}{}^*$

En effet, lorsque t décrit $\overset{\circ}{\Gamma}{}^*$, les fonctions $\varphi_t = e^{-\langle t,x\rangle}$ engendrent une algèbre de fonctions sur Γ qui tendent vers 0 à l'infini, et séparent les points (si $e^{-\langle t,x\rangle} = e^{-\langle t,y\rangle}$ $\forall t \in \overset{\circ}{\Gamma}{}^*$, alors $\langle t,x-y\rangle = 0$ $\forall t \in \overset{\circ}{\Gamma}{}^*$, donc $x = y$ puisque $\overset{\circ}{\Gamma}{}^*$ engendre E^*). Donc ces fonctions forment un système total dans $L^1(\Gamma, dx)$, et par suite, comme $\chi(x)$ n'est pas identiquement nul (car, par hypothèse, χ n'est pas le point à l'infini de Sp(B,P)), il y a un point t_o, intérieur à Γ^* tel que

$$\int_\Gamma \chi(x)\, e^{-\langle t_o,x\rangle} dx \neq 0.$$

Posons $\eta_o(x) = \chi(x)\, e^{-\langle t_o,x\rangle}$. On a $\eta_o(x+y) = \eta_o(x)\,\eta_o(y)$ presque sûrement sur Γ^2 et $\eta_o(x) \leq e^{-\alpha|x|}$, α réel > 0.

Donc : $\int_\Gamma \eta_o(x+y)\, dy = \eta_o(x) \int_\Gamma \eta_o(y)\, dy$ presque sûrement en x.

Soit $\int_{x+\Gamma} \eta_o(y)\, dy = \eta_o(x) \int_\Gamma \eta_o(y)\, dy$ presque sûrement en x.

Mais le premier membre est une fonction continue de x, et comme $\int_\Gamma \eta_o(y)\, dy \neq 0$, $\eta_o(x)$ équivaut à une fonction continue.

Comme $\chi(x) = \eta_o(x) e^{\langle t_o, x\rangle}$, $\chi(x)$ équivaut aussi à une fonction continue. On a donc $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ $\forall x, y \in \Gamma$ si on prend la version continue de χ. Donc $\chi(x) = e^{-T(x)}$ où T est réelle, continue sur Γ, telle que $T(x+y) = T(x) + T(y)$ $\forall x, y \in \Gamma$. Comme $|\chi(x)| \leq 1$ on a $T \geqslant 0$ sur Γ. Comme Γ engendre E, on a $T(x) = \langle t,x \rangle$ avec $t \in \Gamma^*$.

<u>Les éléments de Sp($\mathfrak{B}$,P) (sauf le point à l'infini) correspondent donc points de Γ^* par la relation $\chi(f) = \int_\Gamma f(x)\, e^{-\langle t,x\rangle}\, dx$ pour $f \in \mathcal{A}$.</u>

La topologie de Sp($\mathfrak{B}$,P) est celle du compactifié de Γ^* par un point à l'infini : en effet c'est la topologie la plus faible rendant continues les fonctions $t \longrightarrow \int_\Gamma f(x)\, e^{-\langle t,x\rangle}\, dx$ sur $\Gamma^* \cup \{\infty\}$. Or la topologie Γ de Γ^* rend toutes ces fonctions continues et elles tendent toutes vers 0 à l'infini (lorsque $t \longrightarrow \infty$ $e^{-\langle t,x\rangle} \longrightarrow 0$ pour tout $x \in \overset{o}{\Gamma}$ donc presque sûrement, et on applique le théorème de Lebesgue). Donc le compactifié d'Alexandroff de Γ^* a une topologie plus fine que celle de Sp($\mathfrak{B}$,P), donc identique puisqu'elles sont compactes toutes deux.

<u>Théorème 4. Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{A}$ telle que $T(f^{*2k}) \geqslant 0$ pour toute $f \in \mathcal{A}$ d'intégrale nulle sur Γ. Alors il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur $\Gamma^* - \{0\}$ et une seule, telle que</u>

$$T(f) = \int_{\Gamma^* - \{0\}} \hat{f}(t)\mu(dt), \text{ pour toute } f \text{ de la forme } f = f_1 * f_2 * \cdots * f_{4k} \text{ avec}$$

$f_i \in \mathcal{A}$ <u>et d'intégrale nulle ($1 \leq i \leq 4k$), avec</u> $\hat{f}(t) = \int_\Gamma f(x)\, e^{-\langle t,x\rangle}\, dx$.

Soit J l'idéal de $\mathfrak{B}$ formé des sommes d'éléments de la forme $f_1 * f_2 * \cdots * f_{2k}$ avec $f_i \in \mathcal{A}$ d'intégrale nulle sur Γ ($1 \leq i \leq 2k$). Alors J est un idéal régulier :

car on a l'identité

$$\sum_{\pm}{}' \varepsilon \, (x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_{2k})^{2k} = (2k)\,!\; 2^{2k-1}\, x_1 \dots x_{2k}$$

(cette notation signifie qu'on somme sur toutes les combinaisons de signes + et - , et qu'on prend $\varepsilon = 1$ s'il y a un nombre pair de signes -, et $\varepsilon = -1$ s'il y en a un nombre impair).

Cette identité, appliquée à l'algèbre $\mathcal{A}$, et aux éléments $f_1, \dots, f_{2k}$ d'intégrale nulle, montre que $f_1 * \dots * f_{2k}$ est différence de deux éléments de $J \cap P$.

$$J^* = \left\{ t \in \Gamma^* \cup \{\infty\} ; \int_{\Gamma} f(t) e^{-\langle t,x\rangle} dx = 0 \quad \forall f \in J \right\}.$$

Il est clair que J^* contient les deux points 0 et ∞.

Soit $t_o \neq o$ un élément de Γ, g une fonction $\geq o$ à support compact continue dans Γ, et $a \in \mathring{\Gamma}$. Alors $\langle t_o, a\rangle > 0$. On définit g_a par $g_a(x+a) = g(x)$; $g_a(x) = 0$ si $x \in \Gamma$ n'est pas de la forme y + a. Alors $\int_{\Gamma} g_a(x)\, dx = \int_{\Gamma} g(x)\, dx$ et $\int_{\Gamma} g_a(x)\, e^{-\langle t_o,x\rangle} dx = e^{-\langle t_o,a\rangle} \int_{\Gamma} g(x)\, dx$.

Donc si $f = (g-g_a)^{*2k}$, on a $f \in J$ et $\hat{f}(t_o) = [1-e^{-\langle t_o,a\rangle}]^{2k} \left(\int_{\Gamma} g(x)dx\right)^{2k}$ d'où $\hat{f}(t_o) \neq 0$. Cela montre que $J^* = \{0, \infty\}$.

D'autre part, la forme linéaire T est ≥ 0 sur $J \cap P$. Soit en effet $f \in J \cap P$. Comme $f \in P$ on a

$$f = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \delta + f_i)^{2k} . \text{ D'où } 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2k} \text{ et } \lambda_i = 0.$$

On a donc $f = \sum_{i=1}^{n} f_i^{*2k}$ avec $f_i \in \mathcal{A}$. Comme $f \in J$, on a $\hat{f}(o) = 0$, donc

$\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i^{2k}(o) = 0$. Par suite $\hat{f}_i(0) = 0$ et chaque f_i est d'intégralle nulle sur Γ . D'après l'hypothèse on a $T(f_i^{*2k}) \geq 0$ et donc $T(f) \geq 0$.

Le résultat cherché s'obtient alors en appliquant le théorème 3.

c.q.f.d.

Nous considérons maintenant un autre exemple d'algèbre archimédienne : l'algèbre $\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}^+$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions 1 et $x^n\, e^{-ax}$ (où n décrit l'ensemble des entiers ≥ 0, et a l'ensemble des réels >0). Il est clair que chaque fonction de $\mathcal{A}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}^+$, continue, et a une limite quand $x \longrightarrow +\infty$.

<u>Lemme 1</u>. <u>Soit a un réel > 0, $\alpha \geq 0$, et $P(t)$ un polynôme de degré $\leq n-1$. Alors</u>

$$x^n\, e^{-ax} \int_0^\alpha e^{-tx}\, P(t)\, dt \in \mathcal{A}.$$

Démonstration par récurrence sur n : si n = 1, on a

$$x\, e^{-ax} \int_0^\alpha e^{-tx}\, dt = e^{-ax} - e^{-(a+\alpha)x} \in \mathcal{A}. \text{ Or}$$

$$x^n\, e^{-ax} \int_0^\alpha e^{-tx} P(t)\, dt = x^{n-1}\, e^{-ax}\, [P(o) - e^{-\alpha x}\, P(\alpha)]$$

$$+ x^{n-1}\, e^{-ax} \int_0^\alpha e^{-tx}\, P'(t)\, dt$$ en intégrant par parties. Comme $P'(t)$ est de degré $\leq n-2$, on a bien le résultat en appliquant l'hypothèse de récurrence.

Une autre forme des fonctions considérées au lemme 1 est

$x^n \int_\alpha^\beta e^{-tx}\, P(t)\, dt$ avec $0 < \alpha < \beta$ et $P(t)$ polynôme de degré $\leq n-1$.

<u>Lemme 2</u>. <u>La fonction</u> $x^n \int_0^\alpha e^{-tx}\, t^{n-1} dt$ <u>est dans $\mathcal{A}$, pour tout entier $n > 0$, et α réel ≥ 0.</u>

En effet pour n = 1 cette fonction est $1-e^{-\alpha x}$ et en intégrant par parties on a

$$x^n \int_0^{\alpha} e^{-tx} t^{n-1}\, dt = -\alpha^{n-1} x^{n-1} e^{-\alpha x} + (n-1)\, x^{n-1} \int_0^{\alpha} e^{-tx}\, t^{n-2} dt.$$

d'où le résultat par induction sur n.

On définit alors un préordre $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ qui est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels ≥ 0 des fonctions suivantes : 1, $x^n e^{-ax}$ (pour n entier ≥ 0, a réel > 0), $x^n \int_0^{\alpha} e^{-tx}\, t^{n-1}\, dt$ (pour n entier > 0, α réel > 0), $x^n \int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx} P(t)\, dt$ (pour n entier > 0, $0 < \alpha < \beta$, P(t) étant un polynôme de degré $\leq$ n-1 qui reste ≥ 0 sur $[\alpha , \beta]$).

<u>Lemme 3</u>. <u>L'ensemble $\mathcal{G}$ ainsi défini est un préordre sur $\mathcal{A}$</u>.

Il est clair que chaque élément de $\mathcal{G}$ est une fonction ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$ donc $-1 \notin \mathcal{G}$. On a donc à montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{G}$; donc que $x^{n_1 + n_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-tx} P_1(t)\, dt. \int_{\alpha_2}^{\beta_2} e^{-tx} P_2(t)\, dt \in \mathcal{G}$ si P_1 (resp. P_2) est de degré $\leq n_1 - 1$ (resp. $n_2 - 1$) et $\alpha_1 > 0$ (resp. $\alpha_2 > 0$) sauf peut-être si $P_1 = t^{n_1 - 1}$ (resp. $P_2 = t^{n_2 - 1}$) auquel cas on peut avoir $\alpha_1 = 0$ (resp. $\alpha_2 = 0$).

On écrit $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-tx} P_1(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-tx} \Phi_1(t)\, dt$

où $\Phi_1(t) = P_1(t)$ sur $[\alpha_1, \beta_1]$, et 0 ailleurs ; et, de même

$\int_{\alpha_2}^{\beta_2} e^{-tx} P_2(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-tx} \Phi_2(t)\, dt$. La fonction à étudier s'écrit alors

$$x^{n_1 + n_2} \int_0^{\infty} e^{-tx} (\Phi_1 * \Phi_2)(t)\, dt.$$

Il est clair que $\Phi_1 * \Phi_2$ est ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$, et à support compact. Si de plus $\alpha_1 > 0$ ou $\alpha_2 > 0$, ce support est un intervalle $[\alpha , \beta]$ avec $\alpha > 0$.

De plus, ce support est réunion de 3 intervalles disjoints, sur chacun desquels $\Phi_1 * \Phi_2$ est un polynôme de degré $n_1 + n_2 - 1$ au plus. En effet, par translation de Φ_1 et Φ_2, on considère le produit de convolution de $P_1 . 1_{[0,\gamma_1]}$ et $P_2 . 1_{[0,\gamma_2]}$ avec $\gamma_1 = \beta_1 - \alpha_1$; $\gamma_2 = \beta_2 - \alpha_2$. Si, par exemple $\gamma_1 \leq \gamma_2$, ce produit vaut $\int_0^t P_1(u)P_2(t-u)\, du$ pour $t \in [0, \gamma_1]$, $\int_0^{\gamma_1} P_1(u)P_2(t-u)\, du$ pour $t \in [\gamma_1, \gamma_2]$ et

$\int_{t-\gamma_2}^{\gamma_1} P_1(u)P_2(t-u)\, du$ pour $t \in [\gamma_2, \gamma_1 + \gamma_2]$. Ce sont bien des polynômes en t de degré $\leq n_1 + n_2 - 1$.

Le seul cas qui reste à examiner est celui où $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Alors $P_1(t) = t^{n_1-1}$; $P_2(t) = t^{n_2-1}$. Donc $\Phi_1 * \Phi_2(t)$ vaut

$$\int_0^t u^{n_1-1}(t-u)^{n_2-1}\, du = \frac{(n_1-1)!(n_2-1)!}{(n_1+n_2-1)!}\, t^{n_1+n_2-1} \text{ sur } [0, \beta_1]$$

(si par exemple $\beta_1 \leq \beta_2$), et est égale à un polynôme de degré $\leq n_1 + n_2 - 1$ sur chacun des intervalles $[\beta_1, \beta_2]$, $[\beta_2, \beta_1 + \beta_2]$.

c.q.f.d.

<u>Lemme 4</u>. <u>Le préordre $\mathcal{S}$ est archimédien sur $\mathcal{A}$</u>.

On pose $I_n^\alpha(x) = x^n \int_0^\alpha e^{-tx}\, t^{n-1}\, dt$ (pour $n \geq 1$). On a vu que $I_n^\alpha \in \mathcal{A}$, et que $I_n^\alpha(x) = -\alpha^{n-1} x^{n-1} e^{-\alpha x} + (n-1)\, I_{n-1}^\alpha$. Il en résulte que $(n-1)\, I_{n-1}^\alpha - I_n^\alpha \in \mathcal{S}$. On montre par induction sur n que $(n-1)! - I_n^\alpha \in \mathcal{S}$:

pour $n = 1$, ou a $1-I_1^\alpha = e^{-\alpha x} \in \mathcal{S}$. En supposant que $(n-2)\,! - I_{n-1}^\alpha \in \mathcal{S}$ on a $(n-1)\,! - (n-1)I_{n-1}^\alpha \in \mathcal{S}$, et comme $(n-1)\, I_{n-1}^\alpha - I_n^\alpha \in \mathcal{S}$, on a bien $(n-1)\,! - I_n^\alpha \in \mathcal{S}$.

Comme I_{n+1}^α et I_n^α sont dans $\mathcal{S}$, par définition de $\mathcal{S}$, et que $I_{n+1}^\alpha(x) = -\alpha^n x^n e^{-\alpha x} + n\, I_n^\alpha(x)$, on a $I_n^\alpha - \frac{1}{n} \alpha^n x^n e^{-\alpha x} \in \mathcal{S}$; comme $(n-1)\,! - I_n^\alpha \in \mathcal{S}$, on a donc $(n-1)\,! - \frac{1}{n} \alpha^n x^n e^{-\alpha x} \in \mathcal{S}$ soit $\frac{n\,!}{\alpha^n} - x^n e^{-\alpha x} \in \mathcal{S}$. Comme d'autre part 1, $x^n e^{-\alpha x}$ sont dans $\mathcal{S}$, et que toute $f \in \mathcal{A}$ est combinaison linéaire à coefficients réels de ces fonctions, il est clair qu'il y a un réel $M > 0$, tel que $M-f \in \mathcal{S}$.

Il est clair que chaque point de $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ définit un point du spectre de l'algèbre archimédienne $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$.

Lemme 5. Le spectre de $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ est $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

Soit χ un élément du spectre; on pose $\chi(x^n e^{-ax}) = H(n,a)$. On a alors $H(o,a).\, H(o,b) = H\,(o,a+b)$ et $0 \leq H(o,a) \leq 1$, puisque
$$e^{-ax} \text{ et } 1-e^{-ax} = x \int_0^a e^{-tx}\, dt \text{ sont tous deux dans } \mathcal{S}.$$

Cela montre que $H(o,a)$ est une fonction décroissante de a sur $\mathbb{R}^+$. Si $H(o,1) = 0$ on a $H(o,p) = [H(o,1)]^p = 0$ pour tout entier p, donc $H(o, \frac{p}{q}) = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$. (puisque $H\,(o, \frac{p}{q})^q = H(o,p) = 0$). Comme H est décroissante on a donc $H(o,a) = 0 \;\; \forall a > 0$

Comme $\chi(x^n e^{-ax}) = \chi(x^n e^{-\frac{a}{2}x})\, H(o, \frac{a}{2})$, on a $\chi(x^n e^{-ax}) = 0$ pour tout $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$; cela montre que χ est alors le point $+\infty$.

Si $H(0,1) \neq 0$, on pose $H(0,1) = e^{-\sigma}$, σ étant un réel $\geqslant 0$.

Donc $H(o, \frac{p}{q}) = e^{-\sigma \cdot \frac{p}{q}}$ $\forall p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$, et d'après la monotonie de $H(o,a)$ on a $H(o,a) = e^{-\sigma a}$ $\forall a \in \mathbb{R}^+$. On pose $H(1,a) = \varphi(a) e^{-\sigma a} = \chi(x\, e^{-ax})$.

On a $x^2 e^{-bx} \int_0^a e^{-tx}\, t\, dt \in \mathcal{S}$, par définition de $\mathcal{S}$, soit

$e^{-bx} - e^{-(a+b)x} - ax\, e^{-(a+b)x} \in \mathcal{S}$.

et donc en appliquant l'homomorphisme χ :

$$e^{-b\sigma} - e^{-(a+b)\sigma} - a\varphi(a+b)\, e^{-(a+b)\sigma} \geqslant 0$$

quels que soient a, b réels > 0.

D'où $\varphi(a+b) \leqslant \dfrac{e^{\sigma a} - 1}{a}$

En posant $a = \frac{1}{n}$, $b = x - \frac{1}{n}$, et en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve

$\varphi(x) \leq \sigma$ pour tout $x > 0$.

D'autre part $x^2 e^{-bx} \int_0^a e^{-tx}(a-t)\, dt \in \mathcal{S}$ par définition de $\mathcal{S}$.

Donc $ax\, e^{-bx} - e^{-bx} + e^{-(a+b)x} \in \mathcal{S}$. En appliquant l'homomorphisme χ à cette fonction, on a

$$a\varphi(b)\, e^{-b\sigma} - e^{-b\sigma} + e^{-(a+b)\sigma} \geqslant 0 \text{ quels que soient a,b réels } > 0.$$

Soit $\varphi(b) \geqslant \dfrac{1-e^{-\sigma a}}{a}$, et donc en faisant tendre a vers 0 : $\varphi(b) \geqslant \sigma$.

On a donc $\varphi(b) = \sigma$ $\forall b > 0$, et par suite $\chi(x\, e^{-ax}) = \sigma e^{-a\sigma}$ pour tout $a > 0$.

Comme $\chi(x^n e^{-ax}) = [\chi(x\, e^{-\frac{a}{n}x})]^n = (\sigma e^{-\frac{a}{n}\sigma})^n = \sigma^n e^{-a\sigma}$, on voit que l'homomorphisme χ n'est autre que le point σ de $\mathbb{R}^+$.

c.q.f.d.

D'après le théorème 2, on a :

Théorème 5. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions sur R^+, combinaisons linéaires à coefficients réels de 1, et des $x^n e^{-ax}$ (pour n entier ≥ 0, et a réel > 0). Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}$ formé des combinaisons linéaires à coefficients ≥ 0 des fonctions : 1 ; $x^n e^{-ax}$(pour n entier ≥ 0, a réel > 0) ; $\int_0^{\alpha} x^n e^{-ax} a^{n-1}\, da$ (pour n entier > 0, a réel > 0) ; $\int_{\alpha}^{\beta} x^n e^{-ax} P(a)\, da$ (pour $n > 0$, $0 < \alpha < \beta$, P(a) polynôme de degré n-1 au plus, qui est ≥ 0 sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$). Si f est une fonction de $\mathcal{A}$ qui est > 0 sur $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ alors $f \in \mathcal{S}$.

La signification intuitive de ce théorème est que toute fonction de $\mathcal{A}$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ est une « combinaison linéaire continue à coefficients > 0 » des fonctions 1 et $x^n e^{-ax}$.

Théorème 6. Soit F(x) une fonction définie pour x réel > 0, indéfiniment dérivable, à valeurs dans un espace de Banach E, telle que

$$\| F^{(n)}(x) \| \leq \int_0^{\infty} t^n e^{-tx} \mu(dt) \text{ pour tout entier } n \geq 0 \text{ et tout réel } x > 0,$$

μ étant une mesure ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_0^{\infty} e^{-at} \mu(dt) < \infty$ pour tout réel $a > 0$.

Il existe alors une application T linéaire de norme ≤ 1, et une seule, de $L^1(R^+, \mu)$ dans E telle que $T(e^{-ax}) = F(a)$ pour tout réel $a > 0$. Elle satisfait $T(x^n e^{-ax}) = (-1)^n F^{(n)}(a)$.

Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre des combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions $x^n e^{-ax}$ (n entier > 0, a réel > 0). On a donc $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathbb{R}.1$.

On définit une application linéaire de $\mathcal{B}$ dans E en posant $T(x^n e^{-ax}) = (-1)^n F^{(n)}(a)$.

Soit $\varphi(x)$ un élément de $\mathcal{B}$ de la forme $\varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x^n e^{-ax} P(a) da$ ($0 < \alpha < \beta$; P(a) polynôme de degré $\leq$ n-1). On montre par récurrence sur n que

$T(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} (-1)^n F^{(n)}(a) P(a)da$: si $n = 1$ on a $P(a) = C$, $\varphi(x) = C(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})$, et donc $T(\varphi) = C(F(\alpha)-F(\beta)) = -\int_{\alpha}^{\beta} F'(a).C\, da$. Dans le cas général on a en intégrant par parties

$$\varphi(x) = x^{n-1} e^{-\alpha x} P(\alpha) - x^{n-1} e^{-\beta x} P(\beta) + \int_{\alpha}^{\beta} x^{n-1} e^{-ax} P'(a)\, da.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on trouve :

$$T(\varphi) = (-1) F^{(n-1)}(\alpha)P(\alpha) - (-1)^{n-1} F^{(n-1)}(\beta) P(\beta) + \int_{\alpha}^{\beta} (-1)^{n-1} F^{(n-1)}(a) P'(a)\, da$$

d'où $T(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} (-1)^n F^{(n)}(a) P(a)\, da$.

Si $\varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x^n e^{-ax} P(a)\, da$ ($0 < \alpha < \beta$, $P(a)$ polynôme de degré $n-1$ au plus) et si de plus P est $\geqslant 0$ sur $[\alpha, \beta]$ on a

$T(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} (-1)^n F^{(n)}(a) P(a)\, da$ donc $\| T(\varphi) \| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \| F^{(n)}(a) \| P(a)\, da$

soit $\| T(\varphi) \| \leq \int_{\alpha}^{\beta} P(a)\, da \int_0^{\infty} t^n e^{-at} \mu(dt) = \int_0^{\infty} \varphi(t) \mu(dt)$ et donc

$\| T(\varphi) \| \leq \mu(\varphi)$

Si $\varphi(x) = x^n e^{-ax}$, on a $T(\varphi) = (-1)^n F^{(n)}(a)$ donc $\| T(\varphi) \| = \| F^{(n)}(a) \|$

d'où $\| T(\varphi) \| \leq \int_0 t^n e^{-at} \mu(dt) = \mu(\varphi)$.

Cela montre que $\| T(\varphi) \| \leq \mu(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{B}$: car si $\varphi \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{B}$ on a $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$ avec a_i réel > 0 et φ_i de l'une des deux formes ci-dessus.

Donc $\| T(\varphi) \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \, \| T(\varphi_i) \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(\varphi_i) = \mu(\varphi)$.

Soit maintenant $\varphi(x)$ un élément quelconque de $\mathfrak{B}$. Il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\psi(x) = \varphi(x)\, e^{\delta x}$ soit encore dans $\mathfrak{B}$. Comme $\mathcal{A}$ est dense dans l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, il existe $\psi_n \in \mathcal{A}$ qui approche uniformément à $\frac{1}{n}$ près la fonction $|\psi(x)| + \frac{2}{n}$. On a alors

$$|\psi(x)| + \frac{3}{n} \geqslant \psi_n(x) \geqslant |\psi(x)| + \frac{1}{n} . \quad (*)$$

La 2ème inégalité montre que $\psi_n(x) \pm \psi(x) \geqslant \frac{1}{n}$. Comme $\psi_n \pm \psi$ est un élément de $\mathcal{A}$ qui est > 0 sur $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, le théorème 5 montre que $\psi_n \pm \psi \in \mathfrak{S}$. On pose $\varphi_n(x) = \psi_n(x)\, e^{-\delta x}$. Alors $\varphi_n \pm \varphi = (\psi_n \pm \psi) e^{-\delta x}$ donc $\varphi_n \pm \varphi \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{S}$. Il en résulte que

$\| T(\varphi_n - \varphi) \| \leq \mu(\varphi_n - \varphi)$ et $\| T(\varphi_n + \varphi) \| \leq \mu(\varphi_n + \varphi)$.

D'où par addition : $\| T(\varphi - \varphi_n) \| + \| T(\varphi_n + \varphi) \| \leq 2\mu(\varphi_n)$

et donc $\| T(\varphi) \| \leq \mu(\varphi_n)$.

D'autre part on a $|\varphi(x)| + \frac{3}{n} e^{-\delta x} \geqslant \varphi_n(x)$ d'après $(*)$. En intégrant par rapport à μ on trouve

$$\mu(\varphi_n) \leq \frac{3}{n} \int_0^{\infty} e^{-\delta x} \mu(dx) + \mu(|\varphi|).$$

Donc $\| T(\varphi) \| \leq \frac{3}{n} \int_0^{\infty} e^{-\delta x} \mu(dx) + \mu(|\varphi|)$ et quand $n \longrightarrow \infty$ on obtient

$\| T(\varphi) \| \leq \mu(|\varphi|)$.

Cette inégalité étant satisfaite pour toute $\varphi \in \mathfrak{B}$, et $\mathfrak{B}$ étant dense dans $L^1(\mathbb{R}^+, \mu)$, on voit que T se prolonge d'une façon et d'une seule en une application linéaire de $L^1(\mathbb{R}^+, \mu)$ dans E de norme ≤ 1.

c.q.f.d.

Nous nous proposons d'appliquer le théorème 6, pour obtenir une généralisation du théorème de Hille-Yosida à une classe de semi-groupes distributions définis et étudiés par J. Peetre (voir [8] et [9]). Rappelons d'abord les définitions :

Soient E un espace de Banach, $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs bornés sur E ; $\mathcal{D}_+$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans $\mathbb{R}^+ - \{0\}$. Un semi-groupe distribution sur E est une application linéaire G de $\mathcal{D}_+$ dans $\mathcal{L}(E)$ telle que

1) $G(\varphi * \psi) = G(\varphi).G(\psi)$. $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}_+$
2) $G(\varphi_n)$ converge vers $G(\varphi)$ pour la norme des opérateurs, si $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}_+$
3) Le sous-espace F de E engendré par les $G(\varphi)x$ lorsque x décrit E et φ décrit $\mathcal{D}_+$ est dense dans E.

On peut alors définir, pour chaque distribution T à support compact dans $\mathbb{R}^+$, un opérateur G(T) sur E, clos et de domaine dense (contenant F), en général non borné, avec les propriétés : $G(T*S) = G(T)G(S)$; $G(\delta_0) = I$.
$G(T_n)x \longrightarrow G(T)x$ pour tout $x \in F$
si $T_n \longrightarrow T$ au sens des distributions.

Le générateur infinitésimal A du semi-groupe distribution G est l'opérateur $A = - G(\delta'_0)$. On pose $P_a = G(\delta_a)$; d'où $P_{a+b} = P_a . P_b$.

Un semi-groupe distribution G est dit de classe $\sigma(k)$ (k entier ≥ 0) s'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\| G(\varphi) \| \leq C \int_0^\infty t^k \, | \varphi^{(k)}(t) | \, dt \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Dans ce cas la même inégalité a lieu pour toute fonction φ k fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$\int_0^\infty t^k \,|\varphi^{(k)}(t)|\, dt < \infty$. $G(\varphi)$ est donc alors un opérateur borné pour une telle fonction φ .

En particulier $G(e^{-\lambda t}) = R_\lambda$ est un opérateur borné pour tout réel $\lambda > 0$. On vérifie immédiatement que c'est le résolvant de A.

L'inégalité $\int_0^\infty t^{k+1} |\varphi^{(k+1)}(t)| dt \geq (k+1) \int_0^\infty t^k |\varphi^{(k)}(t)| \, dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_+$

montre que si G est un semi-groupe distribution de classe $\sigma(k)$, il est de classe $\sigma(l)$ $\forall l \geq k$.

Les semi-groupes distribution de classe $\sigma(0)$ sont les semi-groupes fortement continus en 0 d'opérateurs uniformément bornés.

En effet, si $\| G(\varphi)\| \leq C \int_0^\infty |\varphi(t)| dt$, on choisit une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}_+$, $\varphi_n \longrightarrow \delta_a$, $\int_0^\infty |\varphi_n(t)| dt = 1$. Alors $G(\varphi_n)\, x \longrightarrow G(\delta_a) x = P_a\, x$ $\forall x \in F$. Comme F est dense dans E et que $\| G(\varphi_n)\| \leq C$, on a $\| P_a\| \leq C$.

On peut énoncer le théorème de Hille-Yosida sous la forme :
<u>Pour qu'un opérateur A sur E, clos, de domaine dense, soit le générateur d'un semi-groupe de classe $\sigma(0)$, il faut et il suffit que son résolvant R_λ satisfasse $\| (\lambda R_\lambda)^n \| \leq C$ pour un certain réel $C > 0$, et pour tout $n > 0, \lambda > 0$.</u>

Le théorème suivant donne une caractérisation analogue des semi-groupes de classe $\sigma(1)$.

Théorème 7. <u>Pour qu'un opérateur A sur l'espace de Banach E, clos, de domaine dense, soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe distribution de classe $\sigma(1)$, il faut et il suffit que son résolvant R_λ satisfasse $\left\| \dfrac{(\lambda R_\lambda) + (\lambda R_\lambda)^2 + \ldots + (\lambda R_\lambda)^n}{n} \right\| \leq C$ pour un certain réel $C > 0$ et $\forall n > 0$, $\forall \lambda > 0$.</u>

La condition est nécessaire : on a vu que $\| G(\varphi) \| \leq C \int_0^\infty t |\varphi'(t)| dt$ si G est de classe $\sigma(1)$, pour toute fonction φ continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_0^\infty t |\varphi'(t)|\, dt < \infty$.

Or $\lambda R_\lambda + \lambda^2 R_\lambda^2 + \ldots + \lambda^n R_\lambda^n = G\left[\lambda e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t + \dfrac{\lambda^2 t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\lambda^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right]$

Or si $\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t + \ldots + \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$ on a

$$\varphi'(t) = -\frac{\lambda^{n+1} t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{et donc} \int_0^\infty t |\varphi'(t)|\, dt = n.$$

On a donc bien $\| \lambda R_\lambda + \lambda^2 R_\lambda^2 + \ldots + \lambda^n R_\lambda^n \| \leq C_n$.

La condition est suffisante : on pose $S_\lambda = \frac{1}{\lambda} R_\lambda$ pour $\lambda > 0$. Comme R_λ est une famille d'opérateurs bornés satisfaisant l'équation résolvante $R_\lambda - R_{\lambda'} = (\lambda' - \lambda) R_\lambda R_{\lambda'}$, R_λ est une fonction indéfiniment dérivable de λ et $\dfrac{d^n R_\lambda}{d\lambda^n} = (-1)^n n!\, R_\lambda^{n+1}$.

On en déduit aisément :

$$\frac{d^n S_\lambda}{d\lambda^n} = (-1)^n \frac{n!}{\lambda^{n+2}} [\lambda R_\lambda + \lambda^2 R_\lambda^2 + \ldots + \lambda^{n+1} R_\lambda^{n+1}].$$

L'hypothèse faite sur R_λ entraîne donc que :

$$\left\| \frac{d^n S_\lambda}{d\lambda^n} \right\| \leq (n+1)!\, \frac{C}{\lambda^{n+2}} = C \int_0^\infty t^{n+1} e^{-\lambda t}\, dt.$$

Soit $\left\| \frac{d^n S_\lambda}{d\lambda^n} \right\| \leq \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} \mu(dt)$ avec $\mu(dt) = Ct\, dt$.

Le théorème 6 montre alors qu'il existe une application linéaire J et une seule de $L^1(\mathbb{R}^+, Ct\, dt)$ dans $\mathcal{L}(E)$ telle que

$$J(e^{-\lambda t}) = S_\lambda \text{ et } \| J(\varphi)\| \leq C \int_0^\infty |\varphi(t)| t\, dt.$$

On définit alors $G(\varphi) = -J(\varphi')$ pour toute fonction $\varphi \in S(\mathbb{R}^+)$ (indéfiniment dérivable à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^+$).

On a donc $G(e^{-\lambda t}) = \lambda S_\lambda = R_\lambda$ et $\| G(\varphi) \| \leq C \int_0^\infty t|\varphi'(t)|dt$.

On a $G(e^{-\lambda t} * e^{-\lambda' t}) = G\left(\frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda' t}}{\lambda' - \lambda}\right)$

$$= \frac{R_\lambda - R_{\lambda'}}{\lambda' - \lambda} = R_\lambda R_{\lambda'} = G(e^{-\lambda t}).\, G(e^{-\lambda' t}).$$

et $G(e^{-\lambda t} * e^{-\lambda t}) = G(t\, e^{-\lambda t}) = -J[(1-\lambda t)e^{-\lambda t}] = -S_\lambda - \lambda S'_\lambda$

$$= R_\lambda^2 = G(e^{-\lambda t})\, G(e^{-\lambda t}).$$

Il en résulte que si $\mathcal{E}$ est l'espace des combinaisons linéaires des $e^{-\lambda t}$ pour $\lambda > 0$, on a $G(f_* g) = G(f).G(g)$ $\forall f, g \in \mathcal{E}$.
Soient $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $f, g \in \mathcal{E}$. On a

$$\| G(\varphi) - G(f)\| \leq C \int_0^\infty t|\varphi'(t) - f'(t)|dt.$$

$$\| G(\varphi_* g) - G(f_* g) \| \leq C \int_0^\infty t|(\varphi - f)_* g'|\, dt.$$

$$\leq C \int_0^\infty \int_0^\infty (t+u)|\varphi(t) - f(t)|\; |g'(u)| dt\, du.$$

Mais, φ étant donnée dans $S(\mathbb{R}^+)$ et g donnée dans $\mathcal{E}$, on peut choisir f dans $\mathcal{E}$ de façon à rendre les deux intégrales $\leq \varepsilon$. On a alors

$$\|(G(\varphi) - G(f))\, G(g)\| \leq \varepsilon \|G(g)\|$$

d'où $\|G(\varphi * g) - G(\varphi).G(g)\| \leq \varepsilon\ (1+ \|G(g)\|)$.

On obtient donc $G(\varphi * g) = G(\varphi)G(g) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^+) \quad \forall g \in \mathcal{E}$.

On écrit alors les 2 inégalités précédentes avec $\varphi, g \in S(\mathbb{R}^+)$ et on obtient alors $G(\varphi * g) = G(\varphi).G(g) \quad \forall \varphi, g \in S(\mathbb{R}^+)$. G est donc bien un semi-groupe distribution de classe $\sigma(1)$ et $G(e^{-\lambda t}) = R_\lambda$.

c.q.f.d.

La même méthode s'applique aux semi-groupes distribution de classe $\sigma(k)$ pour chaque entier $k > 0$. On obtient le

Théorème 8. Pour que l'opérateur A, clos de domaine dense, sur l'espace de Banach E soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe distribution de classe $\sigma(k)$, il faut et il suffit que son résolvant R_λ soit un opérateur borné $\forall \lambda > 0$, et satisfasse l'inégalité

$$\left\| \frac{(\lambda R_\lambda)^n + \Gamma_k^1 (\lambda R_\lambda)^{n-1} + \Gamma_k^2 (\lambda R_\lambda)^{n-2} + \ldots + \Gamma_k^{n-1} (\lambda R_\lambda)}{n(n+1)\ \ldots\ (n+k-1)} \right\| \leq C$$

pour une certaine constante $C > 0$, $\forall n > 0$, $\forall \lambda > 0$, avec

$$\Gamma_k^r = \frac{k(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}$$

- BIBLIOGRAPHIE -

1. BOURBAKI - Eléments de mathématiques
VI Integration Ch. II

2. KAKUTANI - Concrete representation of abstract L-spaces and the mean ergodic theorem.
Ann. of math. 42 (1941) 523-537

3. KAKUTANI - Concrete representation of abstract M-spaces.
Ann. of math. 42 (1941) 994-1024

4. HALMOS - Measure Theory (Van Nostrand) p. 170-171

5. NEVEU - Bases mathématiques du calcul des probabilités
(Masson) p.107

6. SCHOENBERG - Metric spaces and positive definite functions
Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938) 522-536.

7. DIXMIER - Moyennes invariantes sur les semi-groupes
Acta Sci. Math. Szeged 12 (1950) 213-227

8. PEETRE - Sur la théorie des semi-groupes distributions.
Séminaire LERAY sur les équations aux dérivées partielles
Collège de France. II (1963-64) 76-99

9. LIONS - Semi-groupes distributions. Portugaliae Math.
9 (1960) 141-164

10. BOHNENBLUST - Characterization of L^p spaces
Duke Math. Journal 6(1940) 627-640

11. LOOMIS - Abstract harmonic analysis (Van Nostrand) - p.99

12. SCHWARTZ - Théorie des distributions (Hermann).
t.1, p.100

13. BRETAGNOLLE-CASTELLE-KRIVINE - Lois stables et espaces L^p
Ann. Inst. Henri Poincaré
Vol II n° 3 (1966) 231-259.

14. KRIVINE - Anneaux préordonnés
J. Anal. Math. Jerusalem 12 (1964) 307-326