NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Modèles de* ZF + AC *dans lesquels tout ensemble de réels définissable en termes d'ordinaux est mesurable-Lebesgue.* Note (*) de M. **Jean-Louis Krivine**, présentée par M. Jean Leray.

Dans (1), R. Solovay a montré que, si $\varkappa$ est un cardinal inaccessible d'un modèle de ZF + AC (axiome du choix) + HGC (hypothèse généralisée du continu), en « détruisant » tous les cardinaux $< \varkappa$, on obtient un modèle dans lequel tout ensemble de réels définissable en termes d'ordinaux et de réels est mesurable. On montre ici qu'en « détruisant » seulement le cardinal $\aleph_1$ (ou n'importe quel cardinal non dénombrable), on obtient un modèle dans lequel tout ensemble définissable en termes d'ordinaux est mesurable (théorème 3).

En ce qui concerne la méthode du « forcing », nous utiliserons les définitions et notations de (1) ou (2). Rappelons les principales :

Soit M un modèle transitif de ZF. Un ensemble de conditions de « forcing » de M est un ensemble ordonné $C \in M$. Une partie D de C est dite dense dans C si $(\forall p \in C)(\exists q \in D)(q \leq p)$; $p, q \in C$ sont dits compatibles si $(\exists r \in C)(r \leq p$ et $r \leq q)$. Une partie f de C est dite M-générique sur C si elle satisfait les trois conditions :

(*a*) $p \in f,\ q \geq p \Rightarrow q \in f$;

(*b*) $p \in f,\ q \in f \Rightarrow p$ et q sont compatibles;

(*c*) pour toute partie D dense de C telle que $D \in M$, on a $D \cap f \neq \emptyset$.

Notons que si $D \in M$ est une partie dense de C, les M-génériques sur C correspondent biunivoquement aux M-génériques sur D : si f est M-générique sur C il lui correspond $g = f \cap D$; inversement si g est M-générique sur D, il lui correspond

$$f = \{p \in C;\ (\exists q \in g)\ (q \leq p)\}.$$

Le théorème suivant exprime une propriété générale du « forcing », dont nous omettons la démonstration pour abréger.

Théorème 1. — *Soient f un* M-*générique sur* C *et* $X \in M[f]$, $X \subset M$. *Alors f est* M[X]-*générique sur un sous-ensemble* C′ *de* C, $C' \in M[X]$. *De plus, une partie de* C′ *qui est dans* M[X] *est dense dans* C′ *si et seulement si elle contient* $D \cap C'$, *pour une partie* D *dense de* C, $D \in M$.

Précisons que C′ est défini comme l'ensemble des $p \in C$ qui ne forcent aucun énoncé du langage du « forcing » interprétable dans M[X], qui soit faux dans M[X].

Dans ce qui suit, M désigne un modèle transitif de $ZF + AC + HC$ (hypothèse du continu); $\aleph_\alpha^M$ est un cardinal de M; C_α est l'ensemble des applications définies sur une partie finie de ω, à valeurs dans $\aleph_\alpha^M$, muni de la relation d'ordre : $p \leqq q \Leftrightarrow p \supset q$.

Soient $\varkappa$ un cardinal de M, C un ensemble ordonné de M tel que toute partie de C dont les éléments sont deux à deux incompatibles soit de cardinal $< \varkappa$. On dit alors que C satisfait la condition de chaîne $< \varkappa$. On sait que, si f est M-générique sur C, l'ordinal $\varkappa$ est encore un cardinal de $M[f]$.

Le théorème suivant est le point essentiel de la démonstration; il exprime une propriété intéressante de l'ensemble de conditions C_α :

THÉORÈME 2. — *Soient f un* M-*générique sur* C_α *et* $X \in M[f]$, $X \subset M$. *Alors, ou bien* $M[f] = M[X]$, *ou bien* $M[f] = M[X][g]$, *où g est* $M[X]$-*générique sur* C_α.

Dans cette démonstration, sauf indication contraire, tous les ensembles considérés dont dans le modèle $M[X]$. Soit $\varkappa$ le cardinal de $\aleph_\alpha^M$ dans $M[X]$.

D'après le théorème 1, f est $M[X]$-générique sur $C \subset C_\alpha$.

Si $\varkappa = \omega$, f est donc $M[X]$-générique sur un ensemble dénombrable de conditions (puisque C_α est de cardinal $\aleph_\alpha^M$ dans M, donc dénombrable dans $M[X]$). Par suite, ou bien $f \in M[X]$, ou bien $M[f] = M[X][r]$, où r est $M[X]$-générique sur C_0. Dans le premier cas, $M[f] = M[X]$. Dans le second, on remarque que C_α et C_0 sont isomorphes dans $M[X]$, puisque $\aleph_\alpha^M$ y est dénombrable. Donc $M[f] = M[X][g]$, où g est $M[X]$-générique sur C_α.

Supposons maintenant $\varkappa > \omega$. Si $p \in C$ on pose $(C)_p = \{q \in C ;\ q \leqq p\}$. Soient

$$E = \{p \in C;\ (C)_p \text{ satisfait dans } M[X] \text{ la condition de chaîne } < \varkappa\},$$

$$F = \{p \in C;\ \text{quel que soit } q \in E,\ p \text{ et } q \text{ sont incompatibles dans } C\}.$$

Par définition de F, $E \cup F$ est dense dans C; il existe donc $p_0 \in f \cap (E \cup F)$, et f est $M[X]$-générique sur $(C)_{p_0} = C'$. Si $p_0 \in E$, comme $(C)_{p_0}$ satisfait la condition de chaîne $< \varkappa$, l'ordinal $\varkappa$ est encore un cardinal dans $M[f]$, donc n'est pas dénombrable dans $M[f]$; cela contredit le fait que $\aleph_\alpha^M$ est dénombrable dans $M[f]$.

Donc $p_0 \in F$. Par suite : (★) quel que soit $p \in C'$, il existe un ensemble de cardinal $\varkappa$ de minorants de p dans C' deux à deux incompatibles.

Soit C_α^k l'ensemble des $p \in C_\alpha$ dont le domaine est l'entier k. On définit par récurrence sur k une application $\varphi_k : C_\alpha^k \to C'$: on a $C_\alpha^0 = \{\varnothing\}$ et on pose $\varphi_0(\varnothing) = p_0$. Supposons défini φ_k, et soit $p \in C_\alpha^k$. Soit $U_p \subset C'$ un ensemble maximal de minorants de $\varphi_k(p)$, deux à deux incompatibles dans C', tel que $\overline{\overline{U}}_p = \varkappa$, et tel que si $t \in C_\alpha^{k+1} \cap C'$ est compatible avec $\varphi_k(p)$ dans C', il existe dans U_p un minorant commun de t et de $\varphi_k(p)$. On obtient un tel ensemble en choisissant pour chaque $t \in C_\alpha^{k+1} \cap C'$ compatible avec $\varphi_k(p)$ un minorant commun t'; l'ensemble ainsi obtenu a des éléments deux à deux incompatibles (puisque les éléments de C_α^{k+1} le sont) ; on l'étend en un ensemble maximal $V_p \subset C'$ de minorants de $\varphi_k(p)$ deux à deux incompatibles ; si $\overline{\overline{V}}_p < \varkappa$, on choisit $q_0 \in V_p$ qu'on remplace par un ensemble maximal de cardinal $\varkappa$ de minorants de q_0, deux à deux incompatibles ; on peut trouver un tel ensemble puisque C' a la propriété ($\bigstar$). Comme $\overline{\overline{U}}_p = \varkappa$, on peut énumérer U_p par l'ordinal $\aleph_\alpha^{\mathrm{M}}$; soit (c_λ) $(\lambda < \aleph_\alpha^{\mathrm{M}})$ la famille ainsi obtenue. On définit alors φ_{k+1} de la façon suivante : si $q \in C_\alpha^{k+1}$, soit p la restriction de q à l'entier k ; on pose $\varphi_{k+1}(q) = c_\lambda$ où $\lambda = q(k)$.

Soit $\varphi : \bigcup_{k \in \omega} C_\alpha^k \to C'$ la réunion des φ_k. Il est immédiat que φ est injective et conserve l'ordre. Or l'image de φ est dense dans C' : en effet, soit $s \in C'$; comme $\bigcup_{k \in \omega} C_\alpha^k$ est dense dans C_α, d'après le théorème 1, $\bigcup_{k \in \omega} C_\alpha^k \cap C'$ est dense dans C' ; d'où $t \in C_\alpha^{k+1} \cap C'$, $t \leqq s$.

Il existe $p \in C_\alpha^k$ tel que t et $\varphi_k(p)$ soient compatibles dans C' : en effet, lorsque u décrit C_α^k, $\varphi_k(u)$ décrit un ensemble maximal d'éléments deux à deux incompatibles de C'. Il existe donc $t' \in U_p$, $t' \leqq t$. Or $t' = \varphi_{k+1}(q)$ pour un $q \in C_\alpha^{k+1}$ qui est un prolongement de p à l'entier $k + 1$. On a bien $\varphi_{k+1}(q) \leqq s$.

Il en résulte que $f \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ est M[X]-générique sur $\mathrm{Im}(\varphi)$; donc si g est l'image par φ^{-1} de $f \cap \mathrm{Im}(\varphi)$, g est M[X]-générique sur $\bigcup_{k \in \omega} C_\alpha^k$, donc sur C_α puisque $\bigcup_{k \in \omega} C_\alpha^k$ est dense dans C_α. On a évidemment $M[f] = M[X][f] = M[X][g]$.

C. Q. F. D.

Théorème 3. — *Soient* $\aleph_\alpha^{\mathrm{M}} > \aleph_0$ *un cardinal de* M, *et* f *un* M-*générique sur* C_α. *Le modèle* M[f] *satisfait alors l'énoncé : « tout ensemble de réels définissable en termes d'ordinaux (et plus généralement d'éléments de* M) *est mesurable-Lebesgue ».*

Le raisonnement est celui de [1], le théorème 2 ci-dessus remplaçant le théorème I.4.1 de [1] : Soit B l'ensemble des boréliens non négligeables de [0, 1] dans M, modulo les boréliens de mesure nulle. Si M est un sous-modèle transitif d'un modèle N de ZF, à chaque $b \in B$ correspond un borélien b_N de N (celui qui a la « même définition » que b ; il a aussi les « mêmes propriétés » et en particulier la même mesure). Si $G \in N$ est M-générique sur B, il lui correspond un réel ρ et un seul de [0, 1], $\rho \in N$, défini par la condition : $(\forall\, b \in B)(b \in G \Leftrightarrow \rho \in b_N)$. Inversement un réel ρ de [0, 1] situé dans N correspond à un M-générique sur B si et seulement si $\rho \in b_N$ quel que soit le borélien $b \in B$ de mesure 1. Un tel réel ρ est dit M-aléatoire.

On prend $N = M[f]$. L'ensemble $A \subset [0, 1]$ des réels M-aléatoires est l'intersection d'une famille dénombrable de boréliens de mesure 1 (en effet, B est de cardinal $\aleph_1$ dans M, donc $\aleph_0$ dans N). A est donc un borélien de mesure 1 dans N.

Soit alors $E(x)$ un énoncé à paramètres dans M définissant dans N un sous-ensemble de $[0, 1]$. Si $\rho \in A$, le théorème 2 montre que $N = M[f] = M[\rho][g]$, où g est $M[\rho]$-générique sur C_α (évidemment $M[f] \not\simeq M[\rho]$, puisque $\aleph_\alpha^M$ est non dénombrable dans $M[\rho]$).

Il en résulte que l'énoncé $E(\rho)$ est vrai dans $M[f]$ si et seulement si l'énoncé $E'(\rho) : (\forall p \in C_\alpha)[p \Vdash E(\rho)]$ est vrai dans $M[\rho]$. Mais ρ est M-générique sur B, donc $E'(\rho)$ est vrai dans $M[\rho]$ si et seulement s'il existe $b \in B$ tel que $\rho \in b_N$ et $b \Vdash E'(a)$ (où a est un symbole de constante). Donc si Δ est la réunion des b_N pour $b \in B$, $b \Vdash E'(a)$, alors Δ est un borélien de N (réunion d'une famille dénombrable de boréliens) et dans N on a $(\forall \rho \in A)(E(\rho) \Leftrightarrow \rho \in \Delta)$. Comme A est un borélien de mesure 1, l'ensemble défini par l'énoncé $E(x)$ dans N est égal à Δ modulo un ensemble négligeable, donc est mesurable.

(*) Séance du 29 septembre 1969.

(1) R. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable* (à paraître).

(2) J.-L. Krivine, *Théorèmes de consistance en théorie de la mesure de R. Solovay*, *Séminaire Bourbaki*, n° 357, février 1969.

(116, *avenue de Paris*, 94-*Vincennes*, *Val-de-Marne*.)