“Bar recursion”, sémantique dénotationnelle et réalisabilité classique

Jean-Louis Krivine

Equipe PPS - Université Paris-Diderot

krivine@pps.univ-paris-diderot.fr

Marseille, 26 mars 2015

Introduction

L'opérateur de "bar recursion" a été introduit par C. Spector dans les années 1960,
pour prouver (?) la consistance de l'Analyse, c'est-à-dire :
l'Arithmétique du 2nd ordre + l'*axiome du choix dépendant (DC)*
(ou l'*axiome du choix dénombrable (CC)* qui est un peu plus faible).
Il a été recyclé, à partir de 1998, d'abord par Berardi-Bezem-Coquand,
puis U. Kohlenbach, U. Berger et P. Oliva, et d'autres
pour obtenir des *programmes* à partir de *preuves utilisant DC*.
En *réalisabilité classique*, on a une autre méthode pour ce faire :
utiliser une instruction de *signature*, comme MD5 ou SHA1.

Quel rapport y a-t-il entre ces deux méthodes pour réaliser DC ?

Introduction

Réponse : aucun.
En effet, l'opérateur BR de "bar recursion" ne fonctionne
que dans les modèles issus de la *sémantique dénotationnelle*.
Dans ces modèles, qui ont la puissance du continu,
il n'est évidemment pas question de définir une *signature*.

Un tel modèle a une structure d'*algèbre de réalisabilité* (T. Ehrhard).
Dans cette algèbre, on peut définir BR qui est pratiquement un λ-terme.
BR réalise alors DC et CC : c'est un résultat de T. Streicher.
A l'aide de BR, on peut réaliser également la formule :
Il existe un bon ordre sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes les *formules vraies d'Analyse.*

Mon exemple sera le modèle le plus simple du λ-calcul : le *modèle d'Engeler*
mais tous les modèles usuels conviennent.

Idées générales (avant les définitions précises)

Il s'agit de réaliser l'axiome du choix dénombrable qui s'énonce :

$$\forall x \neg \forall y \neg F[x,y] \to \neg \forall f \neg \forall n^{\mathsf{int}} F[n, f(n)].$$

On ne s'intéressera ici qu'au cas particulier où F *ne dépend que d'une variable* :

$$\forall x \neg \neg F[x] \to \neg \neg \forall n^{\mathsf{int}} F[n]$$

qu'on appelle DNS pour *double negation shift*.

Contrairement aux apparences, il concentre toute la difficulté.

On considére donc deux termes $G \Vdash \forall x \neg \neg F[x]$ et $U \Vdash \neg \forall n^{\mathsf{int}} F[n]$

et on cherche un opérateur BR tel que $\mathsf{BR}\, G\, U \Vdash \bot$.

Soient Λ l'ensemble des "termes" du modèle d'Engeler

$\mathcal{T}$ l'arbre des suites finies $(\tau_i)_{i<k} \in \Lambda^{<\omega}$ t.q. $\tau_i \Vdash F[i]$.

L'opérateur de bar recursion

Le terme U définit une *barre* sur l'arbre $\mathcal{T}$, c-à-d
qu'il choisit un segment initial pour chaque branche infinie de l'arbre.
En effet, une branche est un terme ϕ t.q. $\phi \Vdash \forall n^{\mathsf{int}} F[n]$. On a donc $U\phi \Vdash \bot$.
Or, les modèles usuels du λ-calcul ont une *propriété de continuité* :
Il existe k tel que $U\psi \Vdash \bot$ pour tout ψ t.q. $\psi\bar{i} = \phi\bar{i}$ pour $i < k$.
On obtient donc ainsi un *sous-arbre $\mathcal{T}'$ bien fondé*.
L'opérateur BR sert à définir une fonction, par induction sur cet arbre bien fondé.
On peut l'écrire comme un λ-terme, à condition de considérer les entiers $\bar{i}$
comme des atomes (à la façon de PCF) et non des entiers de Church.
C'est indispensable pour pouvoir appliquer la continuité.

L'opérateur de bar recursion

On définit deux λ-termes χ, Ψ :

$$\chi = \lambda k \lambda f \lambda z \lambda i (\texttt{if } i < k \texttt{ then } f\, i \texttt{ else } z)$$

$$\Psi G U k f = (U)(\chi k f)(G)\lambda z(\Psi G U k^{+})(\chi) k f z$$

(k^{+} est le successeur de l'entier atomique k).

$\Psi G U$ calcule sa valeur sur une suite $\chi k f$ de longueur k, à l'aide de ses valeurs sur tous les prolongements de cette suite de longueur $k+1$.

En fin de compte, on obtient le résultat sur la suite vide

d'où la définition de BR :

$$\mathrm{BR} = \lambda g \lambda u \Psi g u \overline{0}$$

On va montrer que BR $\Vdash$ DNS.

On a, en fait, BR $\Vdash$ DC par essentiellement la même preuve.

Quelques définitions et rappels sont d'abord nécessaires.

Algèbre de réalisabilité

Structure analogue à une *algèbre combinatoire*, mais plus compliquée
parce qu'on parle non seulement de *programmes*
mais aussi d'*environnements*, qui sont des *piles*. On a donc trois ensembles :
Λ ensemble des termes, Π ensemble des piles, $\Lambda \star \Pi$ ensemble des processus.
Combinateurs élémentaires : B, C, I, K, W, cc et d'autres éventuellement.
Ce sont des constantes de termes. On a aussi les fonctions suivantes :
application : de Λ^2 dans Λ, notée $(\xi,\eta) \mapsto (\xi)\eta$;
push : de $\Lambda \times \Pi$ dans Π, notée $(\xi,\pi) \mapsto \xi \cdot \pi$;
continuation : de Π dans Λ, notée $\pi \mapsto \mathsf{k}_\pi$;
processus : de $\Lambda \times \Pi$ dans $\Lambda \star \Pi$, notée $(\xi,\pi) \mapsto \xi \star \pi$.
On a une relation de préordre sur $\Lambda \star \Pi$, appelée *l'exécution* et notée $\succ$.
On a aussi un segment final de $\Lambda \star \Pi$, noté $\perp\!\!\!\perp$;

Algèbre de réalisabilité

On a enfin une partie QP de Λ : l'ensemble des *quasi-preuves* qui contient les combinateurs et est clos par application.

Les axiomes pour le préordre d'exécution $\succ$:

$\xi\eta \star \pi \succ \xi \star \eta . \pi$	(push a term on the stack)
$\mathsf{I} \star \xi . \pi \succ \xi \star \pi$	(no operation)
$\mathsf{K} \star \xi . \eta . \pi \succ \xi \star \pi$	(delete)
$\mathsf{W} \star \xi . \eta . \pi \succ \xi \star \eta . \eta . \pi$	(duplicate)
$\mathsf{C} \star \xi . \eta . \zeta . \pi \succ \xi \star \zeta . \eta . \pi$	(swap)
$\mathsf{B} \star \xi . \eta . \zeta . \pi \succ \xi \star \eta\zeta . \pi$	(apply)
$\mathsf{cc} \star \xi . \pi \succ \xi \star \mathsf{k}_\pi . \pi$	(save the stack in a continuation)
$\mathsf{k}_\pi \star \xi . \omega \succ \xi \star \pi$	(a continuation restores the stack).

On peut alors définir $\lambda x\, t$ de façon à avoir la *réduction faible de tête* :

$\lambda x\, t \star \xi . \pi \succ t[\xi / x] \star \pi$.

Modèles de ZF

Quel intérêt de compliquer ainsi la structure d'algèbre combinatoire ?

En informatique :

On représente bien mieux les programmes, en tenant compte de l'*environnement*.

En logique :

Grâce aux environnements, et à l'instruction cc, on obtient le *tiers exclu* ;

on se libère enfin du carcan de la *logique intuitionniste*.

Cela permet de réaliser les axiomes de la théorie des ensembles

et d'obtenir des modèles de ZF, si l'algèbre satisfait l'*axiome de cohérence* :

Pour tout $\theta \in \mathrm{QP}$, il existe $\pi \in \mathbf{\Pi}$ telle que $\theta \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$.

Le forcing est le cas particulier où il existe une quasi-preuve θ

qui est un *ou parallèle*, c'est-à-dire :

$$\theta \star \xi . \eta . \pi \succ \xi \star \pi \text{ et } \theta \star \xi . \eta . \pi \succ \eta \star \pi$$

A éviter car, dans ce cas, la notion de programme disparaît.

Réalisabilité

Pour chaque formule close F de ZF, on définit :

une *valeur de fausseté* $\|F\| \subset \mathbf{\Pi}$ et une *valeur de vérité* $|F| \subset \mathbf{\Lambda}$.

$\xi \in |F|$ est écrit $\xi \Vdash F$ et se lit : ξ réalise F (ξ force F dans le cas du forcing).

Définition de $\|F\|$ et $|F|$ par récurrence sur F : $\xi \in |F| \Leftrightarrow (\forall \pi \in \|F\|)\, \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$;

$\|\bot\| = \mathbf{\Pi}$ et donc $\xi \Vdash \bot \Leftrightarrow \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour toute pile π.

$\|\forall x\, F[x]\| = \bigcup_x \|F[x]\|$ et donc $\xi \Vdash \forall x\, F[x] \Leftrightarrow \forall x (\xi \Vdash F[x])$;

$\|F \to G\| = \{\xi \cdot \pi\, ;\, \xi \Vdash F, \pi \in \|G\|\}$ et donc :

$\xi \Vdash F \to G \Rightarrow \forall \eta (\eta \Vdash F \Rightarrow \xi\eta \Vdash G)$; $\forall \eta (\eta \Vdash F \Rightarrow \xi\eta \Vdash G) \Rightarrow \lambda x \xi x \Vdash F \to G$.

La définition pour les formules atomiques $x \in y,\ x = y$ est plus compliquée.

Comme dans le cas particulier du forcing, on part d'un modèle de ZFC,
ou même ZF + V=L, appelé *modèle de base* et on obtient
un nouveau modèle de ZF : le *modèle de réalisabilité* (ou de *forcing*).

Le modèle d'Engeler

Attention, le mot *modèle* est employé ici dans un tout autre sens.

Les *modèles du λ-calcul* fournissent des exemples d'algèbres de réalisabilité.

En effet, T. Ehrhard a montré qu'on peut compléter leur structure évidente d'algèbre combinatoire, en y définissant *les piles, cc et les continuations*.

On prend comme exemple le *modèle d'Engeler* ; voici sa construction.

On définit l'ensemble D des *types* ou *formules* :

$\mathbb{0} \in D$ ($\mathbb{0}$ est un symbole atomique).

Si $\alpha \in D$ et a est une partie finie de D, alors $(a \to \alpha) \in D$.

On identifie $\mathbb{0}$ et $\emptyset \to \mathbb{0}$. D^* est l'ensemble des parties finies de D.

Si $\alpha \in D$, son rang $\mathrm{rg}(\alpha)$ est défini par récurrence :

$\mathrm{rg}(\mathbb{0}) = 0$; $\mathrm{rg}(a \to \alpha) = 1 + \sup\{\mathrm{rg}(a), \mathrm{rg}(\alpha)\}$.

Si $a \in D^*$, son rang $\mathrm{rg}(a)$ est $\sup\{\mathrm{rg}(\alpha\,;\ \alpha \in a\}$.

Le modèle d'Engeler

Chaque $\alpha \in D$ a une forme normale $\alpha = (a_1, \ldots, a_k \to \mathbb{O})$

avec $k \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_k \in D^*$ et $a_k \neq \emptyset$.

Les autres formes sont $\alpha = (a_1, \ldots, a_k, \emptyset, \ldots, \emptyset \to \mathbb{O})$.

La *valeur de vérité* $|\alpha| \in \{0, 1\}$ est définie par récurrence :

$|\mathbb{O}| = 0$; $|a_1, \ldots, a_k \to \mathbb{O}| = 1$ ssi $(\exists \beta \in a_1 \cup \ldots \cup a_k)(|\beta| = 0)$.

Si $\alpha = (a_1, \ldots, a_k \to \mathbb{O}), \beta = (b_1, \ldots, b_k \to \mathbb{O})$ on définit leur *borne inférieure* :

$$\alpha \sqcap \beta = (a_1 \cup b_1, \ldots, a_k \cup b_k \to \mathbb{O}).$$

Cette opération est associative, commutative et idempotente ; $\mathbb{O}$ est neutre ;

elle définit une relation d'ordre : $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow b_1 \subset a_1, \ldots, b_k \subset a_k$.

$\mathbb{O}$ est le plus grand élément.

Noter que, comme ne l'indique pas la notation, $\alpha \sqcap \beta$ s'apparente à

la disjonction de α et β.

L'algèbre de réalisabilité

$\mathbf{\Lambda}$ est l'ensemble des parties de D.

$\mathbf{\Pi}$ est l'ensemble des filtres de D, c-à-d. $\pi \subset D$ est une pile ssi

$(\forall \alpha, \beta \in \pi)\ \alpha \sqcap \beta \in \pi$; $\forall \alpha \forall \beta (\alpha \in \pi, \alpha \leq \beta \rightarrow \beta \in \pi)$; $\mathbb{1} \in \pi$.

$\mathbf{\Pi}$ s'identifie à $\mathbf{\Lambda}^{\mathbb{N}}$: une suite de termes $t_n (n \in \mathbb{N})$

correspond au filtre $\{(a_0, \ldots, a_k \rightarrow \mathbb{1})\ ;\ k \in \mathbb{N}, a_0 \subset t_0, \ldots, a_k \subset t_k\}$.

$\mathbf{\Lambda} \star \mathbf{\Pi}$ est $\{0,1\}$ et $\perp\!\!\!\perp$ est $\{1\}$.

Si $t \in \mathbf{\Lambda}, \pi \in \mathbf{\Pi}$ alors $t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ ssi $t \cap \pi \neq \emptyset$.

$t \cdot \pi = \{a \rightarrow \alpha\ ;\ a \subset t, \alpha \in \pi\}$;

$tu = \{\alpha \in D;\ (\exists a \subset u)(a \rightarrow \alpha) \in t\}$;

K est l'ensemble des formules : $\{\alpha\}, \emptyset \rightarrow \alpha$ pour $\alpha \in D$;

S est l'ensemble des formules :

$\{a, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \rightarrow \alpha\}, \{a_1 \rightarrow \alpha_1, \ldots, a_k \rightarrow \alpha_k\}, a \cup a_1 \cup \ldots \cup a_k \rightarrow \alpha$

avec $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in D$ et $a, a_1, \ldots, a_k \in D^*$.

L'algèbre de réalisabilité

k_π est l'ensemble des formules : $(\{\alpha\} \to \mathbb{0})$ pour $\alpha \in \pi$;

cc est l'ensemble des formules :

$\{a \to \alpha\} \to \alpha \sqcap \alpha_1 \sqcap \ldots \sqcap \alpha_k$ avec $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in D$ et $a = \{\{\alpha_1\} \to \mathbb{0}, \ldots, \{\alpha_k\} \to \mathbb{0}\}$.

Définition des *entiers atomiques*. On pose :

$\nu_0 = (\{\mathbb{0}\} \to \mathbb{0})$; $\nu_{i+1} = (\emptyset \to \nu_i)$; $\overline{n} = \{\nu_n\}$; on a donc $\overline{n} = (\mathsf{K})^n\overline{0}$.

Le successeur est K, le prédécesseur $\lambda x\, x\, \mathsf{I}$; l'instruction de comparaison est

$$\mathsf{cmp} = \{(\{\nu_i\}, \{\nu_j\}, \{\alpha\}, \emptyset \to \alpha)\ ;\ \alpha \in D, i, j \in \mathbb{N}, i < j\} \cup \{\{\mathbb{0}\} \to \mathbb{0}\}$$
$$\{(\{\nu_i\}, \{\nu_j\}, \emptyset, \{\alpha\} \to \alpha)\ ;\ \alpha \in D, i, j \in \mathbb{N}, i \geq j\} \cup \{(\{\nu_i\}, \{\mathbb{0}\} \to \mathbb{0})\ ;\ i \in \mathbb{N}\}\ ;$$

on a donc $\mathsf{cmp}\, \bar{i}\, \bar{j}\, t\, u = t$ si $i < j$; $\mathsf{cmp}\, \bar{i}\, \bar{j}\, t\, u = u$ si $i \geq j$.

QP est la clôture, par l'application, de l'ensemble $\{\mathsf{K}, \mathsf{S}, \overline{0}, \mathsf{cmp}\}$.

L'algèbre est *cohérente* car $t \in \mathsf{QP} \Rightarrow |t| = 1 \Rightarrow \mathbb{0} \notin t$ donc $t \star \{\mathbb{0}\} \notin \perp\!\!\!\perp$.

On obtient donc un modèle de ZF.

Il satisfait l'axiome du choix dépendant : on va voir que $\mathsf{BR} \Vdash \mathsf{DC}$.

Continuité

Théorème. Pour toute suite $\xi_n \in \Lambda$, il existe $\phi \in \Lambda$ telle que :

- $\phi\overline{n} = \xi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $U\phi \Vdash \bot$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :
  pour toute $\psi \in \Lambda$ t.q. $\psi\emptyset = \emptyset$ et $\psi\overline{i} = \phi\overline{i}$ pour $i < k$, on ait $U\psi \Vdash \bot$.

Un terme ψ t.q. $\psi\emptyset = \emptyset$ est dit *strict*.

Preuve. On pose $\phi = \{(\{\nu_n\} \to \alpha)\ ;\ n \in \mathbb{N}, \alpha \in \xi_n\}$.

Si $U\phi \Vdash \bot$, on a $\mathbb{0} \in U\phi$. Il existe donc $a \subset \phi$ t.q. $(a \to \mathbb{0}) \in U$.

Comme a est fini, ν_i n'apparaît dans a que pour $i < k$.

On a donc $a \subset \psi$ dès que $\psi\overline{i} = \phi\overline{i}$ pour $i < k$; donc $\mathbb{0} \in U\psi$ c-à-d $U\psi \Vdash \bot$. cqfd

Cette propriété de *continuité* implique que l'algèbre a la puissance du continu.

Elle n'est jamais satisfaite dans les algèbres de termes.

Retour à DC et DNS

On se propose maintenant de montrer BR $\Vdash$ DC. L'intérêt est double :

- montrer que le modèle de ZF associé à cette algèbre satisfait DC.
- obtenir un programme à partir de chaque preuve dans la théorie ZF + DC.

On se contentera ici du cas particulier DNS, qui est, en fait, typique.

$$\mathrm{BR} \Vdash \forall x \neg\neg F[x] \to \neg\neg \forall n^{\mathsf{int}} F[n]$$

Pour définir BR, on définit d'abord deux λ-termes χ, Ψ :

$$\chi = \lambda k \lambda f \lambda z \lambda i((\mathsf{cmp}\, i\, k)(f)i)z$$

$$\Psi g u k f = (u)(\chi k f)(g)\lambda z(\Psi g u k^{+})(\chi)k f z \quad \text{où } k^{+} \text{ est } \mathrm{K}k$$

et on pose $\mathrm{BR} = \lambda g \lambda u \Psi g u \overline{0}$

On considére deux termes $G \Vdash \forall x \neg\neg F[x]$ et $U \Vdash \neg\forall n^{\mathsf{int}} F[n]$.

Il s'agit de montrer $\mathrm{BR}\, G U \Vdash \bot$. On pose $H = \Psi G U$.

Lemme. Soient $k \in \omega$ et $\phi \in \Lambda$, tels que $\phi \overline{i} \Vdash F[i]$ pour tout $i < k$.
Si $H\overline{k}\phi \not\Vdash \bot$, alors il existe $\zeta_{k,\phi} \Vdash F[k]$ tel que $(H\overline{k^+})(\chi)\overline{k}\phi\zeta_{k,\phi} \not\Vdash \bot$.
Soit $\eta_{k,\phi} = \lambda z(H\overline{k^+})(\chi)\overline{k}\phi z$. Donc $H\overline{k}\phi = (U)(\chi\overline{k}\phi)(G)\eta_{k,\phi}$ par définition de H.
Si $\eta_{k,\phi} \Vdash \neg F[k]$, alors $G\eta_{k,\phi} \Vdash \bot$. Alors $(\chi\overline{k}\phi)(G)\eta_{k,\phi} \Vdash \forall n^{\mathrm{int}} F[n]$:
en effet, si $\phi' = (\chi\overline{k}\phi)(G)\eta_{k,\phi}$ on a $\phi'\overline{i} = \phi\overline{i} \Vdash F[i]$ pour $i < k$
$\phi'\overline{i} = (G)\eta_{k,\phi} \Vdash \bot$ pour $i \geq k$.
Il en résulte que $(U)(\chi\overline{k}\phi)(G)\eta_{k,\phi} \Vdash \bot$, autrement dit $H\overline{k}\phi \Vdash \bot$.
On a montré : si $H\overline{k}\phi \not\Vdash \bot$, alors $\eta_{k,\phi} \not\Vdash F[k] \to \bot$. cqfd

Cette propriété de BR est vraie dans toutes les algèbres de réalisabilité.

On veut montrer $H\overline{0} \Vdash \bot$. Par l'absurde, on a $\phi_0 \in \mathbf{\Lambda}$ tel que $H\overline{0}\phi_0 \nVdash \bot$.
Au moyen du lemme, on définit $\phi_k \in \mathbf{\Lambda}$ par récurrence : $\phi_{k+1} = \chi\overline{k}\phi_k\zeta_{k,\phi_k}$.
On a alors, par récurrence sur k :

$$\phi_k\overline{i} = \phi_{i+1}\overline{i} = \zeta_{i,\phi_i} \text{ pour } i < k \; ; \; \zeta_{k,\phi_k} \Vdash F[k] \; ; \; H\overline{k}\phi_k \nVdash \bot.$$

Grâce au théorème de continuité appliqué à la suite ζ_{k,ϕ_k}
on définit alors $\phi \in \mathbf{\Lambda}$ tel que $\phi\overline{k} = \zeta_{k,\phi_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On a donc $\phi\overline{k} \Vdash F[k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, autrement dit $\phi \Vdash \forall n^{\mathsf{int}} F[n]$.
Par suite, $U\phi \Vdash \bot$. D'après la continuité, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :
$U\psi \Vdash \bot$ pour tout $\psi \in \mathbf{\Lambda}$ stricte et t.q. $\psi\overline{i} = \xi_i$ pour $i < k$.
Or $\chi k t u v$ est stricte quels que soient $k, t, u, v \in \mathbf{\Lambda}$ puisque $\mathsf{cmp}\,\varnothing\,k = \varnothing$.
On peut donc prendre $\psi = \chi\overline{k}\phi_k\xi$, d'où $(U)(\chi\overline{k}\phi_k)\xi \Vdash \bot$ pour tout $\xi \in \mathbf{\Lambda}$.
Or, on a $H\overline{k}\phi_k = (U)(\chi\overline{k}\phi_k)(G)\eta_{k,\phi_k}$ et donc $H\overline{k}\phi_k \Vdash \bot$. Contradiction. cqfd

Un bon ordre sur $\mathbb{R}$

La réalisabilité classique est une généralisation du forcing ;
l'algèbre de réalisabilité joue le rôle de l'ensemble ordonné de conditions.
Dans le cas du forcing, la *propriété de suite descendante* :

Toute suite décroissante $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conditions est minorée

assure que tout réel est constructible, et donc que :
i) Toute formule d'Analyse, vraie dans le modèle de base, est réalisée
ii) ainsi que la formule : $\mathbb{R}$ est bien ordonné.
La *propriété de continuité* est, en fait, la généralisation en réalisabilité classique
de la propriété de suite descendante.
On peut montrer (c'est moins facile que dans le cas du forcing)
qu'elle implique aussi les propriétés (i) et (ii).
On peut donc ainsi obtenir des programmes à partir de preuves dans la théorie :
ZF + DC + $\mathbb{R}$ est bien ordonné + toutes les formules d'Analyse conséquences de ZFL.

Références

S. Berardi, M. Bezem, T. Coquand *On the computational content of the axiom of choice.* J. Symb. Log. 63, pp. 600-622, 1998.

U. Berger, P. Oliva *Modified bar recursion and classical dependent choice.* Proc. Logic Colloquium 2001 - Springer (2005) p. 89-107.

E. Engeler *Algebras and combinators.* Algebra Universalis, vol. 13, 1 (1981) p. 389-392.

J.-L. Krivine *Realizability algebras II : new models of ZF + DC.* Log. Met. Comp. Sc., vol. 8, 1:10 (2012) p. 1-28.

J.-L. Krivine *Realizability algebras III: some examples.* To appear (2013).

T. Streicher *A classical realizability model arising from a stable model of untyped λ-calculus.* To appear (2013).