Annals of Mathematics, **104** (1976), 1-29

Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés

By J. L. KRIVINE

Introduction

Tous les espaces vectoriels considérés ici sont sur le corps des réels. Un espace normé C-réticulé (C réel $\geqq 1$) est un espace vectoriel L muni d'une relation d'ordre fermée compatible avec la structure d'espace vectoriel ($x \leqq y \Rightarrow x + z \leqq y + z$ et $\lambda x \leqq \lambda y$ pour $x, y, z \in L$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$) dans lequel deux éléments quelconques x, y ont une borne supérieure $x \cup y$, une borne inférieure $x \cap y$, et tel que si $x, y \in L$, et $|x| \leq |y|$, alors $\|x\| \leqq C\|y\|$ (par définition, $|x| = (-x) \cup x$). On désignera par L_+ l'ensemble des éléments $\geqq 0$ de L; $x, y \in L$ seront dits étrangers si $|x| \cap |y| = 0$.

Un espace de Banach C-réticulé est, par définition, un espace normé C-réticulé qui est complet.

Lorsque $C = 1$, L est appelé espace normé réticulé (resp. espace de Banach réticulé).

Un espace de Banach muni d'une base inconditionnelle $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (telle que $\|\sum_{n=1}^k \lambda_n x_n\| \leqq C \|\sum_{n=1}^k |\lambda_n| x_n\|$) est un espace C-réticulé, pour la relation d'ordre dans laquelle $\sum_{n=1}^k \lambda_n x_n \geqq 0 \Leftrightarrow \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k \geqq 0$.

E, F étant des espaces normés, on dit que F *est finiment représentable dans* E si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace F' de F de dimension finie, il existe un sous-espace E' de E et une bijection linéaire $T: E' \to F'$ telle que $\|T\| \|T^{-1}\| \leqq 1 + \varepsilon$.

L étant un espace normé C-réticulé, on dira que l^p (resp. c_0) est *finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés* si, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \cdots, x_n \in L$, *deux à deux étrangers* tels que, pour $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ on ait

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)(|\lambda_1|^p + \cdots + |\lambda_n|^p)^{1/p} &\leqq \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \\ &\leqq (1+\varepsilon)(|\lambda_1|^p + \cdots + |\lambda_n|^p)^{1/p}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(resp. } (1-\varepsilon)\sup(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|) &\leqq \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \\ &\leqq (1+\varepsilon)\sup(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|)\text{)} .\end{aligned}$$

Le résultat principal qu'on se propose de démontrer dans cet article est le

THÉORÈME 0.1. *Si L est un espace de Banach C-réticulé de dimension infinie, l'un des espaces l^p (p réel $\geqq 1$) ou c_0 est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés.*

Or, dans [1] il est démontré que, pour tout espace de Banach E de dimension infinie, il y a un espace à base inconditionnelle qui est finiment représentable dans E (une preuve en sera d'ailleurs donnée ici, Théorème I.1). Il résulte alors du Théorème 0.1 que l'un des espaces l^p ($p \geqq 1$) ou c_0 est finiment représentable dans E. Comme l^2 est finiment représentable dans l^p et c_0, on a ainsi obtenu une nouvelle démonstration du théorème suivant de Dvoretzky [2].

THÉORÈME 0.2. *l^2 est finiment représentable dans tout espace de Banach de dimension infinie.*

Un autre corollaire intéressant du Théorème 0.1 est le

THÉORÈME 0.3. *Si E est un espace de Banach isomorphe à l^p ($p \geqq 1$) alors l^p est finiment représentable dans E.*

Notons enfin qu'on peut préciser de la façon suivante le Théorème 0.1: Si L est un espace normé C-réticulé de dimension infinie, alors l^p est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, avec $p = \inf \{q \geqq 1;\ L$ est de genre $\leqq q\}$ ou bien $p = +\infty$ si L n'est de genre $\leqq q$ pour aucun réel $q \geqq 1$ (L est dit de genre $\leqq q$ s'il existe $M > 0$ tel que

$$(\|x_1\|^q + \cdots + \|x_n\|^q)^{1/q} \leqq M\|x_1 + \cdots + x_n\|$$

quels que soient $x_1, \cdots, x_n \in L$ deux à deux étrangers). La démonstration résulte des techniques développées dans le présent article et dans [8] et est pratiquement faite dans [8].

I

Soit E un espace de Banach, $x_1, \cdots, x_n \in E$. La fonction $\Phi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$ définie par $\Phi(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|$ sera appelée *le type du n-uplet* $(x_1, \cdots, x_n)$. Une fonction $\Phi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$ sera appelée *un n-type,* si c'est le type d'un n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ d'éléments d'un espace de Banach. Un n-type est donc déterminé par ses valeurs sur

$$\mathcal{B}_\infty^n = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n;\ \sup(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|) = 1\},$$

puisque c'est une fonction positivement homogène de degré 1. L'ensemble $\mathcal{T}_n$ des n-types sera considéré comme muni de la métrique induite par celle de l'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathcal{B}_\infty^n)$.

Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Banach (resp. espaces de Banach réticulés) et $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre sur I. Dans [3], on a défini l'*ultraproduit de cette famille suivant* $\mathfrak{D}$; c'est un espace de Banach (resp. un espace de Banach réticulé), noté $\prod_{i\in I} E_i/\mathfrak{D}$. Lorsque tous les E_i $(i \in I)$ sont égaux à un même espace E, l'ultraproduit est appelé une *ultrapuissance de* E et noté $E^I/\mathfrak{D}$.

PROPOSITION I.1. *Soient* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille d'espaces de Banach,* $E = \prod_{i\in I} E_i/\mathfrak{D}$, *et* $x_1, \cdots, x_n \in E$, $x_1 = (x_1^i)_{i\in I}, \cdots, x_n = (x_n^i)_{i\in I}$, *avec* $x_1^i, \cdots, x_n^i \in E_i$. *Soient* Φ_i, Φ *les types respectifs des n-uplets* $(x_1^i, \cdots, x_n^i)$, $(x_1, \cdots, x_n)$. *Alors* $\Phi_i \rightarrow \Phi$ *suivant l'ultrafiltre* $\mathfrak{D}$, *dans l'espace métrique* $\mathcal{T}_n$ *des n-types.*

Il existe $K > 0$ tel que $\|x_1\|, \cdots, \|x_n\|, \|x_1^i\|, \cdots, \|x_n^i\| \leqq K$. Par définition des ultraproduits il est clair que pour chaque $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$, $\Phi_i(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} \Phi(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Mais d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&|\Phi_i(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) - \Phi_i(\lambda_1', \cdots, \lambda_n')| \\
&\quad = \big| \|\lambda_1 x_1^i + \cdots + \lambda_n x_n^i\| - \|\lambda_1' x_1^i + \cdots + \lambda_n' x_n^i\| \big| \\
&\quad \leqq \|(\lambda_1 - \lambda_1')x_1^i + \cdots + (\lambda_n - \lambda_n')x_n^i\| \leqq K(|\lambda_1 - \lambda_1'| + \cdots + |\lambda_n - \lambda_n'|) .
\end{aligned}$$

Cela montre que $(\Phi_i)_{i\in I}$ est une famille équicontinue de fonctions sur le compact $\mathcal{B}_\infty^n$. Elle est donc relativement compacte dans $\mathcal{C}(\mathcal{B}_\infty^n)$, d'où l'existence de $\Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{B}_\infty^n)$ telle que $\|\Phi_i - \Psi\|_\infty$ tende vers 0 suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$. En particulier $\Phi_i(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} \Psi(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ pour $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{B}_\infty^n$. Donc $\Psi = \Phi$, et $\Phi_i \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} \Phi$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{B}_\infty^n)$. C.Q.F.D.

PROPOSITION I.2 [4]. *Toute ultrapuissance* $E^I/\mathfrak{D}$ *d'un espace de Banach* E *est finiment représentable dans* E.

Soient F un sous-espace de dimension finie de $E^I/\mathfrak{D}$, $x_1, \cdots, x_n$ une base de F, $x_1 = (x_1^i)_{i\in I}, \cdots, x_n = (x_n^i)_{i\in I}$. Il existe $K > 0$ tel que

$$K\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \geqq \sup\big(|\lambda_1|, \cdots |\lambda_n|\big)$$

(car toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes). D'après la Proposition 1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \subset I$, $J \in \mathfrak{D}$ tel que

$$\big| \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| - \|\lambda_1 x_1^i + \cdots + \lambda_n x_n^i\| \big| \leqq \varepsilon$$

pour tout $i \in J$ et tout $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{B}_\infty^n$. Par suite

$$\big| \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| - \|\lambda_1 x_1^i + \cdots + \lambda_n x_n^i\| \big| \leqq \varepsilon \sup(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|)$$

pour $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$. Donc

$$\big| \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| - \|\lambda_1 x_1^i + \cdots + \lambda_n x_n^i\| \big| \leqq \varepsilon K \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|$$

pour $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$. On choisit $i \in J$ ($J \in \mathfrak{D}$ donc $J \neq \varnothing$), on appelle F' le sous-espace de E engendré par $x_1^i, \cdots, x_n^i$ et on définit $T: F \to F'$ par $T(x_1) = x_1^i, \cdots, T(x_n) = x_n^i$. Dès que $\varepsilon K < 1$, l'inégalité précédente montre que T est biunivoque et que $\| T \| \| T^{-1} \| \leqq (1 + \varepsilon K)/(1 - \varepsilon K)$. C.Q.F.D.

On sait, en fait, qu'un espace de Banach F est finiment représentable dans E si et seulement s'il est isométrique à un sous-espace d'une ultrapuissance de E (voir [4]).

Soient L, M deux espaces normés C-réticulés, et K un réel >0. On dira que M est *K-finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés* si, quels que soient $a_1, \cdots, a_n \in M$ deux à deux étrangers et $\varepsilon > 0$, il existe $b_1, \cdots, b_n \in L$ deux à deux étrangers tels que

$$(K + \varepsilon)^{-1} \| \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \| \leqq \| \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \| \leqq (K + \varepsilon) \| \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \|$$

quels que soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.

Pour $K = 1$, on dira que *M est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés.*

LEMME I.1. *Soient L un espace de Banach C-réticulé, $L^I/\mathfrak{D}$ une ultrapuissance de L, $a_1, \cdots, a_n$ des éléments de $L^I/\mathfrak{D}$ deux à deux étrangers. Alors on a*

$$a_1 = (a_1^i)_{i \in I}, \cdots, a_n = (a_n^i)_{i \in I}, a_1^i, \cdots, a_n^i \in L ,$$

deux à deux étrangers pour chaque $i \in I$.

Supposons d'abord $a_1, \cdots, a_n \geqq 0$; on montre le résultat, avec $a_1^i, \cdots, a_n^i \in L_+$ par récurrence sur n; pour $n = 2$, on a

$$a_1 = (x_1^i)_{i \in I},\ a_2 = (x_2^i)_{i \in I}, \text{ avec } x_1^i, x_2^i \in L_+ .$$

Comme $a_1 \cap a_2 = 0$, on a $\| x_1^i \cap x_2^i \| \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} 0$. On pose

$$a_1^i = x_1^i - x_1^i \cap x_2^i;\ a_2^i = x_2^i - x_1^i \cap x_2^i ;$$

alors

$$a_1^i \cap a_2^i = 0 \quad \text{et} \quad a_1 = (a_1^i)_{i \in I},\ a_2 = (a_2^i)_{i \in I} .$$

Pour n entier quelconque on pose $b = a_2 + \cdots + a_n$; alors $a_1 \cap b = 0$, donc $a_1 = (a_1^i)_{i \in I}$, $b = (b^i)_{i \in I}$, avec $a_1^i \cap b^i = 0$. Par hypothèse de récurrence, on a $a_k = (x_k^i)_{i \in I}$, pour $k = 2, \cdots, n$, $x_2^i, \cdots, x_n^i \in L_+$ deux à deux étrangers. On pose $a_k^i = x_k^i \cap b^i$ pour $k = 2, \cdots, n$ et on a le résultat cherché.

Dans le cas général, d'après ce qu'on vient de montrer, on a

$$| a_1 | = (b_1^i)_{i \in I}, \cdots, | a_n | = (b_n^i)_{i \in I} \text{ avec } b_1^i, \cdots, b_n^i \in L_+$$

deux à deux étrangers. D'autre part $a_1 = (x_1^i)_{i \in I}, \cdots, a_n = (x_n^i)_{i \in I}$. On pose

$a_k^i = (x_k^i \cap b_k^i) \cup (-b_k^i)$, pour $k = 1, \cdots, n$. Comme $\| |x_k^i| - b_k^i \| \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} 0$, il en résulte que $\| a_k^i - x_k^i \| \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} 0$; donc $a_k = (a_k^i)_{i \in I}$ et $a_1^i, \cdots, a_n^i$ sont étrangers deux à deux, puisque $|a_k^i| \leqq b_k^i$. C.Q.F.D.

PROPOSITION I.3. *Soient L un espace normé C-réticulé et $L^I/\mathfrak{D}$ une ultrapuissance de L. Alors $L^I/\mathfrak{D}$ est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés.*

Soient $a_1, \cdots, a_n$ deux à deux étrangers dans $L^I/\mathfrak{D}$.

Il existe $K > 0$ tel que

$$\sup(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|) \leqq K \| \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \| \qquad \text{pour } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$$

(toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes). D'après le Lemme 1, on a

$$a_1 = (a_1^i)_{i \in I}, \cdots, a_n = (a_n^i)_{i \in I}, a_1^i, \cdots, a_n^i \in L$$

deux à deux étrangers. D'après la Proposition 1, il existe $J \subset I$, $J \in \mathfrak{D}$ tel que

$$\big| \| \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \| - \| \lambda_1 a_1^i + \cdots + \lambda_n a_n^i \| \big| \leqq \varepsilon$$

pour $i \in J$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, $|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n| \leqq 1$. Donc

$$\begin{aligned} &\big| \| \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \| - \| \lambda_1 a_1^i + \cdots + \lambda_n a_n^i \| \big| \\ &\qquad \leqq \varepsilon \sup(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|) \leqq \varepsilon K \| \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \| \end{aligned}$$

pour $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.

Autrement dit

$$\begin{aligned} &(1 - \varepsilon K) \| \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \| \\ &\qquad \leqq \| \lambda_1 a_1^i + \cdots + \lambda_n a_n^i \| \leqq (1 + \varepsilon K) \| \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \| . \end{aligned}$$

Cela donne le résultat, puisque $J \neq \varnothing$. C.Q.F.D.

PROPOSITION I.4. *Soient L un espace de Banach C-réticulé, p, K deux réels $\geqq 1$. Pour que l^p soit K-finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, il faut et il suffit qu'il existe, dans une ultrapuissance de L une suite $(X_n)_{n \in \mathrm{N}}$ d'éléments deux à deux étrangers telle que*

$$\begin{aligned} &K^{-1}(|\lambda_0|^p + \cdots + |\lambda_n|^p)^{1/p} \leqq \| \lambda_0 X_0 + \cdots + \lambda_n X_n \| \\ &\qquad \leqq K(|\lambda_0|^p + \cdots + |\lambda_n|^p)^{1/p} \end{aligned}$$

pour $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$.

La condition est suffisante; en effet, elle implique que l^p est K-finiment représentable au sens des espaces réticulés dans une ultrapuissance de L, donc aussi dans L d'après la Proposition 3. La condition est nécessaire: par hypothèse, pour chaque $n \in \mathrm{N}$ il existe $X_0^n, X_1^n, \cdots, X_n^n \in L$ deux à deux étrangers tels que

$$\left(K+\frac{1}{n}\right)^{-1}(|\lambda_0|^p+\cdots+|\lambda_n|^p)^{1/p}$$
$$\leqq \|\lambda_0 X_0^n+\cdots+\lambda_n X_n^n\| \leqq \left(K+\frac{1}{n}\right)(|\lambda_0|^p+\cdots+|\lambda_n|^p)^{1/p}$$

quels que soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$. Pour $n < m$, posons $X_m^n = 0$. Soit $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$; dans $L^N/\mathfrak{D}$, on définit $X_m = (|X_m^n|)_{n\in\mathbf{N}}$ et on voit immédiatement que les X_m ($m \in \mathbf{N}$) sont deux à deux étrangers et que

$$K^{-1}(|\lambda_0|^p+\cdots+|\lambda_m|^p)^{1/p} \leqq \|\lambda_0 X_0+\cdots+\lambda_m X_m\|$$
$$\leqq K(|\lambda_0|^p+\cdots+|\lambda_m|^p)^{1/p} .$$
C.Q.F.D.

PROPOSITION I.5. *Soit L un espace normé C-réticulé de dimension infinie. Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments $\neq 0$ de L deux à deux étrangers.*

La proposition résulte immédiatement du Théorème 26.10 de [7] et du fait qu'un espace réticulé normé est évidement archimédien au sens de [7]: si $x \in L_+$ et $y \leqq x/n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $y \leqq 0$ puisque la relation d'ordre sur L est fermée.

Soient E un espace de Banach et $(x_i)_{i\in D}$ une famille d'éléments de E. Cette famille sera dite *invariante par changement de signe* si, quels que soient $i_1, \cdots, i_n \in D$, distincts, les 2^n n-uplets $(\varepsilon_1 x_{i_1}, \cdots, \varepsilon_n x_{i_n})$ ($\varepsilon_1 = \pm 1, \cdots, \varepsilon_n = \pm 1$) ont tous le même type (autrement dit

$$\|\lambda_1 x_{i_1}+\cdots+\lambda_n x_{i_n}\| = \||\lambda_1| x_{i_1}+\cdots+|\lambda_n| x_{i_n}\| \quad \text{pour } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}) .$$

D étant un ensemble totalement ordonné, une famille $(x_i)_{i\in D}$ d'éléments de E sera dite *écartable* si, quels que soient $i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_n \in D$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ et $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$, les deux n-uplets $(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$ et $(x_{j_1}, \cdots, x_{j_n})$ ont le même type.

PROPOSITION I.6. *Soient E un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée dans E et $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre sur* $\mathbf{N}$. Il *existe un espace de Banach $E' \supset E$ finiment représentable dans E et une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ écartable d'éléments de E' telle que*

$$\|x+\lambda_1 y_1+\cdots+\lambda_k y_k+\lambda_{k+1} y_{k+1}\|$$
$$= \lim_{n \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} \infty} \|x+\lambda_1 y_1+\cdots+\lambda_k y_k+\lambda_{k+1} x_n\|$$

pour tout $x \in E$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1} \in \mathbf{R}$.

Si de plus E est un espace de Banach réticulé et les x_n sont étrangers deux à deux, alors E' est un espace de Banach réticulé, finiment représentable dans E au sens des espaces réticulés et les y_n sont deux à deux étrangers et étrangers à tous les x_k.

On définit une suite croissante $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k \subset \cdots$ d'espaces de Banach en posant $E_0 = E$, $E_{k+1} = E_k^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$. Soit E' le complété de $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k$. Il est immédiat, par induction sur k que E_k est finiment représentable dans E (également au sens des espaces réticulés si E en est un), donc E' l'est aussi. Comme $E_k \supset E$, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite bornée dans E_k, donc définit un élément de $E_k^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D} = E_{k+1}$, qu'on désigne par y_{k+1}. Il est donc évident, par définition des ultrapuissances, que l'on a

$$\begin{aligned} &\| x + \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_k y_k + \lambda_{k+1} y_{+1} \| \\ &\quad = \lim_{n \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} \infty} \| x + \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_k y_k + \lambda_{k+1} x_n \| \end{aligned}$$

(puisque $x + \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_k y_k \in E_k$).

Soient maintenant $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ des entiers $\geqq 1$. On montre, par induction sur k que

$$\| x + \lambda_1 y_{i_1} + \cdots + \lambda_k y_{i_k} \| = \| x + \lambda_1 y_{j_1} + \cdots + \lambda_k y_{j_k} \|$$

pour $x \in E$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{R}$. Or on a:

$$\begin{aligned} &\| x + \lambda_1 y_{i_1} + \cdots + \lambda_{k-1} y_{i_{k-1}} + \lambda_k y_{i_k} \| \\ &\quad = \lim_{n \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} \infty} \| x + \lambda_1 y_{i_1} + \cdots + \lambda_{k-1} y_{i_{k-1}} + \lambda_k x_n \| \\ &\quad = \lim_{n \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} \infty} \| x + \lambda_1 y_{j_1} + \cdots + \lambda_{k-1} y_{j_{k-1}} + \lambda_k x_n \| \\ &\qquad\qquad\qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &\quad = \| x + \lambda_1 y_{j_1} + \cdots + \lambda_k y_{j_k} \| . \end{aligned}$$

En particulier $(y_{i_1}, \cdots, y_{i_k})$ et $(y_{j_1}, \cdots, y_{j_k})$ ont le même type.

Supposons maintenant que E soit un espace réticulé, et que les x_n sont étrangers deux à deux. Si $k \in \mathbf{N}$ et $1 \leqq i < j$, on a

$$\| |x_k| \cap |y_i| \| = \lim_{n \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} \infty} \| |x_k| \cap |x_n| \| = 0$$

donc y_i est étranger à chacun des x_k;

$$\| |y_i| \cap |y_j| \| = \lim_{n \xrightarrow[\mathfrak{D}]{} \infty} \| |y_i| \cap |x_n| \| = 0 ,$$

donc les y_i sont étrangers deux à deux. C.Q.F.D.

THÉORÈME I.1. *Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Il existe un espace de Banach F, finiment représentable dans E, et dans F une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$, écartable, invariante par changement de signe, $\| X_n \| = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

E étant de dimension infinie, il existe dans E une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $\| x_n \| = 1$, dont aucune sous-suite ne converge. Soit $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$. On construit alors à l'aide de la Proposition I.6 un espace E' et une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans E' ayant les propriétés indiquées.

Les y_n sont distincts: car si $m < n$, $\|y_m - y_n\| = \lim_{k \underset{\mathfrak{D}}{\to} \infty} \|y_m - x_k\|$. Si $y_m = y_n$, il en résulte qu'il y a une sous-suite des x_k qui converge vers y_m, ce qui contredit l'hypothèse.

On pose $\delta = \|y_0 - y_1\|$ ($= \|y_m - y_n\|$ pour $m \neq n$), $\delta > 0$. On a alors

$$\|\lambda_0 y_0 + \cdots + \lambda_n y_n\| \geqq \frac{\delta}{2} \sup(|\lambda_0|, \cdots, |\lambda_n|)\,. \tag{1}$$

En effet, si ce n'est pas le cas, on a, pour un entier k, $0 \leqq k \leqq n$: $\|\lambda_0 y_0 + \cdots + \lambda_n y_n\| < (\delta/2)|\lambda_k|$. La suite y_n étant écartable, on a

$$\begin{aligned}
&\|\lambda_0 y_0 + \cdots + \lambda_n y_n\| \\
&\quad = \|\lambda_0 y_0 + \cdots + \lambda_{k-1} y_{k-1} + \lambda_k y_k + \lambda_{k+1} y_{k+2} + \cdots + \lambda_n y_{n+1}\| \\
&\quad = \|\lambda_0 y_0 + \cdots + \lambda_{k-1} y_{k-1} + \lambda_k y_{k+1} + \lambda_{k+1} y_{k+2} + \cdots + \lambda_n y_{n+1}\| \\
&\quad < \frac{\delta}{2}|\lambda_k|\,.
\end{aligned}$$

Par différence, on en déduit $\|\lambda_k(y_k - y_{k+1})\| < \delta\,|\lambda_k|$ ce qui est une contradiction.

On pose $z_n = y_{2n} - y_{2n+1}$, et on distingue deux cas:

(1°) Il existe $M > 0$ tel que $\|z_0 + \cdots + z_n\| \leqq M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On a alors

$$\|\pm z_0 \pm z_1 \pm \cdots \pm z_n\| \leqq 2M$$

(puisque $\pm z_0 \pm z_1 \pm \cdots \pm z_n = z_{i_0} + \cdots + z_{i_k} - (z_{j_0} + \cdots + z_{j_k})$ et que $\|z_{i_0} + \cdots + z_{i_k}\| = \|z_0 + \cdots + z_k\|$).

Par récurrence sur k, on montre que, si $|\lambda_0|, \cdots, |\lambda_k| \leqq 1$, on a

$$\|\lambda_0 z_0 + \cdots + \lambda_k z_k \pm z_{k+1} \pm \cdots \pm z_n\| \leqq 2M:$$

en admettant cette inégalité pour l'entier k, on a:

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 z_0 + \cdots + \lambda_k z_k + \lambda_{k+1} z_{k+1} \pm z_{k+2} \pm \cdots \pm z_n \\
&\quad = \frac{1}{2}(1 - |\lambda_{k+1}|)(\lambda_0 z_0 + \cdots + \lambda_k z_k - \varepsilon_{k+1} z_{k+1} \pm z_{k+2} \pm \cdots \pm z_n) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(1 + |\lambda_{k+1}|)(\lambda_0 z_0 + \cdots + \lambda_k z_k + \varepsilon_{k+1} z_{k+1} \pm z_{k+2} \pm \cdots z_n)\,, \\
&\hspace{20em} \text{avec } \varepsilon_{k+1} = \lambda_{k+1}/|\lambda_{k+1}|\,.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on trouve le résultat pour $k + 1$. On a ainsi montré que

$$\frac{\delta}{2} \sup(|\lambda_0|, \cdots, |\lambda_n|) \leqq \|\lambda_0 z_0 + \cdots + \lambda_n z_n\| \leqq 2M \sup(|\lambda_0|, \cdots, |\lambda_n|)$$

(la première inégalité d'après (1)). L'espace engendré dans E' par les z_i est isomorphe à c_0.

Pour $r, k \in \mathbf{N}$ on pose

$$u_k^r = \sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i \left(1 - \left|\frac{i-r}{r}\right|\right) z_{2kr+i} .$$

On a donc $\delta/2 \leqq \| u_k^r \| \leqq 2M$. Dans l'espace de Banach $E'' = (E')^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ (qui est finiment représentable dans E', donc dans E), on définit $U_k = (u_k^r)_{r\in\mathbf{N}}$. Donc $\delta/2 \leqq \| U_k \| \leqq 2M$.

Pour r fixé la suite d'éléments de $E' : u_0^r, u_1^r, \cdots, u_k^r, \cdots$ est écartable (car la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'est). Donc la suite U_k est écartable. On montre qu'elle est invariante par changement de signe; pour cela, il suffit de voir que $(U_0, \cdots, U_{l-1}, U_l, U_{l+1}, \cdots, U_k)$ et $(U_0, \cdots, U_{l-1}, -U_l, U_{l+1}, \cdots, U_k)$ ont le même type.

Posons

$$\xi_l^r = \sum_{i=0}^{2r-2} (-1)^i \left(1 - \left|\frac{i-r}{r}\right|\right) z_{2lr+i} ,$$

$$\eta_l^r = \sum_{i=0}^{2r-2} (-1)^i \left(1 - \left|\frac{i-r}{r}\right|\right) z_{2lr+i+1} .$$

La suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant écartable, les deux $(k+1)$-uplets
$(u_0^r, \cdots, u_{l-1}^r, \xi_l^r, u_{l+1}^r, \cdots, u_k^r)$ et $(u_0^r, \cdots, u_{l-1}^r, \eta_l^r, u_{l+1}^r, \cdots, u_k^r)$
ont le même type. On aura le résultant cherché, d'après la Proposition I.1 si on montre que $U_l = (\xi_l^r)_{r\in\mathbf{N}}$ et $-U_l = (\eta_l^r)_{r\in\mathbf{N}}$. Pour cela il suffit de voir que

$$\| u_l^r - \xi_l^r \|, \| u_l^r + \eta_l^r \| \longrightarrow 0 \text{ quand } r \longrightarrow \infty .$$

Or

$$u_l^r - \xi_l^r = -\frac{1}{r} z_{2lr+2r-1} \quad \text{donc} \quad \| u_l^r - \xi_l^r \| \leqq \frac{2M}{r} .$$

$$u_l^r + \eta_l^r = \sum_{i=1}^{2r-1} (-1)^i \left(\left|\frac{i-r}{r}\right| - \left|\frac{i-1-r}{r}\right| \right) z_{2lr+i} .$$

Or

$$\sup_{i=1}^{2r-1} \left| \left|\frac{i-r}{r}\right| - \left|\frac{i-1-r}{r}\right| \right| = \frac{1}{r}, \text{ donc } \| u_l^r + \eta_l^r \| \leqq \frac{2M}{r} .$$

La suite $U_k/\| U_k \|$ répond donc au problème. Il serait d'ailleurs facile de voir qu'elle engendre un espace isométrique à c_0.

(2°) Il existe une suite croissante n_r d'entiers $\geqq 0$ telle que $\| \sum_{i=0}^{n_r-1} z_i \| = N_r \to \infty$ quand $r \to \infty$.

On a $\sum_{i=0}^{n_r-1} z_i = \sum_{i=0}^{2n_r-1}(-1)^i y_i$. Pour k, $r \in \mathbf{N}$, posons

$$u_k^r = \frac{1}{N_r}\sum_{i=0}^{2n_r-1}(-1)^i y_{2kn_r+i} .$$

Alors $\| u_k^r \| = 1$. Dans l'espace de Banach $E'' = (E')^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ (finiment représentable dans E), on définit $U_k = (u_k^r)_{r\in\mathbf{N}}$. Donc $\| U_k \| = 1$.

Pour r fixé, la suite d'éléments de E': $u_0^r, u_1^r, \cdots, u_k^r, \cdots$ est écartable (car la suite y_n l'est). Donc la suite U_k est écartable. On montre qu'elle est invariant par changement de signe, c'est-à-dire que les deux $(k+1)$-uplets:

$$(U_0, \cdots, U_{l-1}, U_l, U_{l+1}, \cdots, U_k) \text{ et } (U_0, \cdots, U_{l-1}, -U_l, U_{l+1}, \cdots, U_k)$$

ont le même type. Posons

$$\xi_l^r = \frac{1}{N_r}\sum_{i=0}^{2n_r-2}(-1)^i y_{2ln_r+i} ;\quad \eta_l^r = \frac{1}{N_r}\sum_{i=0}^{2n_r-2}(-1)^i y_{2ln_r+i+1} .$$

La suite y_n étant écartable, les deux $(k+1)$-uplets:

$$(u_0^r, \cdots, u_{l-1}^r, \xi_l^r, u_{l+1}^r, \cdots, u_k^r) \text{ et } (u_0^r, \cdots, u_{l-1}^r, \eta_l^r, u_{l+1}^r, \cdots, u_k^r)$$

ont le même type. D'après la Proposition I.1, on aura donc le résultat cherché si on montre que

$$U_l^r = (\xi_l^r)_{r\in\mathbf{N}} ,\quad -U_l^r = (\eta_l^r)_{r\in\mathbf{N}} .$$

Pour cela il suffit de voir que

$$\| u_l^r - \xi_l^r \| ,\ \| u_l^r + \eta_l^r \| \longrightarrow 0 \text{ quand } r \longrightarrow \infty .$$

Or

$$u_l^r - \xi_l^r = -\frac{1}{N_r} y_{2ln_r+2n_r-1} ,\quad u_l^r + \eta_l^r = \frac{1}{N_r} y_{2ln_r} ,$$

donc

$$\| u_l^r - \xi_l^r \| ,\ \| u_l^r + \eta_l^r \| \leqq \frac{1}{N_r} . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

THÉORÈME I.2. *Soit L un espace de Banach C-réticulé de dimension infinie. Il existe un espace de Banach réticulé, $\tilde{L}$, finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, et dans $\tilde{L}$ une suite écartable $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments deux à deux étrangers, $\| X_n \| = 1$.*

Il suffit de trouver un espace M, C-réticulé, finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, et dans M une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ écartable, invariante par changement de signe, les X_n étant deux à deux étrangers de norme 1; car alors le sous-espace fermé $\tilde{L}$ de M engendré par les X_n sera un espace réticulé, si on le munit de la relation d'ordre: $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X_i \geqq 0 \Leftrightarrow \lambda_0, \cdots, \lambda_n \geqq 0$, et $\tilde{L}$ sera encore finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés.

En appliquant la Proposition I.5, on prend dans L une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments deux à deux étrangers de norme 1. En appliquant la Proposition I.6 avec cette suite, et un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ non trivial sur $\mathbf{N}$, on obtient, dans un espace L', C-réticulé, finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, une suite écartable $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments deux à deux étrangers de norme 1.

On peut alors répéter mot à mot la démonstration du Théorème I.1. Il faut simplement vérifier en plus que la suite $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$ ainsi obtenue est formée d'éléments deux à deux étrangers. Pour cela il suffit de voir que, pour chaque $r \in \mathbf{N}$, $u_0^r, u_1^r, \cdots, u_k^r, \cdots$ sont deux à deux étrangers; mais c'est évident par définition de u_k^r, puisque les y_n sont deux à deux étrangers.

C.Q.F.D.

THÉORÈME I.3. *Soient L un espace de Banach C-réticulé de dimension infinie, et D un ensemble totalement ordonné. Il existe un espace de Banach réticulé L', finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, et dans L' une famille écartable $(X_i)_{i \in D}$ d'éléments deux à deux étrangers de norme* 1.

On considère l'espace de Banach réticulé $\tilde{L}$ et la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ obtenus au théorème précédent. Soit L' un espace vectoriel (non normé) ayant une base équipotente à D et soit $(X_i)_{i \in D}$ cette base. Tout $X \in L'$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $X = \lambda_0 X_{i_0} + \cdots + \lambda_n X_{i_n}$, avec $i_0, \cdots, i_n \in D$, $i_0 < \cdots < i_n$. On définit une norme sur L' en posant $\|X\| = \|\lambda_0 X_0 + \cdots + \lambda_n X_n\|$, et une relation d'ordre sur L' en posant $X \geqq 0 \Leftrightarrow \lambda_0, \cdots, \lambda_n \geqq 0$. Alors L' est un espace normé réticulé finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés (puisque $\tilde{L}$ l'est) et la famille $(X_i)_{i \in D}$ a les propriétés voulues. C.Q.F.D.

II

D'après le Théorème I.2, on est ramené pour la démonstration du Théorème 0.1, au cas particulier où L est un espace de Banach réticulé. On ne considère donc plus, dans la suite, que des espaces réticulés.

Un espace de Banach réticulé L sera dit de genre $\leqq p$ (p réel $\geqq 1$) s'il existe $C > 0$ tel que

$$(\|x_1\|^p + \cdots + \|x_n\|^p)^{1/p} \leqq C \|x_1 + \cdots + x_n\|$$

quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $x_1, \cdots, x_n \in L$ deux à deux étrangers. Le théorème suivant est dû à G. Pisier et B. Maurey [5], [6] (voir aussi [9]).

THÉORÈME II.1. *Soit L un espace de Banach réticulé ; alors, ou bien c_0 est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, ou bien il existe $p \geqq 1$ tel que L soit de genre $\leqq p$.*

Soient n un entier $\geqq 0$, et α_n la borne inférieure des réels $\alpha > 0$, ayant la propriété suivante: quels que soient $x_1, \cdots, x_n \in L$ deux à deux étrangers, on a $\inf_{i=1}^n \|x_i\| \leqq \alpha \|x_1 + \cdots + x_n\|$.

Alors $\alpha_n \leqq 1$ (car on a toujours $\|x_i\| \leqq \|x_1 + \cdots + x_n\|$ si $x_1, \cdots, x_n$ sont étrangers) et la suite α_n est décroissante (puisque $\|x_1 + \cdots + x_n\| \leqq \|x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}\|$). De plus $\alpha_m \cdot \alpha_n \geqq \alpha_{mn}$ *pour* $m, n \in \mathbf{N}$: soit en effet $(x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ une famille d'éléments deux à deux étrangers dans L. Si on pose $y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$, les y_i sont deux à deux étrangers, donc

$$\inf_{i=1}^m \|y_i\| \leqq \alpha_m \|y_1 + \cdots + y_m\| = \alpha_m \Big\|\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} x_{ij}\Big\| .$$

Or on a

$$\inf_{j=1}^n \|x_{ij}\| \leqq \alpha_n \Big\|\sum_{j=1}^n x_{ij}\Big\| = \alpha_n \|y_i\| .$$

Par suite

$$\inf_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \|x_{ij}\| \leqq \inf_{1 \leq i \leq m} \alpha_n \|y_i\| \leqq \alpha_m \alpha_n \Big\|\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} x_{ij}\Big\|$$

ce qui donne bien le résultat cherché.

On distingue alors deux cas:

(1°) $\alpha_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \cdots, x_n \in L$ deux à deux étrangers, $\|x_i\| \geqq 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ et $\|x_1 + \cdots + x_n\| \leqq 1 + \varepsilon$. En remplaçant x_i par $x_i/\|x_i\|$ (ce qui diminue $\|x_1 + \cdots + x_n\|$) on voit qu'on peut supposer $\|x_i\| = 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$; alors, si $|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n| \leqq 1$, on a

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \leqq \|x_1 + \cdots + x_n\| \leqq 1 + \varepsilon .$$

Donc, en général, on a

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \leqq (1 + \varepsilon) \sup(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|) .$$

Mais, comme $x_1, \cdots, x_n$ sont étrangers, on a

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \geqq \sup(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|) .$$

Le sous-espace engendré par $x_1, \cdots, x_n$ dans L est donc $(1 + \varepsilon)$-isomorphe à l_n^∞, et on a ainsi démontré que c_0 est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés.

(2°) $\alpha_{n_0} < 1$ pour un entier $n_0 > 0$; on a alors $\alpha_n \leqq Cn^{-\beta}$, C, β étant des réels >0: en effet, de l'inégalité $\alpha_{mn} \leqq \alpha_m \cdot \alpha_n$ on déduit $\alpha_{n_0^k} \leqq (\alpha_{n_0})^k$; la suite α_n étant décroissante, on a $\alpha_n \leqq (\alpha_{n_0})^k$ pour $n \geqq n_0^k$. En prenant $k = [Ln/Ln_0] \geqq Ln/Ln_0 - 1$ ($[r]$ désigne le plus grand entier $\leqq r$), on a

$$\alpha_n \leqq (\alpha_{n_0})^{[Ln/Ln_0]} \leqq (\alpha_{n_0})^{Ln/Ln_0 - 1}$$

ce qui est le résultat cherché, avec $C = \alpha_{n_0}^{-1}$ et $\beta = -L\alpha_{n_0}/Ln_0$.

On choisit un réel $p \geqq 1$ tel que $p\beta > 1$. Soient $x_1, \cdots, x_n \in L$ deux à deux étrangers. On peut supposer $\| x_1 \| \geqq \| x_2 \| \geqq \cdots \geqq \| x_n \|$. On a alors, pour $1 \leqq i \leqq n$:

$$\| x_i \| = \inf_{j=1}^{i} \| x_j \| \leqq Ci^{-\beta} \| x_1 + \cdots + x_i \| \leqq Ci^{-\beta} \| x_1 + \cdots + x_n \| .$$

Donc

$$\| x_1 \|^p + \cdots + \| x_n \|^p \leqq C^p (\textstyle\sum_{i=1}^{n} i^{-p\beta}) \| x_1 + \cdots + x_n \|^p .$$

Si on pose $K^p = C^p(\sum_{i=1}^{\infty} i^{-p\beta})$ on a donc

$$(\| x_1 \|^p + \cdots + \| x_n \|^p)^{1/p} \leqq K \| x_1 + \cdots + x_n \|$$

ce qui montre que L est de genre $\leqq p$. C.Q.F.D.

LEMME II.1. *Soient L un espace de Banach réticulé de genre $\leqq p$, et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de L deux à deux étrangers. Alors $\| \sum_{i=0}^{n} x_i \|$ est une suite croissante; cette suite est majorée dans* $\mathbf{R}$ *si et seulement si la série $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ converge dans L.*

$\| \sum_{i=0}^{n} x_i \|$ est évidemment une suite croissante par définition des espaces normés réticulés; si $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ converge, cette suite est majorée par $\| \sum_{i=0}^{\infty} x_i \|$. Inversement si la série $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ diverge, il existe $\delta > 0$ et pour tout $N \in \mathbf{N}$ deux entiers $m, n, N < m < n$ tels que $\| \sum_{i=m}^{n} x_i \| \geqq \delta$. On peut donc trouver deux suites croissantes m_k, n_k d'entiers, avec $m_k < n_k < m_{k+1} < n_{k+1}$, telles que $\| \sum_{i=m_k}^{n_k} x_i \| \geqq \delta$. On a alors

$$\| \textstyle\sum_{i=0}^{n_k} x_i \| \geqq \| \sum_{j=0}^{k} (\sum_{i=m_j}^{n_j} x_i) \| \geqq C (\sum_{j=0}^{k} \| \sum_{i=m_j}^{n_j} x_i \|^p)^{1/p}$$

(puisque L est de genre $\leqq p$) $\geqq C\delta k^{1/p}$. Donc $\| \sum_{i=0}^{n_k} x_i \| \rightarrow \infty$. C.Q.F.D.

LEMME II.2. *Soit L un espace de Banach réticulé de genre $\leqq p$, $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de L deux à deux étrangers, telle que $A^{-1}2^{n/p} \leqq \| X_n \| \leqq A \cdot 2^n$ (A réel > 0). On désigne par θ la borne inférieure des réels $\lambda > 0$ tels que $\lambda^n \| X_n \| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors on a $1/2 \leqq \theta \leqq 2^{-1/p}$ et il existe une suite croissante d'entiers n_k tendant vers $+\infty$ telle que*

$$\theta^{n_k} \| X_{n_k} \| / \| \textstyle\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \theta^n X_n \| \ \textit{et}\ \theta^{n_{k+1}} \| X_{n_{k+1}} \| / \| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \theta^n X_n \|$$

tendent vers 0 *quand* $k \to \infty$.

Comme $A^{-1}2^{n/p} \leqq \| X_n \| \leqq A \cdot 2^n$, il est clair que $1/2 \leqq \theta \leqq 2^{-1/p}$. On examine deux cas:

(1°) *La série* $\sum_0^\infty \theta^n X_n$ *converge dans* L.

(a) Supposons d'abord qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers n_k telle que:

$$\theta^{n_k} \| X_{n_k} \| / \| \sum_{n_k}^\infty \theta^n X_n \| \longrightarrow 0 \text{ quand } k \longrightarrow \infty .$$

On a alors le résultat cherché: on définit en effet une sous suite m_l de la suite n_k par induction: $m_0 = n_0$ et m_{l+1} est le premier élément de la suite n_k qui est $> m_l$ et tel que

$$(*) \qquad \| \sum_{m_l}^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \| / \| \sum_{m_l}^\infty \theta^n X_n \| \geqq \frac{1}{2}$$

(il existe puisque, quand $N \to \infty$, $\| \sum_{m_l}^N \theta^n X_n \| / \| \sum_{m_l}^\infty \theta^n X^n \| \to 1$). Alors, comme la suite m_l est une sous-suite de la suite n_k,

$$\theta^{m_l} \| X_{m_l} \| / \| \sum_{m_l}^\infty \theta^n X_n \| \longrightarrow 0 \text{ quand } l \longrightarrow \infty ,$$

donc, d'après (*) il en est de même de

$$\theta^{m_l} \| X_{m_l} \| / \| \sum_{m_l}^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \| .$$

De même

$$\theta^{m_{l+1}} \| X_{m_{l+1}} \| / \| \sum_{m_{l+1}}^\infty \theta^n X_n \| \longrightarrow 0 ,$$

donc aussi

$$\theta^{m_{l+1}} \| X_{m_{l+1}} \| / \| \sum_{m_l}^\infty \theta^n X_n \| \quad (\text{car } \| \sum_{m_l}^\infty \theta^n X_n \| \geqq \| \sum_{m_{l+1}}^\infty \theta^n X_n \|)$$

et donc aussi, d'après (*)

$$\theta^{m_{l+1}} \| X_{m_{l+1}} \| / \| \sum_{m_l}^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \| .$$

(b) Si l'hypothèse (a) est fausse, c'est qu'il existe $K > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbf{N}$ on ait

$$\| \sum_N^\infty \theta^n X_n \| \leqq K\theta^N \| X_N \| .$$

Comme L est de genre $\leqq p$, on a:

$$\sum_N^\infty \| \theta^n X_n \|^p \leqq C^p \| \sum_N^\infty \theta^n X_n \|^p \leqq C^p K^p \| \theta^N X_N \|^p .$$

Posons

$$u_n = \| \theta^n X_n \|^p, \; B = C^p K^p, \text{ d'où } \sum_N^\infty u_n \leqq B u_N \; (**) .$$

En posant $\sigma = \sum_0^\infty u_n$, on montre, par récurrence sur N que $\sum_N^\infty u_n \leqq \sigma(B/(B+1))^N$: cette inégalité est évidente pour $N = 0$. En l'admettant pour

N, on en déduit

$$\sum_{N+1}^{\infty} u_n \leqq \sigma\left(\frac{B}{B+1}\right)^N - u_N\,;\ \sum_{N+1}^{\infty} u_n \leqq B\,u_N$$

(d'après (**)).

Donc

$$\sum_{N+1}^{\infty} u_n \leqq \sup_{x\in\mathbf{R}} \varphi(x),\ \text{où}\ \varphi(x) = \inf\left[Bx,\ \sigma\Big(\frac{B}{B+1}\Big)^N - x\right].$$

Or $\sup_{x\in\mathbf{R}} \varphi(x) = \sigma\big(B/(B+1)\big)^{N+1}$, ce qui donne le résultat pour l'entier $N+1$.

On a ainsi montré, en particulier, que $u_n \leqq \sigma\big(B/(B+1)\big)^n$ pour $n \in \mathbf{N}$. Donc $\theta^n \| X_n \| \leqq \sigma^{1/p}\big(B/(B+1)\big)^{n/p}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Mais si on pose $\lambda = \theta\big((B+1)/B\big)^{1/p}$, on a $\lambda^n \| X_n \| \leqq \sigma^{1/p}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\lambda > \theta$, ce qui contredit la définition de θ. Cela démontre le lemme dans le cas (1°).

(2°) *La série* $\sum_0^{\infty} \theta^n X_n$ *ne converge pas dans* L.

D'après le Lemme II.1, $\| \sum_r^N \theta^n X_n \| \uparrow +\infty$ quand $N \to \infty$, pour chaque entier r.

(a) Supposons qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers n_k telle que

$$\theta^{n_k} \| X_{n_k} \| / \| \textstyle\sum_0^{n_k-1} \theta^n X_n \| \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ k \longrightarrow \infty.$$

On a alors le résultat cherché: on définit en effet une sous-suite m_l de la suite n_k par induction; $m_0 = n_0$ et m_{l+1} est le premier élément de la suite n_k qui est $> m_l$ et tel que

$$(*) \qquad \| \textstyle\sum_{m_l}^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \| / \| \sum_0^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \| \geqq \dfrac{1}{2}$$

(il en existe, car $\| \sum_{m_l}^{N} \theta^n X_n \| / \| \sum_0^N \theta^n X_n \| \to 1$ quand $N \to \infty$). Alors, comme la suite m_l est une sous-suite de la suite n_k,

$$\theta^{m_l} \| X_{m_l} \| / \| \textstyle\sum_0^{m_l-1} \theta^n X_n \| \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ l \longrightarrow \infty\,,$$

donc aussi

$$\theta^{m_l} \| X_{m_l} \| / \| \textstyle\sum_0^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \| \ \Big(\text{car } \| \sum_0^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \| \geqq \| \sum_0^{m_l-1} \theta^n X_n \|\Big)\,,$$

et par suite aussi, d'après (*),

$$\theta^{m_l} \| X_{m_l} \| / \| \textstyle\sum_{m_l}^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \|\,.$$

De même

$$\theta^{m_{l+1}} \| X_{m_{l+1}} \| / \| \textstyle\sum_0^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \| \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ l \longrightarrow \infty\,,$$

donc aussi, d'après (*),

$$\theta^{m_{l+1}} \| X_{m_{l+1}} \| / \| \textstyle\sum_{m_l}^{m_{l+1}-1} \theta^n X_n \|\,.$$

(b) Si l'hypothèse (a) est fausse, il existe $K > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbf{N}$ on ait $\| \sum_0^{N-1} \theta^n X_n \| \leqq K\theta^N \| X_N \|$. Comme L est de genre $\leqq p$, on a

$$\sum_0^{N-1} \| \theta^n X_n \|^p \leqq C^p \| \sum_0^{N-1} \theta^n X_n \|^p \leqq C^p K^p \| \theta^N X_N \|^p .$$

Posons encore $u_n = \| \theta^n X_n \|^p$, $B = C^p K^p$, d'où $\sum_0^{N-1} u_n \leqq Bu_N$ pour tout $N \in \mathbf{N}$.

On en déduit que $u_n \geqq (u_0/(B+1))((B+1)/B)^n$ pour $n \geqq 1$; car, en admettant cette inégalité pour $1 \leqq n \leqq N-1$, on a

$$\begin{aligned} Bu_N &\geqq u_0 + \cdots + u_{N-1} \\ &\geqq u_0 + \frac{u_0}{B+1}\left[\frac{B+1}{B} + \left(\frac{B+1}{B}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{B+1}{B}\right)^{N-1}\right] \\ &= u_0\left(\frac{B+1}{B}\right)^{N-1} \end{aligned}$$

d'où $u_N \geqq (u_0/(B+1))((B+1)/B)^N$.

Il en résulte que

$$\theta^n \| X_n \| \geqq \left(\frac{u_0}{B+1}\right)^{1/p} \left(\frac{B+1}{B}\right)^{n/p} .$$

Si on prend $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $(B/(B+1))^{1/p}\, \theta < \lambda < \theta$, on en déduit que $\lambda^n \| X_n \| \to \infty$ quand $n \to \infty$, ce qui contredit la définition de θ. C.Q.F.D.

THÉORÈME II.2. *Soit L un espace de Banach réticulé de dimension infinie. Alors, ou bien c_0 est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, ou bien il existe un réel $q \geqq 1$ tel que l^q soit K-finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, avec $K = 2^{2/q}$.*

Désignons par D l'ensemble $\mathbf{Q} \times \mathbf{N}$ muni de l'ordre lexicographique:

$$(r, n) \leqq (r', n') \Longleftrightarrow r < r' \text{ ou } r = r' \text{ et } n \leqq n' .$$

En appliquant le Théorème I.3 on voit qu'on peut supposer qu'il existe dans L une famille écartable $(X_i)_{i \in D} = (X_{(r,n)})_{\substack{r \in \mathbf{Q} \\ n \in \mathbf{N}}}$ d'éléments deux à deux étrangers de norme 1. D'après le Théorème II.1 on peut également supposer que L est de genre $\leqq p$ pour un certain réel $p \geqq 1$. Étant donnés $x, y \in L$, on dira que *x est antérieur à y* (ou que *y est postérieur à x*, ou encore que x précède y) si on a

$$x = \alpha_1 X_{i_1} + \cdots + \alpha_k X_{i_k},\ y = \beta_1 X_{j_1} + \cdots + \beta_l X_{j_l} ,$$

avec

$$i_1 < \cdots < i_k < j_1 < \cdots < j_l,\ i_1, \cdots, i_k,\ j_1, \cdots, j_l \in D ,$$
$$\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_l \in \mathbf{R} .$$

On dira que *x et y sont semblables* si

$$x = \alpha_1 X_{i_1} + \cdots + \alpha_k X_{i_k},\ y = \alpha_1 X_{j_1} + \cdots + \alpha_k X_{j_k}$$

avec

$$i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_k \in D,\ i_1 < \cdots < i_k \text{ et } j_1 < \cdots < j_k\,.$$

Du fait que la famille $(X_i)_{i \in D}$ est écartable, on déduit immédiatement le

LEMME II.3. *Si $x, y, u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_l \in L$, x est semblable à y, $u_1, \cdots, u_k$ sont antérieurs à x et à y, $v_1, \cdots, v_l$ sont postérieurs à x et à y, alors les deux $(k+l+1)$-uplets $(u_1, \cdots, u_k, x, v_1, \cdots, v_l)$ et $(u_1, \cdots, u_k, y, v_1, \cdots, v_l)$ ont le même type.*

Dans la suite, nous appellerons pour abréger "intervalle" un intervalle $I \neq \emptyset$, $I \subset \mathbf{R}$, de la forme $[a, b[$ (semi-ouvert à droite); sa longueur sera désignée par $\mu(I)$; si ses extrémités sont des nombres dyadiques (rationnels de dénominateurs 2^n) nous dirons que I est un "intervalle dyadique".

I, I' étant deux intervalles, $I = [a, b[$, $I' = [a', b'[$ $(a < b$ et $a' < b')$, on écrira $I < I'$ si $b < a'$ et $I \leqq I'$ si $b \leqq a'$.

Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on définit $\Delta_n \subset \mathbf{Q}$; $\Delta_n = \{k \cdot 2^{-n};\ k \in \mathbf{Z}\}$. I étant un intervalle dyadique, on définit dans L:

$$X_I^n = \sum\nolimits_{r \in \Delta_n \cap I} X_{(r,n)}\,.$$

Pour n assez grand, les extrémités de I sont dans Δ_n, donc la somme représentant X_I^n comporte $2^n \mu(I)$ termes. Comme L est de genre $\leqq p$ et que $\| X_{(r,n)} \| = 1$, on a:

$$C^{-1} \mu(I)^{1/p}\, 2^{n/p} \leqq \| X_I^n \| \leqq \mu(I) \cdot 2^n\,.$$

Notons que, quels que soient les intervalles dyadiques I, J, X_I^m et X_J^n sont étrangers si $m \neq n$; si $I \leqq J$, X_I^m précède X_J^n, quels que soient $m, n \in \mathbf{N}$; $X_{[a,b[}^n + X_{[b,c[}^n = X_{[a,c[}^n$ si $a < b < c$.

Si $\mu(I) = \mu(J)$ et si n est assez grand (pour que les extrémités de I, J soient dans Δ_n) alors X_I^n et X_J^n sont semblables, donc $\| X_I^n \| = \| X_J^n \|$.

Si $\mu(I) \leqq \mu(J)$, alors $\| X_I^n \| \leqq \| X_J^n \|$ pour tout n assez grand: en effet, si $I = [a, b[$, on pose $c = a + \mu(J) \geqq b$, et on a $\| X_{[a,c[}^n \| = \| X_J^n \|$ pour n assez grand. Or $X_{[a,c[}^n = X_I^n + X_{[b,c[}^n$ donc $\| X_{[a,c[}^n \| \geqq \| X_I^n \|$ puisque X_I^n et $X_{[b,c[}^n$ sont étrangers. Si $\mu(I)$ est un entier, on a donc $\| X_I^n \| \leqq \mu(I)\, \| X_{[0,1[}^n \|$ pour n assez grand (décomposer I comme réunion de $\mu(I)$ intervalles consécutifs de longueur 1). Il en résulte que, *quel que soit l'intervalle dyadique I, on a*

$$\| X_I^n \| \leqq ([\mu(I)] + 1)\, \| X_{[0,1[}^n \| \leqq (\mu(I) + 1)\, \| X_{[0,1[}^n \|$$

pour n assez grand.

Appliquons le Lemme II.2 en prenant $X_n = X_{[0,1[}^n$. Soient n_k la suite croissante d'entiers, tendant vers $+\infty$, et θ le réel $(1/2 \leqq \theta \leqq 2^{-1/p})$ qui sont définis dans l'énoncé de ce lemme.

On pose

$$N(k) = \| \sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} \theta^n X^n_{[0,1[} \| ,$$

et on définit dans L, pour chaque intervalle dyadique I, et $k \in \mathbf{N}$:

$$Y^k_I = \frac{1}{N(k)} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \theta^n X^n_I .$$

On a donc $\| Y^k_{[0,1[} \| = 1$. Si $I \leqq J$, alors Y^k_I précède Y^k_J (et, en particulier, ils sont étrangers). Si $a < b < c$, on a $Y^k_{[a,b[} + Y^k_{[b,c[} = Y^k_{[a,c[}$.

Si $\mu(I) = \mu(J)$, et si k est assez grand (pour que les extrémités de I, J soient dans Δ_{n_k}) alors Y^k_I et Y^k_J sont semblables; en particulier, on a alors $\| Y^k_I \| = \| Y^k_J \|$; si $\mu(I) = 1$, on a donc $\| Y^k_I \| = 1$ pour k assez grand.

I, J étant deux intervalles dyadiques, si $\mu(I) \leqq \mu(J)$ alors $\| Y^k_I \| \leqq \| Y^k_J \|$ pour k assez grand.

En effet, si $I = [a, b[$, on prend $c = a + \mu(J) \geqq b$, et on a $\| Y^k_J \| = \| Y^k_{[a,c[} \|$ pour k assez grand; mais $Y^k_{[a,c[} = Y^k_I + Y^k_{[b,c[}$ et, comme Y^k_I et $Y^k_{[b,c[}$ sont étrangers, on a $\| Y^k_{[a,c[} \| \geqq \| Y^k_I \|$. Si $\mu(I)$ est un entier, on a $\| Y^k_I \| \leqq \mu(I)$ (décomposer I comme réunion de $\mu(I)$ intervalles consécutifs de longueur 1). Il en résulte que, quel que soit l'intervalle dyadique I, on a $\| Y^k_I \| \leqq [\mu(I)] + 1 \leqq \mu(I) + 1$, pour k assez grand.

Soit $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$. Dans $L' = L^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$, on peut donc définir, pour chaque intervalle dyadique I:

$$U_I = (Y^k_I)_{k \in \mathbf{N}} , \text{ et on a } \| U_I \| \leqq \mu(I) + 1 .$$

Notons que $\| U_{[0,1[} \| = 1$; si $\mu(I) \leqq \mu(J)$, on a $\| U_I \| \leqq \| U_J \|$; si I, J sont deux intervalles dyadiques disjoints, U_I et U_J sont étrangers (car Y^k_I et Y^k_J le sont); si $a < b < c$, alors $U_{[a,b[} + U_{[b,c[} = U_{[a,c[}$.

LEMME II.4. *Soient $I_0 \leqq I_1 \leqq \cdots \leqq I_l \leqq J_0 \leqq \cdots \leqq J_m$ et I, J des intervalles dyadiques, $I_l \leqq I \leqq J_0$ et $I_l \leqq J \leqq J_0$, avec $\mu(J) = 2\,\mu(I)$. Alors les deux $(l + m + 1)$-uplets $(U_{I_0}, \cdots, U_{I_l}, U_I, U_{J_0}, \cdots, U_{J_m})$ et $(U_{I_0}, \cdots, U_{I_l}, \theta U_J, U_{J_0}, \cdots, U_{J_m})$ ont le même type.*

On a

$$Y^k_I = \frac{1}{N(k)} \sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} \theta^n X^n_I ;$$

posons

$$V_k = \frac{1}{N(k)} \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} \theta^n X^n_I .$$

Pour n assez grand, on a

$$\| X_I^n \| \leqq (\mu(I) + 1) \| X_{[0,1[}^n \| .$$

Donc, pour k assez grand, on a

$$\| Y_I^k - V_k \| = \frac{1}{N(k)} \| \theta^{n_k} X_I^{n_k} - \theta^{n_k+1} X_I^{n_k+1} \|$$
$$\leqq \frac{\mu(I) + 1}{N(k)} \left(\theta^{n_k} \| X_{[0,1[}^{n_k} \| + \theta^{n_k+1} \| X_{[0,1[}^{n_k+1} \|\right) .$$

Or, d'après le Lemme II.2, cette quantité tend vers 0 quand $k \to \infty$. Il en résulte que $\| Y_I^k - V_k \| \to 0$ quand $k \to \infty$, d'où on déduit que $U_I = (V_k)_{k \in \mathbf{N}}$. Par suite, d'après la Proposition I.1, on aura le résultat cherché si on montre que, pour k assez grand, les deux $(l + m + 1)$-uplets

$$(Y_{I_0}^k, \cdots, Y_{I_l}^k, V_k, Y_{J_0}^k, \cdots, Y_{J_m}^k) \quad \text{et} \quad (Y_{I_0}^k, \cdots, Y_{J_l}^k, \theta Y_J^k, Y_{J_0}^k, \cdots, Y_{J_m}^k)$$

ont le même type. D'après le Lemme II.3 il suffit pour cela de prouver que V_k et θY_J^k sont semblables. Or on a:

$$V_k = \frac{1}{N(k)} \sum\nolimits_{n_k}^{n_{k+1}-1} \theta^{n+1} X_I^{n+1} = \frac{1}{N(k)} \sum\nolimits_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \theta^{n+1} \sum\nolimits_{r \in \Delta_{n+1} \cap I} X_{(r, n+1)}$$

et

$$\theta Y_J^k = \frac{1}{N(k)} \sum\nolimits_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \theta^{n+1} \sum\nolimits_{r \in \Delta_n \cap J} X_{(r,n)} .$$

Pour k assez grand, les extrémités de I, J sont dans Δ_{n_k}, donc dans Δ_n pour tout $n \geqq n_k$. Soient a, b les origines respectives des intervalles I, J. Comme $\mu(J) = 2\,\mu(I)$, on voit que, pour $n \geqq n_k$: $r \in \Delta_n \cap J \Leftrightarrow \tau(r) \in \Delta_{n+1} \cap I$, où $\tau: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est définie par $\tau(x) = a + (1/2)(x - b)$. Par suite:

$$V_k = \frac{1}{N(k)} \sum\nolimits_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \theta^{n+1} \sum\nolimits_{r \in \Delta_n \cap J} X_{(\tau(r), n+1)} .$$

Cette expression montre bien que V_k est semblable à θY_J^k, puisque l'application $(r, n) \to (\tau(r), n + 1)$ de $\mathbf{Q} \times \mathbf{N}$ dans lui-même est injective et conserve l'ordre. C.Q.F.D.

LEMME II.5. *Soient $I_0 \leqq \cdots \leqq I_m$, $J_0 \leqq \cdots \leqq J_m$ des intervalles dyadiques avec $\mu(I_0) = \mu(J_0)$, $\cdots$, $\mu(I_m) = \mu(J_m)$. Alors les deux m-uplets $(U_{I_0}, \cdots, U_{I_m})$ et $(U_{J_0}, \cdots, U_{J_m})$ ont le même type.*

Supposons d'abord $I_m \leqq J_0$; il suffit de montrer que, pour tout k assez grand, les deux m-uplets $(Y_{I_0}^k, \cdots, Y_{I_m}^k)$ et $(Y_{J_0}^k, \cdots, Y_{J_m}^k)$ ont le même type. On prend k assez grand pour que les extrémités de $I_0, \cdots, I_m, J_0, \cdots, J_m$ se trouvent toutes dans Δ_{n_k} (donc dans Δ_n pour $n \geqq n_k$). Alors $Y_{I_j}^k$ et $Y_{J_j}^k$ sont semblables $(0 \leqq j \leqq m)$. En appliquant le Lemme II.3 on voit successivement que les m-uplets

$$(Y^k_{I_0}, \cdots, Y^k_{I_{j-1}}, Y^k_{I_j}, Y^k_{J_{j+1}}, \cdots, Y^k_{J_m}) \text{ et } (Y^k_{I_0}, \cdots, Y^k_{I_{j-1}}, Y^k_{J_j}, Y^k_{J_{j+1}}, \cdots, Y^k_{J_m})$$

sont semblables. Donc finalement que $(Y^k_{I_0}, \cdots, Y^k_{I_m})$ et $(Y^k_{J_0}, \cdots, Y^k_{J_m})$ sont semblables. Dans le cas général, on choisit des intervalles dyadiques

$$I'_0 \leqq \cdots \leqq I'_m, \text{ avec } I'_m \leqq I_0 \text{ et } I'_m \leqq J_0,\ \mu(I'_0) = \mu(I_0), \cdots, \mu(I'_m) = \mu(I_m)\,.$$

D'après ce qu'on vient de montrer, $(U_{I_0}, \cdots, U_{I_m})$ et $(U_{J_0}, \cdots, U_{J_m})$ ont le même type que $(U_{I'_0}, \cdots, U_{I'_m})$. C.Q.F.D.

LEMME II.6. *Soient* $I_0 \leqq \cdots \leqq I_l \leqq J_0 \leqq \cdots \leqq J_m$ *et* I, J *des intervalles dyadiques,* $I_l \leqq I \leqq J_0$ *et* $I_l \leqq J \leqq J_0$, *avec* $\mu(J) = 2^i \mu(I)$ $(i \in \mathbf{Z})$. *Alors les deux* $(l + m + 1)$*-uplets*

$$(U_{I_0}, \cdots, U_{I_l}, U_I, U_{J_0}, \cdots, U_{J_m}) \quad et \quad (U_{I_0}, \cdots, U_{I_l}, \theta^i U_J, U_{J_0}, \cdots, U_{J_m})$$

ont le même type.

En échangeant au besoin les rôles de I et J on peut supposer que $i \geqq 0$. Si $i = 0$, on a le résultat par le Lemme II.5. Si $i > 0$, il suffit de considérer des intervalles dyadiques $I^{(0)} = I, I^{(1)}, I^{(2)}, \cdots, I^{(i)} = J$, avec $I_l \leqq I^{(j)} \leqq J_0$ et $\mu(I^{(j+1)}) = 2\,\mu(I^{(j)})$ $(0 \leqq j \leqq i - 1)$. Le Lemme II.4 montre alors que

$$(U_{I_0}, \cdots, U_{I_l}, \theta^j U_{I^{(j)}}, U_{J_0}, \cdots, U_{J_m}) \text{ et}$$
$$(U_{I_0}, \cdots, U_{I_l}, \theta^{j+1} U_{I^{(j+1)}}, U_{J_0}, \cdots, U_{J_m})$$

ont le même type. On a ainsi (i + 1) m-uplets qui ont tous le même type et on a le résultat en considérant le premier et le dernier. C.Q.F.D.

Comme on a $1/2 \leqq \theta \leqq 2^{-1/p}$, on peut poser $\theta = 2^{-1/q}$ avec $1 \leqq q \leqq p$. On a alors le

LEMME II.7. *Soient* $J_0 \leqq \cdots \leqq J_k$ *des intervalles dyadiques. Alors*

$$2^{-2/q}(|\lambda_0|^q \mu(J_0) + \cdots + |\lambda_k|^q \mu(J_k))^{1/q} \leqq \|\lambda_0 U_{J_0} + \cdots + \lambda_k U_{J_k}\|$$
$$\leqq 2^{2/q}(|\lambda_0|^q \mu(J_0) + \cdots + |\lambda_k|^q \mu(J_k))^{1/q}$$

pour $\lambda_0, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{R}$.

On peut supposer $\lambda_0, \cdots, \lambda_k > 0$, puisque $U_{J_0}, \cdots, U_{J_k}$ sont deux à deux étrangers. On choisit $i_0, \cdots, i_k \in \mathbf{Z}$ de façon que $\theta^{i_0+1} \leqq \lambda_0 \leqq \theta^{i_0}, \cdots, \theta^{i_k+1} \leqq \lambda_k \leqq \theta^{i_k}$. On a donc (puisque $\theta = 2^{-1/q}$),

$$2^{-1/q}\|\theta^{i_0} U_{J_0} + \cdots + \theta^{i_k} U_{J_k}\| \leqq \|\lambda_0 U_{J_0} + \cdots + \lambda_k U_{J_k}\|$$
$$\leqq \|\theta^{i_0} U_{J_0} + \cdots + \theta^{i_k} U_{J_k}\|\,.$$

On définit des intervalles dyadiques $J'_0 \leqq I_0 \leqq J'_1 \leqq I_1 \leqq \cdots \leqq J'_k \leqq I_k$ avec

$$\mu(J_0) = \mu(J'_0) = 2^{i_0}\mu(I_0), \cdots, \mu(J_k) = \mu(J'_k) = 2^{i_k}\mu(I_k)\,.$$

D'après le Lemme II.5 on a

$$\| \theta^{i_0} U_{J_0} + \cdots + \theta^{i_k} U_{J_k} \| = \| \theta^{i_0} U_{J'_0} + \cdots + \theta^{i_k} U_{J'_k} \| .$$

En appliquant successivement le Lemme II.6 aux couples (I_0, J'_0), puis (I_1, J'_1), $\cdots$, puis (I_k, J'_k) on voit finalement que les deux k-uplets $(\theta^{i_0} U_{J'_0}, \cdots, \theta^{i_k} U_{J'_k})$ et $(U_{I_0}, \cdots, U_{I_k})$ ont le même type. On a donc

$$\| \theta^{i_0} U_{J_0} + \cdots + \theta^{i_k} U_{J_k} \| = \| U_{I_0} + \cdots + U_{I_k} \| .$$

Posons $a_j = \mu(I_0) + \mu(I_1) + \cdots + \mu(I_j)$ pour $0 \leqq j \leqq k$.

D'après le Lemme II.5 les deux $(k+1)$-uplets

$$(U_{I_0}, \cdots, U_{I_k}) \quad \text{et} \quad (U_{[0,a_0[}, U_{[a_0,a_1[}, \cdots, U_{[a_{k-1},a_k[})$$

ont le même type. On a donc

$$\| U_{I_0} + \cdots + U_{I_k} \| = \| U_{[0,a_0[} + U_{[a_0,a_1[} + \cdots + U_{[a_{k-1},a_k[} \| = \| U_{[0,a_k[} \| .$$

On a donc montré l'inégalité:

$$2^{-1/q} \| U_{[0,a_k[} \| \leqq \| \lambda_0 U_{J_0} + \cdots + \lambda_k U_{J_k} \| \leqq \| U_{[0,a_k[} \| .$$

Or on a

$$a_k = \mu(I_0) + \cdots + \mu(I_k) = 2^{-i_0}\mu(J_0) + \cdots + 2^{-i_k}\mu(J_k) .$$

Mais, par définition des i_j on a $2^{-(i_j+1)/q} \leqq \lambda_j \leqq 2^{-i_j/q}$ $(0 \leqq j \leqq k)$. Par suite

$$(*) \qquad \lambda_0^q \mu(J_0) + \cdots + \lambda_k^q \mu(J_k) \leqq a_k \leqq 2\big(\lambda_0^q \mu(J_0) + \cdots + \lambda_k^q \mu(J_k)\big) .$$

On choisit $l \in \mathbf{Z}$ de façon que $2^l \leqq a_k \leqq 2^{l+1}$. Soient I, I' deux intervalles dyadiques de longueurs respectives 2^l, 2^{l+1}. On a donc $\| U_I \| \leqq \| U_{[0,a_k[} \| \leqq \| U_{I'} \|$. Or, d'après le Lemme II.6, $2^{-l/q} U_I$ et $U_{[0,1[}$ ont le même type, ainsi que $2^{-(l+1)/q}\, U_{I'}$ et $U_{[0,1[}$. Donc

$$\| U_I \| = 2^{l/q} \| U_{[0,1[} \| = 2^{l/q} \text{ et } \| U_{I'} \| = 2^{(l+1)/q}$$

et par suite $2^{l/q} \leqq \| U_{[0,a_k[} \| \leqq 2^{(l+1)/q}$. On a donc montré l'inégalité

$$2^{(l-1)/q} \leqq \| \lambda_0 U_{J_0} + \cdots + \lambda_k U_{J_k} \| \leqq 2^{(l+1)/q} .$$

Or d'après $(*)$ et $2^l \leqq a_k \leqq 2^{l+1}$, on a:

$$\begin{aligned} &2^{-2/q}\big(\lambda_0^q \mu(J_0) + \cdots + \lambda_k^q \mu(J_k)\big)^{1/q} \\ &\quad \leqq 2^{-2/q} a_k^{\,1/q} \leqq 2^{(l-1)/q} \leqq \| \lambda_0 U_{J_0} + \cdots + \lambda_k U_{J_k} \| \\ &\quad \leqq 2^{(l+1)/q} \leqq 2^{1/q} a_k^{\,1/q} \leqq 2^{2/q}\big(\lambda_0^q \mu(J_0) + \cdots + \lambda_k^q \mu(J_k)\big)^{1/q} . \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

D'après le Lemme II.7 on a dans $L' = L^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ une suite d'éléments étrangers: $U_{[0,1[}$, $U_{[1,2[}$, $\cdots$, $U_{[n,n+1[}$, $\cdots$ qui forment une suite équivalente à la base canonique de l^q. D'après la Proposition I.4, on voit que l^q est K-finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, avec $K = 2^{2/q}$; le

Théorème II.2 est donc démontré.

III

Dans cette partie nous démontrons le

THÉORÈME III. 1. *Soit L un espace de Banach réticulé isomorphe à l^p (p réel $\geqq 1$). Alors l^p est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés.*

Ce théorème donne immédiatement le Théorème 0.1: en effet, on a vu qu'il suffit de prouver le Théorème 0.1. dans le cas où L est un espace réticulé; d'après le Théorème II.2 on peut supposer de plus que l^q est K-finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, pour un réel $q \geqq 1$; autrement dit, d'après la Proposition I.4, il existe, dans une ultrapuissance $\hat{L}$ de L un sous-espace réticulé L' qui est K-isomorphe à l^q. Le Théorème III.1 montre alors que l^q est finiment représentable au sens des espaces réticulés dans L', donc dans $\hat{L}$ et par suite dans L (Proposition I.3).

Soient donc L un espace de Banach réticulé, K-isomorphe à l^p, et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la base de L formée d'éléments deux à deux étrangers de norme 1. On a donc

$$K^{-1}(|\lambda_0|^p + \cdots + |\lambda_n|^p)^{1/p} \leqq \|\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_n x_n\| \leqq K(|\lambda_0|^p + \cdots + |\lambda_n|^p)^{1/p} ,$$

$\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.

Par suite, si $y_0, \cdots, y_n \in L$ sont deux à deux étrangers, on a

$$M^{-1}(|\lambda_0|^p \|y_0\|^p + \cdots + |\lambda_n|^p \|y_n\|^p)^{1/p} \leqq \|\lambda_0 y_0 + \cdots + \lambda_n y_n\| \leqq M(|\lambda_0|^p \|y_0\|^p + \cdots + |\lambda_n|^p \|y_n\|^p)^{1/p} ,$$

avec $M = K^2$.

On désigne encore par D l'ensemble $\mathbf{Q} \times \mathbf{N}$ muni de l'ordre lexicographique

$$\big((r, n) \leqq (r', n') \Longleftrightarrow r < r' \text{ ou } r = r' \text{ et } n \leqq n'\big) ;$$

en appliquant le Théorème I.3 on obtient, dans un espace de Banach réticulé F, une famille écartable $(X_i)_{i \in D}$ d'éléments deux à deux étrangers de norme 1. Du fait que F est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés, on déduit immédiatement:

$$M^{-1}(|\lambda_0|^p + \cdots + |\lambda_n|^p)^{1/p} \leqq \|\lambda_0 X_{i_0} + \cdots + \lambda_n X_{i_n}\| \leqq M(|\lambda_0|^p + \cdots + |\lambda_n|^p)^{1/p}$$

pour $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ et $i_0, \cdots, i_n \in D$ distincts.

On définit comme précédemment (voir démonstration du Théorème II.2) les expressions "x est antérieur à y", "x est postérieur à y", "x est semblable à y" pour $x, y \in F$; le Lemme II.3 restant évidemment valable.

On rappelle que nous appelons "intervalle" un intervalle de $\mathbf{R}$ semi ouvert à droite et non vide. On définit comme précédemment les expressions "$I < J$", "$I \leqq J$" pour deux intervalles I, J.

Fixons un entier $\nu > 1$ et un réel δ, $0 < \delta < 1$. *Alors il existe deux suites croissantes* K_n, N_n *d'entiers* > 0, *tendant vers* $+\infty$, *telles que* $\nu^{K_n}(\nu/(\nu+1))^{N_n} \to \delta$ *quand* $n \to \infty$.

En effet, a étant un réel $\geqq 0$, désignons par $[a]$ sa partie entière et par $\{a\}$ sa partie fractionnaire $(\{a\} = a - [a])$. Posons $\theta = L(\nu+1)/L\nu - 1$. Alors θ est irrationnel (sinon $L(\nu+1)/L\nu = m/n$, $m, n > 0$, donc $(\nu+1)^n = \nu^m$ ce qui est impossible puisque ν et $\nu+1$ sont premiers entre eux); donc lorsque N décrit $\mathbf{N}$, $\{N\theta\}$ décrit une partie dense de l'intervalle $[0, 1[$. On peut donc trouver une suite d'entiers N_n strictement croissante telle que $\{N_n\theta\} \to \{-L\delta/L\nu\}$ quand $n \to \infty$. On pose alors $K_n = [N_n\theta] - [-L\delta/L\nu]$; K_n est donc une suite croissante tendant vers $+\infty$. On a

$$N_n\theta - K_n = \{N_n\theta\} + [-L\delta/L\nu] \longrightarrow -L\delta/L\nu \text{ quand } n \longrightarrow \infty .$$

Donc $\nu^{K_n - N_n\theta} \to \delta$ ce qui est le résultat cherché. C.Q.F.D.

Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on définit $S_n \subset \mathbf{Q}$ en posant $S_n = \{k(\nu/(\nu+1))^n;\ k \in \mathbf{Z}\}$. Pour chaque intervalle I de $\mathbf{R}$ (semi-ouvert à droite), on définit dans F:

$$X_I^n(\delta, \nu) = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{n/p} \sum_{r \in S_n \cap I} X_{(r,n)} \quad \text{et} \quad Y_I^n(\delta, \nu) = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n - 1} X_I^{N_n + i} .$$

$\mathfrak{D}$ étant un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$, on définit $Y_I(\delta, \nu)$, dans l'espace $F' = F^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ en posant $Y_I(\delta, \nu) = (Y_I^n(\delta, \nu))_{n \in \mathbf{N}}$ (le fait que cette définition est légitime, c'est-à-dire que $Y_I^n(\delta, \nu)$ est une suite bornée résulte du Lemme III.1 ci-dessous).

Les valeurs de δ et ν restant fixées pour le moment, nous écrirons pour abréger X_I^n, Y_I^n et Y_I au lieu de $X_I^n(\delta, \nu)$, $Y_I^n(\delta, \nu)$, $Y_I(\delta, \nu)$ respectivement.

Notons que, si $a < b < c$ sont des réels, on a évidemment

$$X_{[a,b[}^n + X_{[b,c[}^n = X_{[a,c[}^n \text{ donc } Y_{[a,b[}^n + Y_{[b,c[}^n = Y_{[a,c[}^n ,$$

et par suite $Y_{[a,b[} + Y_{[b,c[} = Y_{[a,c[}$.

Quels que soient les intervalles I, J, X_I^m et X_J^n sont étrangers si $m \neq n$; si $I \leqq J$, X_I^m précède X_J^n quels que soient $m, n \in \mathbf{N}$.

La famille $(X_i)_{i \in D} = (X_{(r,n)})_{\substack{r \in \mathbf{Q} \\ n \in \mathbf{N}}}$ d'éléments de F est équivalente (avec la constante M) à la base canonique $e_{(r,n)}$ de $l^p(\mathbf{Q} \times \mathbf{N})$. On note $\varphi \to X_\varphi$ l'application linéaire de l^p $(\mathbf{Q} \times \mathbf{N})$ dans F qui envoie $e_{(r,n)}$ sur $X_{(r,n)}$; on a donc $M^{-1} \| \varphi \|_p \leqq \| X_\varphi \| \leqq M \| \varphi \|_p$.

LEMME III.1.

$$M^{-p}\left[\mu(I) - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n\right] \leqq \| X_I^n \|^p \leqq M^p\left[\mu(I) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n\right];$$

$$M^{-p}\left[\mu(I) - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right] \leqq \| Y_I^n \|^p \leqq M^p\left[\mu(I) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right];$$

$$M^{-p}\mu(I) \leqq \| Y_I \|^p \leqq M^p \mu(I) .$$

On définit dans l^p ($\mathbf{Q} \times \mathbf{N}$):

$$\varphi_I^n = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{n/p} \sum_{r \in S_n \cap I} e_{(r,n)} \quad \text{et} \quad \psi_I^n = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n - 1} \varphi_I^{N_n + i} .$$

On a donc $X_I^n = X_{\varphi_I^n}$, $Y_I^n = X_{\psi_I^n}$ et d'après les propriétés de l'application $\varphi \to X_\varphi$ de l^p ($\mathbf{Q} \times \mathbf{N}$) dans F il suffit de montrer que

$$(*) \qquad \mu(I) - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n \leqq \| \varphi_I^n \|_p^p \leqq \mu(I) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n$$

et que

$$(**) \qquad \mu(I) - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n} \leqq \| \psi_I^n \|_p^p \leqq \mu(I) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n} .$$

Comme S_n est une subdivision de $\mathbf{R}$ de pas $(\nu/(\nu+1))^n$ on a (card A désignant le cardinal de l'ensemble fini A):

$$[\text{card}\,(S_n \cap I) - 1]\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n \leqq \mu(I) \leqq [\text{card}\,(S_n \cap I) + 1]\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n .$$

D'autre part, on a $\| \varphi_I^n \|_p^p = (\nu/(\nu+1))^n$ card $(S_n \cap I)$, d'où l'inégalité (*).

Quand n décrit $\mathbf{N}$, les φ_I^n sont deux à deux étrangers dans $l^p(\mathbf{Q} \times \mathbf{N})$. Il en résulte que

$$\| \psi_I^n \|_p^p = K_n^{-1} \sum_{i=0}^{K_n - 1} \| \varphi_I^{N_n + i} \|_p^p .$$

Comme on a

$$\left| \| \varphi_I^{N_n + i} \|_p^p - \mu(I) \right| \leqq \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n + i} \leqq \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n} ,$$

pour $0 \leqq i \leqq K_n - 1$, on en déduit $\left| \| \psi_I^n \|_p^p - \mu(I) \right| \leqq (\nu/(\nu+1))^{N_n}$.

C.Q.F.D.

Nous dirons que I est un δ-intervalle si l'origine de I est un réel $a = r\delta$ pour un $r \in \mathbf{Z}$. Posons alors $\alpha_n = r\, \nu^{K_n}(\nu/(\nu+1))^{N_n}$; quand $n \to \infty$, $\alpha_n \to a$. Désignons par $I^{(n)}$ l'intervalle d'origine α_n de même longueur que I.

LEMME III.2. *Si I est un δ-intervalle* $\| Y^n_{I^{(n)}} - Y^n_I \| \to 0$ quand $n \to \infty$. *Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, l'origine de $I^{(n)}$ appartient à $S_{N_n}, S_{N_n+1}, \cdots, S_{N_n+K_n}$.*

La deuxième partie du lemme exprime simplement le fait que $\alpha_n = r\nu^{K_n}(\nu/(\nu+1))^{N_n}$ est un multiple entier de $(\nu/(\nu+1))^{N_n+i}$ pour $i = 0, 1, \cdots, K_n$. On a

$I = [a, b[, \; I^{(n)} = [\alpha_n, \beta_n[$ avec $\beta_n = \alpha_n + b - a$ et $\alpha_n \longrightarrow a$ quand $n \longrightarrow \infty$. Donc $Y^n_{I^{(n)}} - Y^n_I = Y^n_{J_1{}^n} - Y^n_{J_2{}^n}$ où $\mu(J^n_1) = \mu(J^n_2) = |a - \alpha_n|$. D'après le Lemme III.1, on a

$$\| Y^n_{J_1{}^n} \|^p \leqq M^p\left[\mu(J^n_1) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right] = M^p\left[|a - \alpha_n| + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right],$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$, puisque $a - \alpha_n \to 0$; de même $\| Y^n_{J_2{}^n} \| \to 0$.

C.Q.F.D.

LEMME III.3. *Soient $I_1 \leqq \cdots \leqq I_k < J_1 \leqq \cdots \leqq J_l$ des intervalles de $\mathbf{R}$, et I, J deux δ-intervalles tels que $I_k < I < J_1$, $I_k < J < J_1$ et $\mu(J) = (\nu/(\nu+1))\mu(I)$. Alors les deux $(k+l+1)$-uplets $(Y_{I_1}, \cdots, Y_{I_k}, Y_I, Y_{J_1}, \cdots, Y_{J_l})$ et $(Y_{I_1}, \cdots, Y_{I_k}, ((\nu+1)/\nu)^{1/p}\, Y_J, Y_{J_1}, \cdots, Y_{J_l})$ ont le même type.*

On considère $n \in \mathbf{N}$ assez grand pour que $I_k < I^{(n)} < J_1$ et $I_k < J^{(n)} < J_1$. Comme $\mu(I^{(n)}) = \mu(I)$ et $\mu(J^{(n)}) = \mu(J)$ on a $\mu(J^{(n)}) = (\nu/(\nu+1))\mu(I^{(n)})$. Posons $Z_n = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n-1} X^{N_n+i+1}_{J^{(n)}}$. On a donc

$$Z_n - Y^n_{J^{(n)}} = K_n^{-1/p}\,[X^{N_n+K_n}_{J^{(n)}} - X^{N_n}_{J^{(n)}}] .$$

D'après le Lemme III.1, on a

$$\| X^{N_n+K_n}_{J^{(n)}} \|^p \leqq M^p \mu(J^{(n)}) + M^p\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n+K_n} \leqq M^p(\mu(J) + 1) ;$$

de même $\| X^{N_n}_{J^{(n)}} \|^p \leqq M^p\,(\mu(J) + 1)$. Comme $K_n \to +\infty$, on voit que $\| Z_n - Y^n_{J^{(n)}} \| \to 0$ quand $n \to \infty$. D'après le Lemme III.2 $\| Z_n - Y^n_J \| \to 0$ et donc $Y_J = (Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$. D'autre part (Lemme III.2) on a $Y_I = (Y^n_{I^{(n)}})_{n \in \mathbf{N}}$. Il suffit donc de prouver que, pour tout n assez grand les deux $(k+l+1)$-uplets

$$(Y^n_{I_1}, \cdots, Y^n_{I_k}, Y^n_{I^{(n)}}, Y^n_{J_1}, \cdots, Y^n_{J_l}) \text{ et}$$
$$\left(Y^n_{I_1}, \cdots, Y^n_{I_k}, \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{1/p} Z_n, Y^n_{J_1}, \cdots, Y^n_{J_l}\right)$$

ont le même type.

D'après le Lemme II.3, il suffit de montrer que $Y^n_{I^{(n)}}$ et $((\nu+1)/\nu)^{1/p} Z_n$ sont semblables. Or on a:

$$Y^n_{I^{(n)}} = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n-1}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{(N_n+i)/p} \sum_{r \in I^{(n)} \cap S_{N_n+i}} X_{(r, N_n+i)}$$

et

$$\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{1/p} Z_n = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n-1} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{(N_n+i)/p} \sum_{r \in J^{(n)} \cap S_{N_n+i+1}} X_{(r, N_n+i+1)} .$$

Soient α_n, β_n les origines respectives de $I^{(n)}$, $J^{(n)}$ qui, d'après le Lemme III.2 appartiennent à S_{N_n+i} pour $i = 0, 1, \cdots, K_n$. Comme $\mu(J^{(n)}) = (\nu/(\nu+1))\mu(I^{(n)})$, il en résulte qu'on a $r \in I^{(n)} \cap S_{N_n+i}$ si et seulement si $\tau(r) \in J^{(n)} \cap S_{N_n+i+1}$ où $\tau(r) = \beta_n + (\nu/(\nu+1))(r - \alpha_n)$. On a donc

$$\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{1/p} Z_n = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n-1} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{(N_n+i)/p} \sum_{r \in I^{(n)} \cap S_{N_n+i}} X_{(\tau(r), N_n+i+1)} .$$

En comparant cette égalité avec l'expression de $Y^n_{I(n)}$ écrite plus haut, et en remarquant que la fonction $\tau\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ respecte la relation d'ordre, on voit que $Y^n_{I(n)}$ et $((\nu+1)/\nu)^{1/p} Z_n$ sont semblables. C.Q.F.D.

Nous revenons maintenant à la notation $Y_I(\delta, \nu)$ au lieu de Y_I, parce que nous nous proposons de faire varier δ $(0 < \delta < 1)$ et $\nu \in \mathbf{N}$.

Soit δ_n une suite tendant vers 0, $0 < \delta_n < 1$; pour fixer les idées on prendra $\delta_n = 2^{-n}$; un δ_n-intervalle est donc un intervalle dont l'origine est un rationnel de dénominateur 2^n.

Dans l'espace $F'' = (F')^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$, on définit ($I$ étant un intervalle de $\mathbf{R}$):

$$Z_I(\nu) = \left(Y_I(\delta_n, \nu)\right)_{n \in \mathbf{N}} .$$

On a donc $M^{-p}\mu(I) \leqq \| Z_I(\nu) \|^p \leqq M^p \mu(I)$; si I, J sont des intervalles disjoints, $Z_I(\nu)$ et $Z_J(\nu)$ sont étrangers (en effet, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, $Y_I(\delta_n, \nu)$ et $Y_J(\delta_n, \nu)$ sont étrangers).

De plus, si $a < b < c$, a, b, c étant des réels, on a

$$Z_{[a,b[}(\nu) + Z_{[b,c[}(\nu) = Z_{[a,c[}(\nu) \ \Big(\text{puisque, pour tout } n \in \mathbf{N}\ ,$$
$$Y_{[a,b[}(\delta_n, \nu) + Y_{[b,c[}(\delta_n, \nu) = Y_{[a,c[}(\delta_n, \nu)\Big) .$$

LEMME III.4. *Soient $I_1 \leqq \cdots \leqq I_k < J_1 \leqq \cdots \leqq J_l$ des intervalles de $\mathbf{R}$, et I, J deux intervalles tels que $I_k \leqq I \leqq J_1$, $I_k \leqq J \leqq J_1$ et $\mu(J) = (\nu/(\nu+1))\mu(I)$. Alors les deux $(k+l+1)$-uplets*

$$\left(Z_{I_1}(\nu), \cdots, Z_{I_k}(\nu), Z_I(\nu), Z_{J_1}(\nu), \cdots, Z_{J_l}(\nu)\right) \text{ et}$$
$$\left(Z_{I_1}(\nu), \cdots, Z_{I_k}(\nu), ((\nu+1)/\nu)^{1/p} Z_J(\nu), Z_{J_1}(\nu), \cdots, Z_{J_l}(\nu)\right)$$

ont le même type.

On a $I = [a, b[$, $J = [c, d[$ avec $b - a = ((\nu+1)/\nu)(d-c)$. On définit $I_{(n)} = [a_n, b_n[$, $J_{(n)} = [c_n, d_n[$ de façon que $a < a_n < b_n < b$, $c < c_n < d_n < d$, $b_n - a_n = ((\nu+1)/\nu)(d_n - c_n)$, a_n et c_n étant des rationnels de dénominateur 2^n, $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$, $d_n \to d$ quand $n \to \infty$. Il en résulte que $I_{(n)}, J_{(n)}$ sont des δ_n-intervalles,

$$I_k < I_{(n)} < J_1,\ I_k < J_{(n)} < J_1 \ \text{ et } \ \mu(J_{(n)}) = \frac{\nu}{\nu+1}\mu(I_{(n)}) .$$

D'après le Lemme III.3, les deux $(k+l+1)$-uplets

$$\big(Y_{I_1}(\delta_n, \nu), \cdots, Y_{I_k}(\delta_n, \nu) Y_{I_{(n)}}(\delta_n, \nu), Y_{J_1}(\delta_n, \nu), \cdots, Y_{J_l}(\delta_n, \nu)\big)$$

et

$$\left(Y_{I_1}(\delta_n, \nu), \cdots, Y_{I_k}(\delta_n, \nu), \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{1/p} Y_{J_{(n)}}(\delta_n, \nu), Y_{J_1}(\delta_n, \nu), \cdots, Y_{J_l}(\delta_n, \nu)\right)$$

ont le même type. On aura donc le résultat cherché en faisant tendre n vers l'infini suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$, si l'on montre que

$$Z_I(\nu) = \big(Y_{I_{(n)}}(\delta_n, \nu)\big)_{n\in\mathbf{N}} \ \text{ et } \ Z_J(\nu) = \big(Y_{J_{(n)}}(\delta_n, \nu)\big)_{n\in\mathbf{N}} .$$

Or on a

$$Y_I(\delta_n, \nu) - Y_{I_{(n)}}(\delta_n, \nu) = Y_{[a,a_n[}(\delta_n, \nu) + Y_{[b_n,b[}(\delta_n, \nu) .$$

Donc

$$\begin{aligned} \| Y_I(\delta_n, \nu) - Y_{I_{(n)}}(\delta_n, \nu) \| &\leqq \| Y_{[a,a_n[}(\delta_n, \nu) \| + \| Y_{[b_n,b[}(\delta_n, \nu) \| \\ &\leqq M(a_n - a)^{1/p} + M(b - b_n)^{1/p} \end{aligned}$$

(Lemme III.1), quantité qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. On a donc

$$Z_I(\nu) = \big(Y_I(\delta_n, \nu)\big)_{n\in\mathbf{N}} = \big(Y_{I_{(n)}}(\delta_n, \nu)\big)_{n\in\mathbf{N}} ;$$

de même pour $Z_J(\nu)$. C.Q.F.D.

Dans l'espace $F''' = (F'')^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ on définit (I étant un intervalle):

$$U_I = \big(Z_I(\nu)\big)_{\nu\in\mathbf{N}}$$

(en fait $Z_I(\nu)$ n'est définc que pour $\nu \geqq 2$; poser par exemple $Z_I(\nu) = 0$ pour $\nu = 0, 1$).

On a donc $M^{-p}\mu(I) \leqq \| U_I \|^p \leqq M^p \mu(I)$; si I, J sont des intervalles disjoints, U_I et U_J sont étrangers (puisque $Z_I(\nu)$ et $Z_J(\nu)$ sont étrangers pour tout $\nu \in \mathbf{N}$).

De plus, si $a < b < c$, a, b, c étant réels, on a $U_{[a,b[} + U_{[b,c[} = U_{[a,c[}$ (puisque, pour $\nu \geqq 2$, on a $Z_{[a,b[}(\nu) + Z_{[b,c[}(\nu) = Z_{[a,c[}(\nu)$).

LEMME III.5. *Soient $I_1 \leqq \cdots \leqq I_k < J_1 \leqq \cdots \leqq J_l$ des intervalles de $\mathbf{R}$, et I, J deux intervalles tels que $I_k \leqq I \leqq J_1$, $I_k \leqq J \leqq J_1$ et $\mu(J) = \sigma\mu(I)$ (σ réel > 0). Alors les deux $(k+l+1)$-uplets*

$$(U_{I_1}, \cdots, U_{I_k}, U_I, U_{J_1}, \cdots, U_{J_l}) \text{ et } (U_{I_1}, \cdots, U_{I_k}, \sigma^{-1/p} U_J, U_{J_1}, \cdots, U_{J_l})$$

ont le même type.

On peut supposer $0 < \sigma \leqq 1$ en échangeant au besoin les rôles des deux intervalles I, J. Pour chaque $\nu \geqq 2$ on définit l'entier $k_\nu \geqq 1$ tel que

$$\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{k_\nu - 1} \geqq \sigma > \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{k_\nu}.$$

Alors $(\nu/(\nu+1))^{k_\nu} \to \sigma$ quand $\nu \to \infty$ (puisque $\sigma(\nu/(\nu+1)) \leqq (\nu/(\nu+1))^{k_\nu} < \sigma$).

On a $J = [c, d[$, avec $d - c = \sigma\mu(I)$. On définit pour $\nu \geqq 2$ un intervalle $J_{(\nu)} = [c, d_\nu[$ avec $d_\nu - c = (\nu/(\nu+1))^{k_\nu}\mu(I)$. Donc $d_\nu < d$. On a donc $I_k \leqq J_{(\nu)} \leqq J_1$, et d'après le Lemme III.4 (appliqué k_ν fois) les deux $(k+l+1)$-uplets

$$\left(Z_{I_1}(\nu), \cdots, Z_{I_k}(\nu), Z_I(\nu), Z_{J_1}(\nu), \cdots, Z_{J_l}(\nu)\right)$$

et

$$\left(Z_{I_1}(\nu), \cdots, Z_{I_k}(\nu), \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{k_\nu/p} Z_{J_{(\nu)}}(\nu), Z_{J_1}(\nu), \cdots, Z_{J_l}(\nu)\right)$$

ont le même type. On obtiendra donc le résultat cherché en faisant tendre ν vers l'infini suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$, à condition de montrer que

$$\sigma^{-1/p} U_J = \left(\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{k_\nu/p} Z_{J_{(\nu)}}(\nu)\right)_{\nu \in \mathbf{N}}.$$

Comme $((\nu+1)/\nu)^{k_\nu/p} \to \sigma^{-1/p}$, il suffit de montrer que $U_J = (Z_{J_{(\nu)}}(\nu))_{\nu \in \mathbf{N}}$. Or on a

$$Z_J(\nu) - Z_{J_{(\nu)}}(\nu) = Z_{[d_\nu, d[}(\nu) \text{ donc } \| Z_J(\nu) - Z_{J_{(\nu)}}(\nu) \| \leqq M(d - d_\nu)^{1/p}$$

qui tend vers 0 quand $\nu \to \infty$. On a donc $U_J = (Z_J(\nu))_{\nu \in \mathbf{N}} = (Z_{J_{(\nu)}}(\nu))_{\nu \in \mathbf{N}}$.

C.Q.F.D.

LEMME III.6. *Soient $I_1 \leqq I_2 \leqq \cdots \leqq I_k$; $J_1 \leqq J_2 \leqq \cdots \leqq J_k$ des intervalles de $\mathbf{R}$ avec $\mu(J_i) = \sigma_i \mu(I_i)$ $(i = 1, \cdots, k)$, $\sigma_i > 0$. Alors les deux k-uplets*

$$(U_{I_1}, \cdots, U_{I_k}) \quad et \quad (\sigma_1^{-1/p} U_{J_1}, \cdots, \sigma_k^{-1/p} U_{J_k})$$

ont le même type.

Supposons d'abord $I_k \leqq J_1$. On a alors $I_{i-1} \leqq I_i \leqq J_{i+1}$, $I_{i-1} \leqq J_i \leqq J_{i+1}$, et donc, d'après le Lemme III.5 les deux k-uplets

$$(U_{I_1}, \cdots, U_{I_{i-1}}, U_{I_i}, \sigma_{i+1}{}^{-1/p} U_{J_{i+1}}, \cdots, \sigma_k^{-1/p} U_{J_k})$$

et

$$(U_{I_1}, \cdots, U_{I_{i-1}}, \sigma_i^{-1/p} U_{J_i}, \sigma_{i+1}^{-1/p} U_{J_{i+1}}, \cdots, \sigma_k^{-1/p} U_{J_k})$$

ont le même type ; ce qui donne le résultat cherché en appliquant ainsi k fois le Lemme III.5.

Dans le cas général, on prend des intervalles $I'_1 \leqq \cdots \leqq I'_k$ de mêmes longueurs respectives que $I_1, \cdots, I_k$ tels que $I'_k \leqq I_1$ et $I'_k \leqq J_1$. D'après ce qu'on vient de montrer, $(U_{I'_1}, \cdots, U_{I'_k})$ a d'une part le même type que $(U_{I_1}, \cdots, U_{I_k})$, d'autre part le même type que $(\sigma_1^{-1/p} U_{J_1}, \cdots, \sigma_k^{-1/p} U_{J_k})$.

C.Q.F.D.

Lemme III.7. *Soient $I_1, \cdots, I_k$ des intervalles de* **R** *deux à deux disjoints. Alors* $\|\lambda_1 U_{I_1} + \cdots + \lambda_k U_{I_k}\| = C(|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \cdots + |\lambda_k|^p \mu(I_k))^{1/p}$ *avec* $C = \|U_{[0,1[}\|$, *donc* $M^{-1} \leqq C \leqq M$.

Comme on a vu que $U_{I_1}, \cdots, U_{I_k}$ sont étrangers deux à deux, on peut supposer $\lambda_1, \cdots, \lambda_k > 0$. On suppose aussi $I_1 \leqq \cdots \leqq I_k$. On définit les réels $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ de façon que $a_i - a_{i-1} = \lambda_i^p \mu(I_i)$ pour $i = 1, \cdots, k$ et on pose $J_i = [a_{i-1}, a_i[$ $(1 \leqq i \leqq k)$. D'après le Lemme III.6, $(U_{J_1}, \cdots, U_{J_k})$ a le même type que $(\lambda_1 U_{I_1}, \cdots, \lambda_k U_{I_k})$ et par suite

$$\|\lambda_1 U_{I_1} + \cdots + \lambda_k U_{I_k}\| = \|U_{J_1} + \cdots + U_{J_k}\| .$$

Mais on a $U_{J_1} + \cdots + U_{J_k} = U_{[0,a_k[}$. D'après le Lemme III.6 $U_{[0,a_k[}$ et $a_k^{1/p} U_{[0,1[}$ ont le même type, c'est-à-dire la même norme. Finalement, on a

$$\begin{aligned}\|\lambda_1 U_{I_1} + \cdots + \lambda_k U_{I_k}\| &= a_k^{1/p} \|U_{[0,1[}\| \\ &= \|U_{[0,1[}\| (|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \cdots + |\lambda_k|^p \mu(I_k))^{1/p} . \qquad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

D'après le Lemme III.7 la suite $U_{[0,1[}, U_{[1,2[}, \cdots, U_{[n,n+1[}, \cdots$ d'éléments deux à deux étrangers de $F''' = (F'')^{\mathrm{N}}/\mathfrak{D}$ engendre un sous-espace de F''' isométrique à l^p. D'après la Proposition I.4 (avec $K = 1$) on voit que, au sens des espaces réticulés, l^p est finiment représentable dans F'', donc aussi dans F', puis dans F, d'après la Proposition I.3 (puisque $F'' = (F')^{\mathrm{N}}/\mathfrak{D}$ et $F' = F^{\mathrm{N}}/\mathfrak{D}$), et enfin dans L puisque F est finiment représentable dans L au sens des espaces réticulés ; ce qui termine la preuve du Théorème III.1.

Université Paris VII

References

[1] A. Brunel et L. Sucheston, On B-convex Banach spaces, Math. Systems Th. **7** n°4 (1973), 294–299.

[2] A. Dvoretzky, Some results on convex bodies and Banach spaces, Proc. Symp. on linear spaces, Jerusalem, 1961.

[3] D. Dacunha-Castelle et J. L. Krivine, Applications des ultraproduits à l'étude des espaces de Banach, Studia Math. **41** (1972), 315–334.

[4] J. Stern, Some applications of model theory in Banach space theory, Annals of Math. Logic **9** (1976), 49–121.

[5] G. Pisier, Séminaire Maurey-Schwartz, École Polytechnique, Paris, 1973–74, exposé n°7.

[6] B. Maurey. Séminaire Maurey-Schwartz, École Polytechnique, Paris, 1973–74, exposés n° 24–25.

[7] W. Luxemburg et A. Zaanen, *Riesz spaces*, North Holland Pub. Co., 1971.

[8] B. Maurey et G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach (à paraître).

[9] W. B. Johnson, On finite dimensional subspaces of Banach spaces with local inconditional structure, Studia Math. **51** (1974), 225–240.

(Received June 11, 1975)