JOURNAL D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ
SOUS LES AUSPICES DU
CONSEIL DE RÉDACTION

PAR
BINYAMIN AMIRÀ

EN COLLABORATION AVEC
ZEEV NEHARI ET MENAHEM SCHIFFER

EXTRAIT DU
VOLUME XII

J. L. KRIVINE

ANNEAUX PRÉORDONNÉS

JÉRUSALEM
1964

JOURNAL D'ANALYSE MATHÉMATIQUE
(Journal International de Recherches)

Le Journal d'Analyse Mathématique publie des Mémoires originaux d'Analyse Mathématique en français et en anglais.
Les Auteurs reçoivent gratuitement 50 tirés-à-part de leur Mémoire.

Le prix d'abonnement est de U.S.$.20.–
par volume (environ 400 pages).

Adresse de la rédaction:
B. A. Amirà
13, Rue Abrabanel
Jérusalem
Israël

Agence Générale pour Abonnements
General Agents for Subscriptions:
Stechert-Hafner, Inc.
31 East 10th Street
New-York 3, N.Y., U.S.A.

Imprimé en Israël
Printed in Israel
by the Jerusalem Academic Press, Ltd.

ANNEAUX PRÉORDONNÉS

PAR
J. L. KRIVINE
à Paris, France

Un anneau A est dit réel, s'il est commutatif, a un élément unité ,contient le corps Q des rationnels, et si on a $1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$ quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in A$.

Un sous ensemble Ω de l'anneau réel A est appelé préordre si:

1) $\Omega \supset A^2$ (ensemble des carrés des éléments de A). En particulier $0 \in \Omega$ et $1 \in \Omega$.

2) si $x, y \in \Omega$, alors $x + y \in \Omega$ et $xy \in \Omega$.

3) $-1 \notin \Omega$.

Sur tout anneau réel A il existe au moins un préordre: l'ensemble Ω_0 des sommes de carrés d'éléments de A. Tout préordre Ω sur A contient évidemment Ω_0.

L'anneau réel A muni du préordre Ω est appelé anneau préordonné. Dans la suite, étant donnés un anneau préordonné (A, Ω) et $x, y \in A$, on utilisera souvent l'expression "$x \geqq y$ dans (A, Ω)" au lieu de "$x - y \in \Omega$".

Ω étant un préordre sur l'anneau réel A on désigne par $|\Omega|$ l'ensemble des $x \in A$ tels que $x \in \Omega$ et $-x \in \Omega$.

Théorème 1. *$|\Omega|$ est un idéal strict de A.*

Remarquons d'abord que tout $x \in A$ est la différence de deux éléments de Ω: par exemple $x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$.

Soient alors $a \in |\Omega|$ et $x \in A$. On a $x = y - z$ avec $y, z \in \Omega$. Donc $xa = ya + z.(-a) \in \Omega$. De même $-xa = y(-a) + za \in \Omega$. Donc $xa \in |\Omega|$. D'autre part il est immédiat que si $a, b \in |\Omega|$, alors $a - b \in |\Omega|$ et que $1 \notin |\Omega|$. C.q.f.d.

Un préordre Ω sur l'anneau réel A est appelé un ordre si $|\Omega| = \{0\}$ c'est-à-dire si $x \in \Omega$ et $-x \in \Omega$ entraîne $x = 0$. (A, Ω) est alors appelé un anneau ordonné. Il est immédiat que pour que le préordre minimum Ω_0 sur A soit un ordre, il faut et il suffit que quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in A$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$ entraîne $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Théorème 2. *Soit (A, Ω) un anneau préordonné et $x \in A$. Pour qu'il existe un préordre Ω' contenant Ω et x, il faut et il suffit que $\omega_0 + \omega_1 x \neq -1$ quels que soient ω_0 et ω_1 dans Ω. Alors le plus petit préordre contenent Ω et x est l'ensemble des $\omega_0 + \omega_1 x$, avec $\omega_0, \omega_1 \in \Omega$.*

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante car si Ω' est l'ensemble des $\omega_0 + \omega_1 x$ (ω_0 et $\omega_1 \in \Omega$), alors Ω' est un préordre: en effet $(\omega_0 + \omega_1 x)(\omega_0' + \omega_1' x) = \omega_0 \omega_0' + \omega_1 \omega_1' x^2 + x(\omega_1 \omega_0' + \omega_1' \omega_0)$.

Théorème 3. *Soit (A, Ω) un anneau préordonné et $x_1, \ldots, x_n \in A$. Pour qu'il existe un préordre Ω' contenant $\Omega, x_1, \ldots, x_n$, il faut et il suffit que l'on ait $p(x_1, \ldots, x_n) \neq -1$ pour tout polynôme $p(X_1, \ldots, X_n)$ à coefficients dans Ω et du premier degré en chacune des variables $X_1, \ldots, X_n$. Le plus petit préordre contenant $\Omega, x_1, \ldots, x_n$ est alors l'ensemble des $p(x_1, \ldots, x_n)$ pour chaque polynôme $p(X_1, \ldots, X_n)$ de ce type.*

Immédiat par récurrence sur n, en utilisant le théorème précédent. En particulier (le cas $n = 2$ sera utilisé plus loin) : pour qu'il existe un préordre Ω' contenant Ω, x, y, il faut et il suffit que l'on ait $\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 xy \neq -1$ quels que soient $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$.

Théorème 4. *Soit (A, Ω) un anneau préordonné. Il existe un préordre maximal sur A, contenant Ω.*

Conséquence immédiate du théorème de Zorn: en effet la réunion d'une famille de préordres totalement ordonnée par inclusion est un préordre.

Soient (A, Ω) et (A', Ω') deux anneaux préordonnés. Une application $\phi : A \to A'$ est appelée homomorphisme d'anneaux préordonnés si c'est un homomorphisme d'anneaux et si $\phi(\Omega) \subset \Omega'$.

Si $\phi : A \to A'$ est un homomorphisme d'anneaux, et si Ω' est un préordre sur A', il est immédiat que $\phi^{-1}(\Omega')$ est un préordre sur A.

Théorème 5. *Soit (A,Ω) un anneau préordonné et ϕ l'homomorphisme canonique $A \to A/|\Omega|$. Alors $\phi(\Omega)$ est un ordre sur $A/|\Omega|$ et $\phi^{-1}\phi(\Omega) = \Omega$.*

Il est immédiat que $\phi(\Omega)$ satisfait les conditions 1 et 2 de définition des préordres. D'autre part si $\phi(a)$ et $-\phi(a)$ sont dans $\phi(\Omega)$ il existe ω et $\omega' \in \Omega$ tels que $a-\omega \in |\Omega|$ et $-a-\omega' \in |\Omega|$; il résulte que a et $-a$ sont dans Ω, donc $a \in |\Omega|$ et $\phi(a) = 0$.

Il en résulte que $-1 \notin \phi(\Omega)$ (car on aurait 1 et $-1 \in \Omega$) donc que $\phi(\Omega)$ est un ordre.

Pour tout $a \in A$, si $\phi(a) \in \phi(\Omega)$ on a $a-\omega \in |\Omega|$ pour un certain $\omega \in \Omega$, donc $a \in \Omega$. Par suite $\phi^{-1}\phi(\Omega) = \Omega$. C.Q.F.D.

L'anneau ordonné $(A/|\Omega|, \phi(\Omega))$ est appelé *anneau ordonné quotient de A par le préordre Ω et est désigné par A/Ω.*

Un anneau *ordonné* (A,Ω) est appelé *pseudo-corps* s'il est totalement ordonné (pour tout $x \in A$ on a $x \in \Omega$ ou $-x \in \Omega$) et si pour tout $x \in A$, $x \neq 0$, il existe $y \in A$ tel que $xy \geqq 1$ (c'est à dire $xy-1 \in \Omega$).

Tout pseudo-corps est un anneau d'intégrité: si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, il existe x' et y' tels que $xx' \geqq 1$ et $yy' \geqq 1$ donc $xx'yy' \geqq 1$ (si $a \geqq 1$ et $b \geqq 1$ on a $(a-1)(b-1) \geqq 0$ donc $ab+1 \geqq a+b \geqq 2$ soit $ab \geqq 1$) et par suite on a $xy \neq 0$.

L'intérêt de la notion de pseudo-corps vient du théorème suivant :

Théorème 6. *Pour que Ω soit préordre maximal sur l'anneau réel A il faut et il suffit que A/Ω soit un pseudo-corps.*

La condition est nécessaire: soit en effet Ω un préordre maximal sur A et soit $x \to \bar{x}$ l'homomorphisme d'anneaux préordonnés $A \to A/\Omega$. On a vu (Th. 5) que A/Ω est un anneau ordonné. Soit $a \in A$ tel que $\bar{a} \neq 0$ (soit $a \notin |\Omega|$). On a donc soit $a \notin \Omega$, soit $-a \notin \Omega$. Si par exemple $a \notin \Omega$, comme Ω est maximal, il n'y a aucun préordre contenant Ω et a ; donc (Th. 2) il existe $\omega_0, \omega_1 \in \Omega$ tels que $\omega_0 + \omega_1 a = -1$. On a alors $\omega_1 a = -1 - \omega_0$ soit $\omega_1 a \leqq -1$ dans (A,Ω). Donc $\bar{\omega}_1 \bar{a} \leqq -1$ dans A/Ω, soit $-\bar{\omega}_1 \bar{a} \geqq 1$; on a une démonstration analogue si $-a \notin \Omega$. Il en résulte que dans A/Ω, si $\bar{a} \neq 0$, il existe $\bar{b}$ tel que $\bar{a}\bar{b} \geqq 1$.

Reste à montrer que A/Ω est totalement ordonné : soit $a \in A$ tel que ni $\bar{a}$ ni $-\bar{a}$ ne soient dans $\bar{\Omega}$ (ordre de A/Ω). Il en résulte que ni a, ni $-a$ ne sont dans Ω. Puisque Ω est maximal, il existe donc (Th. 2) $\omega_0, \omega_1, \omega_0', \omega_1' \in \Omega$ tels que $\omega_0 + \omega_1 a = -1$; $\omega_0' - \omega_1' a = -1$. Donc $\omega_1 a = -1 - \omega_0$; $\omega_1' a = 1 + \omega_0'$; d'où par produit

$$\omega_1 \omega_1' a^2 = -(1 + \omega_0)(1 + \omega_0')$$

c'est à dire: $-1 = \omega_1\omega_1' a^2 + \omega_0 + \omega_0' + \omega_0\omega_0'$, soit $-1 \in \Omega$ ce qui est une contradiction.

La condition est suffisante: soit en effet Ω un préordre sur A tel que A/Ω soit un pseudo-corps. Soit $x \in A$, $x \notin \Omega$ On a donc $\bar{x} < 0$ dans A/Ω. Donc il existe $\bar{y} > 0$, tel que $-\bar{x}\bar{y} \geqq 1$. Alors $y \in \Omega$ et $-xy - 1 \in \Omega$. On a donc $-1 = \omega + xy$ avec $\omega \in \Omega$ et $y \in \Omega$. Cela montre qu'il n'y a aucun préordre contenant Ω et x. Comme x est quelconque dans $A - \Omega$, Ω est maximal. C.Q.F.D.

(A, Ω) étant un anneau préordonné on appelle *spectre de* (A, Ω) et on désigne par $\mathrm{Sp}(A, \Omega)$ (ou par $\mathrm{Sp}(A)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur le préordre Ω) l'ensemble des préordres maximaux Ω' contenant Ω.

Théorème 7. *Pour que* $x \in A$ *ne soit dans aucun des* $\Omega' \in \mathrm{Sp}(A)$ *(c'est à dire (pour que* $\bar{x}$ *soit* <0 *dans* A/Ω' *pour tout préordre maximal* Ω' *contenant* Ω*) il faut et il suffit qu'il existe* $\omega \geqq 0$ *tel que* $-\omega x \geqq 1$.

En effet il faut et il suffit qu'il n'y ait aucun préordre contenant Ω et x (car un tel préordre se plonge dans un préordre maximal); donc qu'il existe $\omega_0, \omega_1 \in \Omega$ tels que $\omega_0 + \omega_1 x = -1$; soit $\omega_1 x \leqq -1$.

Théorème 8. *Pour qu'aucun* $|\Omega'|$ $(\Omega' \in \mathrm{Sp}(A))$ *ne contienne* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *(c'est-à-dire pour que* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ *ne soient simultanément nuls dans aucun des* A/Ω', $\Omega' \in \mathrm{Sp}(A)$*) il faut et il suffit qu'il existe* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in A$ *tels que* $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \geqq 1$.

La condition est suffisante : si Ω' est un préordre maximal, comme $\bar{\lambda}_1\bar{x}_1 + \ldots + \bar{\lambda}_n\bar{x}_n \geqq 1$ dans A/Ω', $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ ne peuvent pas être simultanément nuls.

La condition est nécessaire: l'hypothèse entraîne qu'aucun préordre ne contient $\Omega, x_1, \ldots, x_n, -x_1, \ldots, -x_n$ (car un tel préordre se plonge dans un préordre maximal). On a donc, (d'après le Th. 3) :

$$p(x_1, \ldots, x_n, -x_1, \ldots, -x_n) = -1, \quad \text{où} \quad p(X_1, \ldots, X_n, X_1', \ldots, X_n')$$

est un polynôme à coefficients dans Ω ; ce qui s'écrit

$$\omega_0 - \lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_n x_n = -1, \quad \text{avec} \quad \omega_0 \in \Omega, \quad \text{et} \quad \lambda_1, \dots \lambda_n \in A; \quad \text{soit}$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \geqq 1. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Applications.

I. Théorème. *Soit K un corps ordonné, L une extension réelle fermée de K et* $p_1, \dots, p_k$ *des polynômes* $\in K[x_1, \dots, x_n]$. *Pour que* $p_1, \dots, p_k$ *n'aient aucune racine commune dans L, il faut et il suffit qu'il existe de polynômes* $q_1, \dots, q_k$, $r_1, \dots, r_l$ *à coefficients dans K, et* $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ *éléments* $\geqq 0$ *de K tels que* $q_1 p_1 + \dots + q_k p_k = 1 + \lambda_1 r_1^2 + \dots + \lambda_l r_l^2$.

Il est évident que la condition est suffisante.

D'après le théorème de Tarski sur l'équivalence logique de deux extensions réelles fermées de K (voir [2]) $p_1, \dots, p_k$ n'ont de racines communes dans aucune extension réelle fermée de K. Par suite $p_1, \dots, p_k$ n'ont de racines communes dans aucune extension ordonnée de K puisque celle-ci se plonge dans une extension réelle fermée.

Soit $\Omega \subset K[x_1, \dots, x_n]$ l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda_1 r_1^2 + \cdots + \lambda_l r_l^2$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ sont des éléments $\geqq 0$ de K. Ω est évidemment un ordre sur $K[x_1 \dots, x_n]$, prolongeant l'ordre de K. Si Ω' est un préordre maximal contenant Ω, $K[x_1, \dots, x_n]/\Omega'$ est un anneau d'intégrité totalement ordonné (car c'est un pseudo-corps) dont l'ordre prolonge celui de K. Si on avait $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \cdots = \bar{p}_k = 0$ dans $K[x_1, \dots, x_n]/\Omega'$, le corps des quotients de cet anneau serait une extension ordonnée de K contenant une racine commune: $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, à $p_1, \dots, p_k$, ce qui est impossible. D'après le théorème précédent il existe donc $q_1, \dots, q_k \in K[x_1, \dots, x_n]$ tels que $q_1 p_1 + \dots + q_k p_k = 1 + \omega$ avec $\omega \in \Omega$. C.Q.F.D.

II. Cas où A est un corps réel.

Soit A un corps réel (quels que soient $x_1, \dots, x_n \in A$ on a $x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1 \neq 0$). Tout préordre sur A est un ordre; car $|\Omega|$ est un idéal strict de A, donc $|\Omega| = \{0\}$.

Si Ω est un préordre maximal sur A, A/Ω est donc le corps A muni d'un ordre total. On retrouve le fait que tout corps réel peut être muni d'un ordre total.

En appliquant les résultats précédents à l'anneau préordonné (A,Ω_0) (où Ω_0 est l'ensemble des sommes de carrés d'éléments de A) on obtient :

1) si $x \in A$ est > 0 dans tout ordre total de A, x est une somme de carrés d'éléments de A.

En effet, $-x$ n'appartient à aucun préordre maximal, donc il existe $\omega_0, \omega_1 \in \Omega_0$ tels que $\omega_0 - \omega_1 x = -1$ soit $x = \dfrac{1+\omega_0}{\omega_1} = \dfrac{1}{\omega_1^2}\omega_1(1+\omega_0)$.

2) si x et y ne sont simultanément $\geqq 0$ dans aucun ordre total sur A, il existe $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, sommes de carrés d'éléments de A tels que $\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 xy = -1$.

En effet, aucun préordre maximal, donc aucun préordre, ne contient Ω_0, x, y. D'où le résultat d'après le Théorème 3.

III. Soit K un corps ordonné tel que tout élément $\geqq 0$ de K soit une somme de carrés d'éléments de K, et L une extension réelle fermée de K. On sait que si $p(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ est $\geqq 0$ sur L, c'est une somme de carrés de fractions rationnelles à coefficients dans K (théorème d'Artin). On peut généraliser ce résultat de la façon suivante :

Si $p(x_1, \ldots, x_n)$ et $q(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ne sont jamais simultanément > 0 sur L, il existe $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sommes de carrés de polynômes à coefficients dans K, tels que $\omega_0 + \omega_1 p + \omega_2 q + \omega_3 pq = 0$.

D'après le théorème de Tarski, $p(x_1, \ldots, x_n)$, $q(x_1, \ldots, x_n)$ ne sont simultanément > 0 dans aucune extension réelle fermée de K, donc dans aucune extension ordonnée de K. Or le corps $K(x_1, \ldots, x_n)$ muni de l'ordre Ω_0 minimum (ensemble des sommes de carrés) est une extension ordonnée de K ; p et q ne sont donc simultanément > 0 pour aucun ordre total de $K(x_1, \ldots, x_n)$. Par suite (application II) il existe $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sommes de carrés d'éléments de $K(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\omega_0 + \omega_1 p + \omega_2 q + \omega_3 pq = -1$. D'où le résultat en éliminant les dénominateurs.

Enveloppe et radical d'un anneau préordonné.

Soit Π un préordre sur l'anneau réel A.

On appelle enveloppe de l'anneau préordonné (A,Π) et on désigne par $\mathrm{Env}(A,\Pi)$ (ou par $\mathrm{Env}(A)$) l'intersection des préordres maximaux de A contenant Π. C'est évidemment un préordre contenant Π.

On appelle radical de l'anneau préordonné (A, Π) et on désigne par $\mathrm{Rad}(A,\Pi)$ (ou par $\mathrm{Rad}(A)$) l'intersection des $|\Omega|$ quand Ω décrit l'ensemble des préordres maximaux de A contenant Π. C'est un idéal de A et on a en fait $\mathrm{Rad}(A) = |\mathrm{Env}(A)|$.

Théorème 9. *Le radical de (A,Π) est l'ensemble des $x \in A$, tels que pour tout $\lambda \in A$ il existe $\pi \geqq 0$ (c. à d. $\pi \in \Pi$) tel que $\pi(1 - \lambda x) \geqq 1$.*

Si x satisfait cette condition soit Ω un préordre maximal contenant Π. Si $x \notin |\Omega|$ on a $\bar{x} \neq 0$ dans A/Ω et par suite (A/Ω étant un pseudo-corps) il existe $\lambda \in A$ tel que $\bar{\lambda}\bar{x} \geqq 1$ dans A/Ω. Or il existe $\pi \geqq 0$ tel que $\pi(1 - \lambda x) \geqq 1$; d'où $\bar{\pi}(1 - \bar{\lambda}\bar{x}) \geqq 1$. Comme A/Ω est totalement ordonné et $\bar{\pi} \geqq 0$ dans A/Ω, on a $1 - \bar{\lambda}\bar{x} > 0$ dans A/Ω ce qui contredit $\bar{\lambda}\bar{x} \geqq 1$. Donc $x \in |\Omega|$ et par suite $x \in \mathrm{Rad}(A,\Pi)$.

Si x ne satisfait pas cette condition, il existe $\lambda \in A$ tel que pour tout $\pi \geqq 0$ on ait $\pi(1 - \lambda x) \geqq 1$. Donc pour tous $\pi, \pi' \geqq 0$ on a $\pi(\lambda x - 1) + \pi' \neq -1$. Il existe donc un préordre, et par suite un préordre maximal Ω contenant Π et $\lambda x - 1$ (Th. 2). Dans A/Ω on a $\bar{\lambda}\bar{x} - 1 \geqq 0$ donc $\bar{x} \neq 0$ et pour suite $x \notin |\Omega|$. Donc $x \notin \mathrm{Rad}(A,\Pi)$.

Théorème 10. *L'enveloppe de (A,Π) est l'ensemble des $x \in A$, satisfaisant une des deux conditions équivalentes suivantes:*

1) $\forall \lambda \in A, \exists \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geqq 0$ *tels que* $(\pi_2 + \pi_3\lambda)(1 + \lambda x) - \pi_1\lambda \geqq 1$,

2) $\forall \lambda \in A, \exists \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geqq 0$ *tels que* $\pi_1 x + (\pi_2 - \pi_3 x)(1 + \lambda x) \geqq 1$.

Si x satisfait la condition 1, soit Ω un préordre maximal contenant Π. Si $x \notin \Omega$ on a $\bar{x} < 0$ dans A/Ω. Donc il existe $\lambda \in A$ tel que $\bar{\lambda} > 0$ et $-\bar{\lambda}\bar{x} \geqq 1$; c'est à dire $\lambda \in \Omega$, et $-(1 + \lambda x) \in \Omega$. Or il existe $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \Pi$ tels que $\pi_1\lambda - (1 + \lambda x)(\pi_2 + \pi_3\lambda) \leqq -1$; donc il existe $\pi_0 \in \Pi$ tel que $\pi_0 + \pi_1\lambda - \pi_2(1 + \lambda x) - \pi_3\lambda(1 + \lambda x) = -1$. Comme λ et $-(1 + \lambda x)$ sont dans Ω, on a $-1 \in \Omega$ ce qui est une contradiction. Donc $x \in \Omega$ et par suite $x \in \mathrm{Env}(A, \Pi)$.

Si x ne satisfait pas la condition 1, on a

$$\pi_0 + \pi_1\lambda - \pi_2(1 + \lambda x) - \pi_3\lambda(1 + \lambda x) \neq -1$$

quels que soient $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \Pi$. Donc (Th. 3) il existe un préordre, donc aussi un préordre maximal contenant Π, λ, $-(1+\lambda x)$. Dans A/Ω on a $\bar{\lambda} \geqq 0$ et $-\bar{\lambda}\bar{x} \geqq 1$, donc $\bar{x} < 0$. Par suite $x \notin \Omega$, donc $x \notin \mathrm{Env}(A,\Omega)$.

Si x satisfait la condition 2, soit Ω un préordre maximal contenant Π. Si $x \notin \Omega$ il existe $\lambda \in A$, tel que $-\bar{\lambda}\bar{x} \geqq 1$. On a donc $-x \in \Omega$ et $-(1+\lambda x) \in \Omega$. Par suite (Th. 3) quels que soient $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \Pi$ on a

$$\pi_0 - \pi_1 x - \pi_2(1+\lambda x) + \pi_3 x(1+\lambda x) \neq -1,$$

ce qui contredit la condition 2.

Si x ne satisfait pas la condition 2, on a

$$\pi_0 - \pi_1 x - \pi_2(1+\lambda x) + \pi_3 x(1+\lambda x) \neq -1$$

quels que soient $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \Pi$. Donc (Th. 3) il existe un préordre, donc aussi un préordre maximal Ω contenant $-x$ et $-(1+\lambda x)$. Dans A/Ω on a donc $\bar{x} \leqq 0$ et $1+\bar{\lambda}\bar{x} \leqq 0$, donc $\bar{x} \neq 0$. On a donc $\bar{x} < 0$ et par suite $x \notin \Omega$. Donc $x \notin \mathrm{Env}(A,\Omega)$.

Préordres archimédiens

Un préordre Π sur l'anneau réel A est dit archimédien si pour tout $x \in A$, il existe un entier $n \geqq 0$ tel que $x \leqq n$ (c'est-à-dire $n - x \in \Pi$). Il est clair que si Ω est un préordre quelconque contenant le préordre archimédien Π, alors Ω est archimédien.

Si Π est un préordre archimédien, (A,Π) sera appelé anneau préordonné archimédien.

Théorème 11. *Soit A, Π un anneau préordonné archimédien et $a, b \in A$. Si $ab \geqq 1$ et $a \geqq 0$, il existe un entier $M > 0$ tel que $a \geqq 1/M$ et $b \geqq 1/M$. En particulier on a $b \geqq 0$.*

(A,Π) étant archimédien il existe deux entiers > 0 H et K tels que $0 \leqq a \leqq H$ et $b \leqq K$. Posons $a' = a/H$. On a donc $0 \leqq a' \leqq 1$ et $a'b \geqq 1/H$ (car $ab \geqq 1$). En multipliant l'inégalité $b \leqq K$ par a' qui est $\geqq 0$ on a $a'b \leqq a'K$, donc $1/H \leqq a'b \leqq a'K$ soit $a' \geqq 1/KH$.

(On en déduit $a \geqq 1/K$ ce qui est une partie du théorème à démontrer).

Posons $\alpha = 1 - a'$. Comme on a $1/KH \leqq a' \leqq 1$ on a $0 \leqq \alpha \leqq \theta$ avec $\theta = 1 - 1/KH$.

L'inégalité $a'b \geqq 1/H$ s'écrit $(1-\alpha)\,b \geqq 1/H$. Multiplions ses deux membres par $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}$qui est $\geqq 1$. On obtient :

$$(1-\alpha^n)b \geqq \frac{1}{H}(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{n-1}).$$

Donc $(1-\alpha^n)b \geqq 1/H$ quel que soit l'entier $n > 0$.

L'anneau (A,Π) étant archimédien il existe un entier $L > 0$ tel que $-b \leqq L$. Multiplions par α^n (qui est $\geqq 0$) les deux membres de cette inégalité. On obtient: $-\alpha^n b \leqq \alpha^n L$. Comme $0 \leqq \alpha \leqq \theta$, et donc $0 \leqq \alpha^n \leqq \theta^n$, on a $\alpha^n L \leqq \theta^n L$. Donc $-\alpha^n b \leqq \theta^n L$, soit $\alpha^n b \geqq -\theta^n L$.

Ajoutons cette inégalité à la précédente. On obtient
$b \geqq 1/H - L\theta^n$, quel que soit l'entier $n > 0$.

Comme θ est un nombre rationnel et que $0 \leqq \theta < 1$, il existe un entier $n > 0$ tel que $\dfrac{1}{H} - L\theta^n \geqq \dfrac{1}{2H}$. On a donc $b \geqq \dfrac{1}{2H}$. C.Q.F.D.

Théorème 12. *Si (A,Π) est un anneau préordonné archimédien, l'enveloppe de (A,Π) est l'ensemble des $x \in A$, tels que pour tout entier $n > 0$ on ait $x \geqq -1/n$ (c. à d. $x + 1/n \in \Pi$). Le radical de (A,Π) est l'ensemble des $\boldsymbol{x} \in A$ tels que pour tout entier $n > 0$ on ait $-1/n \leqq x \leqq 1/n$.*

Si $x \in \mathrm{Env}(A)$ d'apres la condition 1 du Théorème 10, pour tout $\lambda \in A$ il existe $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geqq 0$ tels que $(\pi_2 + \pi_3\lambda)(1 + \lambda x) - \pi_1\lambda \geqq 1$.

C'est vrai en particulier si λ est un entier $n > 0$. Mais alors $\pi_1\lambda \geqq 0$ et par suite on a $(\pi_2 + \pi_3 n)(1 + nx) \geqq 1$.

Comme $\pi_2 + \pi_3 n \geqq 0$, d'après le Théorème 11 on a $1 + nx \geqq 0$. D'où $x \geqq -1/n$ quel que soit l'entier $n > 0$.

Inversement si on a $x \geqq -1/n$ pour tout entier $n > 0$, soit Ω un préordre maximal quelconque contenant Π. Si $x \notin \Omega$ on a $\bar{x} < 0$ dans A/Ω. Donc il existe $y \in A$ tel que $\bar{y} \geqq 0$ et $-\bar{y}\bar{x} \geqq 1$. Comme (A, Π)est archimédien, il existe un entier $K > 0$ tel que $y \leqq K$. On a donc $\bar{y} \leqq K$ dans A/Ω. Comme $-\bar{x} \geqq 0$ on a $-\bar{x}\bar{y} \leqq -K\bar{x}$ et par suite $1 \leqq -K\bar{x}$. Soit $\bar{x} \leqq -1/K$. Or par hypothèse on a $x \geqq -1/2K$, soit $\bar{x} \geqq -1/2K$ ce qui est contradictoire. Donc $x \in \Omega$ et par suite $x \in \mathrm{Env}(A, \Pi)$.

Le radical de A étant l'ensemble des $x \in A$, tels que $x \in \mathrm{Env}(A, \Pi)$ et $-x \in \mathrm{Env}(A, \Pi)$, on en déduit immédiatement le résultat cherché pour $\mathrm{Rad}(A, \Pi)$.

Théorème 13. *Pour que (A,Π) soit un pseudo-corps archimédien, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe, en tant qu'anneau ordonné, à un sous anneau de R contenant Q.*

Il est clair que la condition est suffisante. Soit alors (A, Π) un pseudo-corps archimédien. On définit une application ϕ de A dans R de la façon suivante: pour chaque $x \in A$, l'ensemble des $q \in Q$ tels que $q \leqq x$ est majoré dans Q (par un entier $M > 0$ tel que $x \leqq M$). Il a donc une borne supérieure α dans R. On pose $\phi(x) = \alpha$.

Il est évident que si $x \in Q$ on a $\phi(x) = x$.

ϕ est biunivoque et croissante: soient $x, y \in A$, $x \neq y$. Comme A est totalement ordonné on a par exemple $y > x$. Donc il existe $\omega \in A$ tel que $\omega(y-x) \geqq 1$. Comme $\omega \leqq N$ pour un certain entier $N > 0$, on a $N(y-x) \geqq 1$, soit $y - x \geqq 1/N$. Or il existe $q \in Q$, $q \leqq x$, tel que $\phi(x) - q \leqq 1/2N$ (d'après la définition de $\phi(x)$). Comme $y \geqq x + 1/N$, on a $y \geqq q + 1/N$. Donc $\phi(y) \geqq q + 1/N$ et par suite $\phi(y) \geqq \phi(x) + 1/2N$ ce qui montre que ϕ est biunivoque et croissante.

On a $\phi(-x) = -\phi(x)$ pour tout $x \in A$: en effet pour tout $q \in Q$, $q > \phi(-x)$, alors q n'est pas $\leqq -x$. Comme A est totalement ordonné ,on a donc $q > -x$, soit $x > -q$ et par suite $\phi(x) > -q$. Comme q est un rationnel arbitraire $> \phi(-x)$ on a donc $\phi(x) \geqq -\phi(-x)$. D'autre part si $q \in Q$, $q < \phi(-x)$, alors $q \leqq -x$, donc $x \leqq -q$ et par suite $\phi(x) \leqq -q$. Donc $\phi(x) \leqq -\phi(-x)$ et par suite $\phi(x) = \phi(-x)$.

Soient $x, y \in A$. Alors $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$. En effet, si $p, q \in Q$ et si $p \leqq x$, $q \leqq y$, on a $p + q \leqq x + y$. Donc $\phi(x) + \phi(y) \leqq \phi(x + y)$. On a donc aussi $\phi(-x) + \phi(-y) \leqq \phi(-x-y)$ soit $\phi(x) + \phi(y) \geqq \phi(x + y)$.

Soit $x \geqq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ dans Q, il existe $q \in Q$ tel que $q \leqq x \leqq q + \varepsilon$ (il suffit de prendre q entre $\phi(x) - \varepsilon/2$ et $\phi(x) + \varepsilon/2$). Alors $q^2 \leqq x^2 \leqq (q + \varepsilon)^2$

donc $q^2 \leqq \phi(x^2) \leqq (q+\varepsilon)^2$. Il en résulte qu'on a $\phi(x^2) = [\phi(x)]^2$. On démontre de même cette inégalité si $x \leqq 0$.

Par suite si $x,y \in A$ on a $\phi(x+y)^2 = [\phi(x+y)]^2$: soit

$$\phi(x^2) + \phi(y^2) + 2\phi(xy) = [\phi(x)]^2 + [\phi(y)]^2 + 2\phi(x)\phi(y).$$

D'où $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$; ϕ est donc bien un isomorphisme de A dans R, conservant l'ordre. C.Q.F.D.

Soit (A,Π) un anneau préordonné archimédien. Si Ω est un préordre maximal contenant Π, A/Ω est un sous-anneau de R contenant Q d'après le théorème précédent. Inversement si χ est un homomorphisme d'anneaux préordonnés de A dans R, comme $\chi(A)$ est alors un pseudo-corps le préordre $\chi^{-1}(P)$ (où P désigne l'ensemble des réels $\geqq 0$) est un préordre maximal dans A.

Le spectre de (A,Π) est donc identifié à l'ensemble des homomorphismes χ d'anneaux préordonnés de A dans R.

Pour tout $x \in A$ il existe un entier $M(x) > 0$ tel que $-M(x) \leqq x \leqq M(x)$. Donc $\chi(x) \in [-M(x), M(x)]$ pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}(A)$. Posons $\mathscr{E} = \prod_{x \in A} [-M(x), M(x)]$ c'est un espace compact quand on le munit de la topologie produit et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathscr{E}$. Or $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des $\delta \in \mathscr{E}$ tels que pour tout x et pour tout y on ait $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$; $\delta(xy) = \delta(x)\delta(y)$; pour tout $x \geqq 0$, $\delta(x) \geqq 0$; et $\delta(1) = 1$. Il en résulte que $\mathrm{Sp}(A)$ est un fermé de $\mathscr{E}$, donc est compact pour la topologie induite par $\mathscr{E}$.

Dans la suite on supposera toujours $\mathrm{Sp}(A)$ *muni de cette topologie qui en fait un espace compact.*

Pour tout $x \in A$ soit $\hat{x}$ la fonction définie sur $\mathrm{Sp}(A)$ à valeurs dans R par $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$ pour chaque $\chi \in \mathrm{Sp}(A)$. Il est immédiat que $\hat{x}$ est continue sur $\mathrm{Sp}(A)$(en fait la topologie de $\mathrm{Sp}(A)$ est la moins fine rendant continues toutes les fonctions $\hat{x}$) et que $x \to \hat{x}$ est un homomorphisme de A sur un sous-anneau $\hat{A}$ de l'algèbre des fonctions continues réelles sur $\mathrm{Sp}(A)$. Son noyau est le radical de (A,Π). $\mathrm{Env}(A,\Pi)$ est l'ensemble des $x \in A$ tels que $\hat{x}$ soit $\geqq 0$ sur $\mathrm{Sp}(A,\Pi)$.

$\hat{A}$ est uniformément dense dans l'algèbre des fonctions continues réelles sur $\mathrm{Sp}(A)$. En effet c'est une algèbre sur Q qui sépare les points de $\mathrm{Sp}(A)$ (si

$\hat{x}(\chi_1) = \hat{x}(\chi_2)$ pour tout $x \in A$, alors $\chi_1(x) = \chi_2(x)$ pour tout $x \in A$, c. à d. $\chi_1 = \chi_2$).

Mesures sur le spectre d'une R-algèbre archimédienne.

On suppose ici que A est une algèbre sur R, munie d'un préordre archimédien Π. Une forme linéaire T sur A est dite positive si $T(x) \geqq 0$ pour tout $x \in \Pi$.

Théorème 14. *Soit T une forme linéaire positive sur une R-algèbre archimédienne (A, Π). Alors il existe une mesure de Radon μ positive sur* Sp(A) *et une seule telle que $T(x) = \int \hat{x} d\mu$ pour tout $x \in A$. Inversement toute mesure positive μ sur* Sp(A) *définit une forme linéaire positive sur $A : x \rightarrow \int \hat{x} d\mu$.*

La deuxième partie du théorème est évidente.

Soit $x \in \text{Rad}(A)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $-\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon$ (Th. 12). Donc $-\varepsilon T(1) \leqq T(x) \leqq \varepsilon T(1)$, et par suite $T(x) = 0$. Il en résulte que T induit une forme linéaire U sur $\hat{A}$, par $U(\hat{x}) = T(x)$(*car* $\hat{x} = \hat{y}$ entraîne $T(x) = T(y)$). U est continue pour la norme uniforme de $\hat{A}$: en effet soit $y \in A$; alors $\|\hat{y}\| - \hat{y} \geqq 0$ sur Sp(A) ce qui vent dire que $\|\hat{y}\| - y \in \text{Env}(A)$. Donc (Th. 12) $\|\hat{y}\| - y + \varepsilon \geqq 0$ pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et par suite $(\|\hat{y}\| + \varepsilon)T(1) - T(y) \geqq 0$. Il en résulte que $T(y) \leqq \|\hat{y}\| T(1)$. On a de même $-T(\hat{y}) \leqq \|\hat{y}\| T(1)$. Donc $|U(\hat{y})| \leqq \|\hat{y}\| T(1)$.

Comme $\hat{A}$ est partout dense dans l'algèbre des fonctions continues réelles sur Sp(A), U s'étend en une forme linéaire continue sur cette algèbre c'est à dire en une mesure μ sur Sp(A). Cette mesure est positive : en effet, soit ϕ une fonction continue $\geqq 0$ sur Sp(A). Il existe une suite y_n d'éléments de A telle que $\|\hat{y}_n - \phi\| \rightarrow 0$. Donc pour n assez grand on a $\hat{y}_n \geqq -\varepsilon$ sur Sp(A), donc $y + \varepsilon \in \text{Env}(A)$ et par suite (Th. 12) $y_n + 2\varepsilon \geqq 0$. Donc $T(y_n) \geqq -2\varepsilon$ pour n assez grand. Comme $\mu(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n)$ on a $\mu(\phi) \geqq 0$.

On a donc une mesure positive μ sur Sp(A) telle que $\int \hat{x} d\mu = T(x)$ pour tout $x \in A$. Si μ' a la même propriété, μ et μ' sont égales sur $\hat{A}$ donc sont égales, puisque $\hat{A}$ est dense dans l'algèbre des fonctions continues sur Sp(A). C.Q.F.D.

Soit I un idéal d'une R-algèbre archimédienne A. On désigne par I^* l'ensemble des points p de Sp(A) tels que $\hat{x}(p) = 0$ pour tout $x \in I$.

C'est évidemment un fermé de Sp(A) ; $\complement I^*$ est donc un espace localement compact.

Théorème 15. *Soit I un idéal d'une R-algèbre archimédienne A, et T une forme linéaire positive sur I ($x \in I$, $x \geqq 0 \Rightarrow T(x) \geqq 0$). Alors il existe une mesure μ positive sur $\complement I^*$ telle que $T(xyz) = \int_{\complement I^*} \hat{x}\hat{y}\hat{z}\, d\mu$ quels que soient $x,y,z \in I$.*

Désignons par I^+ l'ensemble des sommes de carrés d'eléments de I. Pour tout $a \in I^+$ soit T_a la forme linéaire positive sur A définie par $T_a(x) = T(ax)$ pour tout $x \in A$. D'après le théorème précédent il existe une mesure μ_a positive sur Sp(A) telle que $T_a(x) = \int \hat{x}\, d\mu_a$ pour tout $x \in A$.

Si $a, b \in I^+$ on a $\int \hat{x}\, \hat{a}\, d\mu_b = \int \hat{x}\, \hat{b}\, d\mu_a = T(abx)$ quel que soit $x \in A$. Comme $\hat{A}$ est partout dense dans l'algèbre des fonctions continues sur Sp(A) on a donc $\int \phi\, \hat{a}\, d\mu_b = \int \phi\, \hat{b}\, d\mu_a$ pour toute fonction continue sur Sp(A). On définit alors une mesure positive μ sur l'espace $\complement I^*$ de la façon suivante : pour tout compact $K \subset \complement I^*$ il existe $a \in I^+$ tel que $\hat{a} > 0$ sur K (en effet pour tout point p de K il existe $a_p \in I^+$ tel que $\hat{a}_p(p) \neq 0$. Comme K est compact il existe $p_1, \ldots, p_n \in K$ tel que $\hat{a}_p^2 + \ldots + \hat{a}_p^2 > 0$ sur K). Si ϕ est continue à support compact K contenu dans $\complement I^*$ on pose $\mu(\phi) = \int \frac{\phi}{\hat{a}}\, d\mu_a$ pour tout $a \in I^+$ qui est > 0 sur K (en effet si $a, b \in I^+$ sont > 0 sur K, $\psi = \frac{\phi}{\hat{a}, \hat{b}}$ est continue sur Sp(A) donc $\int \psi\, \hat{a}\, d\mu_b = \int \psi\, \hat{b}\, d\mu_a$). On a ainsi défini une mesure μ positive sur $\complement I^*$.

Désignons par μ_a' la restriction de la mesure μ_a à $\complement I^*$ (c'est à dire la restriction de μ_a aux fonctions continues à support compact contenu dans $\complement I^*$). On a alors $\hat{a}\, d\mu = d\mu_a$.'En effet si ϕ est continue à support compact contenu dans $\complement I^*$ on a d'après ladéfi nition de μ : $\int \hat{a}\phi d\mu = \int \hat{a} \frac{\phi}{\hat{b}} d\mu_b$ où $b \in I^+$ est > 0 sur le support de ϕ. Donc $\int \hat{a}\phi d\mu = \int \phi d\mu_a$ (puisque $\hat{a}\, d\mu_b = \hat{b}\, d\mu_a$). Soit $x \in I$. Alors $\hat{x} = 0$ sur I^*. Donc $\int \hat{x}\, d\mu_a = \int \hat{x}\, d\mu_a' = T(ax)$. Par suite $\hat{x}$ est intégrable pour la mesure $\hat{a} d\mu$ et on a $\int \hat{a}\hat{x}\, d\mu = T(ax)$. Soient $y, z \in I$. Alors $(y+z)^2$ et $(y-z)^2$ sont dans I^+. On a donc $\int (\hat{y}+\hat{z})^2 \hat{x}\, d\mu = T(y+z)^2 x$; $\int (\hat{y}-\hat{z})^2 \hat{x}\, d\mu = T(y-z)^2 x$. D'où par différence $\int \hat{x}\hat{y}\hat{z}\, d\mu = T(xyz)$. C.Q.F.D.

Algèbres de Banach réelles

On appelle algèbre de Banach réelle une algèbre A sur R normée, complète qui est un anneau réel (c'est à dire qu'on a $1 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$ quels que soient $x_1, \dots, x_n \in A$). On suppose donc en particulier que A a un élément unité.

Théorème 16. *Sur une algèbre de Banach réelle A tout préordre est archimédien. On a en fait $x \leqq \| x \|$ pour tout $x \in A$ et tout préordre sur A.*

Soit $x \in A$, $x \neq 0$. Posons $y = \dfrac{x}{\| x \|}$. La série

$$1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 - \dots - \frac{1.3..2p-3}{2^p\, p!} y^p - \dots$$

converge puisque $\| y \| = 1$. La somme z satisfait $z^2 = 1 - y$.

D'où $\| x \| z^2 = \| x \| - x$ ce qui montre que $\|x\| - x$ est le carré d'un élément de A.

Nous désignerons par $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de A muni du préordre minimum (ensemble des sommes de carrés d'éléments de A). $\mathrm{Sp}(A)$ *est donc l'ensemble des homomorphismes χ de A dans R.* (En effet si χ est un homomorphisme de A dans R on a $\chi(x^2) = [\chi(x)]^2$ donc $\chi(x^2) \geqq 0$ pour tout $x \in A$).

Soient Ω, Ω' deux préordres sur A, tels que $\Omega \subset \Omega'$. Alors $\mathrm{Sp}(A, \Omega')$ est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{Sp}(A, \Omega)$ (ensemble des $\chi \in \mathrm{Sp}(A, \Omega)$ tels que $\chi(x) \geqq 0$ pour tout $x \in \Omega'$). En particulier pour tout préordre Ω sur A, $\mathrm{Sp}(A, \Omega)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{Sp}(A)$.

Pour tout $x \in A$ on a $x \leqq \| x \|$ donc $\chi(x) \leqq \| x \|$ pour $\chi \in \mathrm{Sp}(A)$ puisque χ conserve l'ordre et que $\chi(1) = 1$. On a de même $-\chi(x) \leqq \| x \|$. Donc *si $\chi \in \mathrm{Sp}(A)$, χ est continu sur A et on a $|\chi(x)| \leqq \| x \|$.*

Théorème 17. *Si $\hat{x} \geqq 0$ sur $\mathrm{Sp}(A)$ et ne s'annule pas sur $\mathrm{Sp}(A)$, il existe $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, et $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que $x = \alpha^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$.*

Comme $\mathrm{Sp}(A)$ est compact et que $\hat{x}$ est continue il existe $\beta \in R$, $\beta \neq 0$ el que $\hat{x} \geqq \beta^2$ sur $\mathrm{Sp}(A)$. Il résulte que $x - \beta^2 \in \mathrm{Env}(A)$. Par suite (Th. 12) $x - \dfrac{\beta^2}{2} \geqq 0$ pour le préordre considéré. C.Q.F.D.

Théorème 18. *$\| \hat{x} \|$ est la borne inférieure des nombres réels $\lambda \geqq 0$ tels que $\lambda + x$ et $\lambda - x$ soient des sommes de carrés d'éléments de A.*

En effet si $\lambda - x$ *et* $\lambda + x$ sont des sommes de carrés d'éléments de A on a $x \leqq \lambda$ et $-x \leqq \lambda$. Donc $|\chi(x)| \leqq \lambda$ pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}(A)$, soit $\|\hat{x}\| \leqq \lambda$. Donc si α est la borne inférieure de ces λ, on a $\|\hat{x}\| \leqq \alpha$. Mais si $\mu = \|\hat{x}\| + \varepsilon$ ε réel > 0 alors $\mu + \hat{x}$ et $\mu - \hat{x}$ sont > 0 sur $\mathrm{Sp}(A)$. Le théorème précédent montre alors que $\mu + x$ et $\mu - x$ sont des sommes de carrés, donc que $\mu \geqq \alpha$. Comme ε est arbitraire on a $\|\hat{x}\| \geqq \alpha$. C.Q.F.D.

Deux exemples d'algèbres de Banach réelles.

1) A est l'algèbre $\mathscr{L}^1(N)$ munie du produit de convolution: les éléments de A sont donc les suites $(a_n)_{n \in N}$ de nombres réels telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Le produit est défini par $a*b(n) = \sum_{p=0}^{n} a(p)b(n-p)$. La norme est $\|a\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. On a immédiatement $\|a*b\| \leqq \|a\| \, \|b\|$.

Désignons par δ_n la suite nulle partout sauf au point n où elle vaut 1. Pour chaque $a \in A$ on a donc $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\delta_1)^n$. Comme $\|\delta_1\| = 1$ on a $\chi(\delta_1) = x \in [-1,1]$ pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}(A)$. Comme χ est continu on a donc $\chi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Le spectre de A est donc identifié à l'intervalle $[-1,1]$. La topologie de $\mathrm{Sp}(A)$ est la moins fine qui rende continues toutes les $\hat{a}$ pour $a \in A$. Elle est donc moins fine que la topologie ordinaire de $[-1,1]$ et comme elles sont toutes deux compactes, elles sont identiques.

Le Théorème 17 s'énonce ici: *si $\phi(x)$ est définie sur $[-1,1]$ par une série entière absolument convergente et si $\phi(x) > 0$ sur $[-1,1]$, il existe $\phi_1(x), \ldots, \phi_k(x)$ définies par des séries entières absolument convergentes sur $[-1,1]$, et $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ tels que $\phi(x) = \alpha^2 + \phi_1^2(x) + \ldots + \phi_k^2(x)$.*

Soit a un élément quelconque de A, Ω le plus petit préordre sur A contenant a. Ω est donc l'ensemble des éléments de la forme $\omega_0 + \omega_1 a$, ω_0 et ω_1 étant des sommes de carrés. Le spectre de (A,Ω) est l'ensemble des $\chi \in \mathrm{Sp}(A)$ tels que $\chi(a) \geqq 0$. C'est donc l'ensemble X des $x \in [-1,1]$ tels que $\hat{a}(x) \geqq 0$. Si $b \in A$ est tel que $\hat{b} > 0$ sur X, comme X est compact on a $\hat{b} - \alpha^2 \geqq 0$ sur X (α réel $\neq 0$). Donc $b - \alpha^2 \in \mathrm{Env}(A,\Omega)$ et $b - \frac{\alpha^2}{2} \in \Omega$ (Th. 12). Donc: Si

$\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont définies sur $[-1,1]$ par des séries entières absolument convergentes et si on a $\psi(x)>0$ pour tout x tel que $\phi(x)\geqq 0$, il existe $f_1(x),\dots,f_k(x)$, $g_1(x),\dots,g_l(x)$ définies sur $[-1,1]$ par des séries entières absolument convergentes et $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$ tels que

$$\psi(x)=\alpha^2+f_1^2+\dots+f_k^2+\phi(x)(g_1^2+\dots+g_k^2)$$

Les formes linéaires T positives sur A munie du préordre minimum sont celles qui satisfont $T(a*a)\geqq 0$ pour tout $a\in A$. D'après le Théorème 14, Si T est une forme linéaire positive sur A il existe une mesure μ sur $[-1,1]$ et une seule telle que $T(a)=\int_{-1}^{1}\hat{a}(x)d\mu(x)$. On a donc $|T(a)|\leqq\|\hat{a}\|\,\mu(1)\leqq\|a\|\,\mu(1)$ ce qui montre que T est continue sur A. On a donc $T(a)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)\tau(n)$ où $\tau\in\mathscr{L}^\infty(N)$. La condition $T(a*a)\geqq 0$ s'écrit $\sum_{m,n\in N}\tau(m+n)a(m)a(n)\geqq 0$. L'égalité $\int_{-1}^{1}\hat{a}(x)d\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)\tau(n)$ donne $\tau(n)=\int_{-1}^{1}x^n d\mu(x)$. Donc:

Pour qu'une suite $\tau\in\mathscr{L}^\infty(N)$ soit de la forme $\tau(n)=\int_{-1}^{1}x^n d\mu(x)$ pour une mesure μ positive sur $[-1,1]$ il faut et il suffit qu'on ait $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\tau(i+j)\alpha_i\alpha_j\geqq 0$ pour tout entier $n>0$ et toute suite $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ de nombres réels.

Ces théorèmes s'étendent facilement au cas des séries entières à plusieurs variables.

2) Désignons par P l'ensemble des réels $\geqq 0$. A est l'algèbre $\mathscr{L}^1(P)$ (fonctions numériques intégrables pour la mesure de Lebesgue) munie du produit de convolution: $f*g(x)=\int_0^x f(u)g(x-u)du$ à laquelle on a ajouté un élément unité. Les éléments de A sont donc de la forme $f+\lambda$ avec $f\in\mathscr{L}^1(P)$ et $\lambda\in R$. La norme est $\|f+\lambda\|=\|f\|_1+|\lambda|$.

Il est immédiat que l'application $\chi_\infty: f+\lambda\to\lambda$ de A dans R est un élément de $\mathrm{Sp}(A)$, qu'on appelle point à l'infini. Il envoie $\mathscr{L}^1(P)$ sur 0. Soit χ un élément de $\mathrm{Sp}(A)$ qui ne soit pas $\equiv 0$ sur $\mathscr{L}^1(P)$. C'est une forme linéaire continue sur

$\mathscr{L}^1(P)$; il existe donc une fonction $\chi(x) \in \mathscr{L}^\infty(P)$ telle que $\chi(f) = \int_0^\infty f(x)\chi(x)dx$ pour toute $f \in \mathscr{L}^1(P)$. On a $\chi(f * g) = \iint_{P^2} \chi(x+y) f(x) g(y) dx\,dy$; $\chi(f)\chi(q) = \iint_{P^2} \chi(x)\chi(y) f(x) g(y) dx\,dy$. Il en résulte que la mesure $[\chi(x+y) - \chi(x)\chi(y)]dx\,dy$ annule toutes les fonctions intégrables sur P^2. On a donc $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ presque partout sur P^2. Ce qui entraîne que l'ensemble des $x \in P$ tels que $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$, pour presque tout y a un complémentaire négligeable.

Soit h un nombre réel > 0 tel que $\int_0^h \chi(x)dx \neq 0$ (il en existe un, sinon $\chi(x) = 0$ presque partout). Posons $\phi(u) = \int_u^{u+h} \chi(x)dx$. Il est immédiat que ϕ est continue sur P.

On a par changement de variable $\phi(u) = \int_0^h \chi(x+u)dx$. Or pour presque tout u on a $\chi(x+u) = \chi(x)\chi(u)$ pour presque tout x. Donc $\phi(u) = \chi(u)\phi(0)$ pour presque tout u, ce qui montre que $\chi'(x)$ équivaut à une fonction continue. Si on identifie $\chi(x)$ à cette fonction continue on a $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ pour tout couple $x, y \in P^2$. Par suite $\chi(x) = e^{-px}$ et comme $\chi(x) \in \mathscr{L}^\infty(P)$ on a $p \geqq 0$.

Le spectre de A privé du point à l'infini est donc identifié à P, ensemble des réels $\geqq 0$ en associant à chaque $p \in P$ l'homomorphisme $f \rightarrow \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx$ de $\mathscr{L}^1(P)$ dans R. Pour $f \in \mathscr{L}^1(P)$, $\hat{f}$ est donc la transformée de Laplace de f.

Sp(A) es donc $P \bigcup \{\chi_\infty\}$. Il est immédiat que la topologie de Sp(A) est celle du compactifié d'Alexandroff de P (elle est moins fine que cette topologie et toutes deux sont compactes).

Cherchons les formes linéaires positives continues sur $\mathscr{L}^1(P)$. Elles sont de la forme $f \rightarrow \int_0^\infty f(x)k(x)dx$ avec $k(x) \in \mathscr{L}^\infty(P)$ et satisfaisant $\int_0^\infty k(x) f * f(x)dx \geqq 0$ pour toute $f \in \mathscr{L}^1(P)$.

On a donc $\iint_{P^2} k(x+y) f(x) f(y) dx\,dy \geqq 0$ pour toute $f \in \mathscr{L}^1(P)$.

Une fonction $k(x) \in \mathscr{L}^\infty(P)$ satisfaisant cette condition sera dite de type positif.

En appliquant le Théorème 15 avec $I = \mathscr{L}^1(P)$ d'où $\complement I^* = P$ on voit qu'il existe une mesure positive μ sur P telle que

$$\int_0^\infty \hat{f}(p)\hat{g}(p)\hat{h}(p)d\mu(p) = \int_0^\infty k(x) f * g * h(x)dx$$

quelles que soient $f,g,h \in \mathscr{L}^1(P)$. Ce qui s'écrit

$$\int_{P^4} e^{-p(x+y+z)} f(x)g(y)h(z)dx\,dy\,dz\,d\mu(p) = \int_{P^3} k(x+y+z)f(x)g(y)h(z)dx\,dy\,dz.$$

On en déduit qu'on a $k(x+y+z) = \int_0^\infty e^{-p(x+y+z)}d\mu(p)$ presque partout dans P^3 donc que $k(x) = \int_0^\infty e^{-px}d\mu(p)$ presque partout.

La mesure μ est une mesure bornée sur P. En effet, on a $k(x) \in \mathscr{L}^\infty(P)$. Or quand $x \to 0$ $\quad k(x) \to \int_0^\infty d\mu(p)$. $\quad$ Donc $\int_1^\infty d\mu(p) < \infty$.

Théorème. *Pour que $k(x) \in \mathscr{L}^\infty(P)$ soit de type positif, il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive bornée μ sur P telle que $k(x) = \int_0^\infty e^{-px}d\mu(p)$.*

Corollaire 1. Si $k(x)$ est de type positif elle est analytique pour $x > 0$. En effet on a $k(x_0 + h) = \int_0^\infty e^{-px_0} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-ph)^n}{n!} d\mu(p)$ pour tout $x_0 > 0$ et $|h| < x_0$. Pour $|h| < x_0$

$$\int_0^\infty e^{-px_0} \sum_{n=0}^\infty \frac{|ph|^n}{n!} d\mu(p) < \infty.$$

On peut donc échanger les signes de sommation et d'intégration. D'où :

$$k(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{h^n}{n!} \int_0^\infty (-p)^n e^{-px_0} d\mu(p).$$

Cette série convergeant pour $|h| < x_0$.

Corollaire 2. Le produit de deux fonctions de type positif est de type positif. Soit $k_1(x) = \int_0^\infty e^{-px} d\mu_1(p)$ et $k_2(x) = \int_0^\infty e^{-px} d\mu_2(p)$.

Soit $\mu = \mu_1 * \mu_2$; pour toute ϕ continue à support compact

$$\mu(\phi) = \iint_{P^2} \phi(x+y).\, d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

μ est une mesure positive bornée sur P. Si $k(x) = \int_0^\infty e^{-px} d\mu(p)$ on a $k(x) = k_1(x) k_2(x)$.

Corollaire 3. Soit $k_n(x)$ une suite de fonctions de type positif de $\mathscr{L}^\infty(P)$ telle que l'ensemble des $\| k_n \|_\infty$ (c'est-à-dire l'ensemble des $k_n(0)$) soit majoré. Si $k_n(x)$ converge presque partout sur P sa limite $k(x)$ est de type positif. De plus la convergence a lieu en tout point de P sauf peut-être en 0.

Pour toute $f \in \mathscr{L}^1(P)$, $\iint_{P^2} k_n(x+y) f(x) f(y) dx\, dy \to \iint_{P^2} k(x+y) f(x) f(y) dx\, dy$ (théorème de Lebesgue). Donc $k(x)$ est de type positif. Si $x \neq 0$ et si ξ est un point de convergence de la suite k_n, $\xi < x$ comme toute fonction de type positif est continue et décroissante on a $\limsup k_n(x) \leqq \lim k_n(\xi) = k(\xi)$.

De même si η est un point de convergence, $\eta > x$, on a $\liminf k_n(x) \geqq \lim k_n(\eta) = k(\eta)$.

Comme k est de type positif donc continue, et que l'ensemble des points de convergence et partout dense (son complémentaire est négligeable) on a $k(x) = \lim k_n(x)$.

La convergence peut ne pas avoir lieu au point 0 comme le montre l'exemple $k_n(x) = e^{-nx} = \int_0^\infty e^{-px} d\mu_n(p)$ où μ_n est la mesure de Dirac au point $n \in N$.

Relation avec les C^*-algèbres commutatives.

Soit B une algèbre de Banach sur C, avec unité, munie d'une involution continue $x \to x^*$ satisfaisant à $(x+y)^* = x^* + y^*$; $(xy)^* = x^* y^*$; $\lambda^* = \bar{\lambda}$ pour $\lambda \in C$; $1 + x_1 x_1^* + \dots + x_n x_n^* \neq 0$ quels que soient $x_1, \dots, x_n \in B$.

Soit A l'algèbre de Banach réelle formée des éléments auto-adjoints de B

(c'est à dire les $x \in B$ tels que $x = x^*$). Nous désignerons par Sp(B) le spectre de B (c'est-à-dire l'espace de ses idéaux maximaux) et par Sp(A) le spectre de A (c'est-à-dire l'espace de ses préordres maximaux).

Théorème 19. *Le spectre de A s'identifie (en tant qu'espace topologique) à l'ensemble des $x \in$ Sp(B) tels que $\chi(A) = R$. C'est donc une partie fermée de* Sp(B).

Remarquons d'abord que tout élément x de B s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $x = a + ib$ avec $a, b \in A$ ($a = \frac{x + x^*}{2}$; $b = \frac{i}{2}(x - x^*)$).

Soit $X = \{\chi \in \mathrm{Sp}(B) ; \chi(A) = R\}$. Si $\chi \in X$ sa restriction à A est un homomorphisme de A sur R D'autre part si $\chi_1, \chi_2 \in X$ et si $\chi_1 = \chi_2$ sur A on a $\chi_1 = \chi_2$ sur B tout entier puisque tout $x \in B$ se met sous la forme $a + ib$ avec a, $b \in A$.

Il en résulte que X est un sous-ensemble de Sp(A). Soit alors $\phi \in$ Sp(A) Pour tout $x \in B$, $x = a + ib$ avec $a, b \in A$, on définit $\chi(x) = \phi(a) + i\phi(b)$. Il est immédiat que ϕ est un homomorphisme de B sur C. Donc $\phi \in X$. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

1. Loomis, Abstract harmonic analysis. Princeton, 1953.

2. A. Robinson, Introduction to the theory of models and to the metamathematics of algebra. Amsterdam, 1963.

3. Van der Waerden, Modern algebra. New York, 1953.

(Reçu le 10 juillet 1963).

עתון
לאנליסה מתמטית

יוצא לאור בחסות
מועצת המערכת

בעריכת
בנימין אמירה

בהשתתפות
זאב נהרי מנחם שיפר

כרך י״ב

ירושלים
תשכ״ד