

Ressources, Promotion et Super-promotion

Stéphane Gimenez

PPS - Université Paris Diderot

CHOCO – 6 Novembre 2008

Plan

λ -calcul avec ressources avec promotion

Logique linéaire différentielle avec promotion

Super-promotion

λ -calcul avec ressources avec promotion

Logique linéaire différentielle avec promotion

Super-promotion

Idée

On cherche à manipuler des λ -termes dans lequel on a introduit une notion de ressource :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t$$

Idée

On cherche à manipuler des λ -termes dans lequel on a introduit une notion de ressource :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t$$

Exemple

$$\langle \lambda x. \langle x \rangle_{xx} \rangle abc$$

Idée

On cherche à manipuler des λ -termes dans lequel on a introduit une notion de ressource :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t$$

Exemple

$$\begin{aligned} & \langle \lambda x. \langle x \rangle_{xx} \rangle abc \\ \longrightarrow & \langle a \rangle bc + \langle a \rangle cb + \langle b \rangle ac + \langle b \rangle ca + \langle c \rangle ab + \langle c \rangle ba \end{aligned}$$

Idée

On cherche à manipuler des λ -termes dans lequel on a introduit une notion de ressource :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t$$

Exemple

$$\begin{aligned} & \langle \lambda x. \langle x \rangle_{xx} \rangle abc \\ \longrightarrow & 2 \langle a \rangle bc + 2 \langle b \rangle ac + 2 \langle c \rangle ab \end{aligned}$$

Idée

On cherche à manipuler des λ -termes dans lequel on a introduit une notion de ressource :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t$$

Exemple

$$\begin{aligned} & \langle \lambda x. \langle x \rangle_{xx} \rangle abc \\ & \longrightarrow 2 \langle a \rangle bc + 2 \langle b \rangle ac + 2 \langle c \rangle ab \\ & a = \lambda x. x \quad b = \lambda x. x \quad c = \lambda x. \langle x \rangle x \end{aligned}$$

Idée

On cherche à manipuler des λ -termes dans lequel on a introduit une notion de ressource :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t$$

Exemple

$$\begin{aligned} & \langle \lambda x. \langle x \rangle x x \rangle abc \\ & \longrightarrow 2 \langle a \rangle bc + 2 \langle b \rangle ac + 2 \langle c \rangle ab \\ & a = \lambda x. x \quad b = \lambda x. x \quad c = \lambda x. \langle x \rangle x \\ & \longrightarrow 0 + 0 + 4 \langle \lambda x. x \rangle \lambda x. x \end{aligned}$$

Idée

On cherche à manipuler des λ -termes dans lequel on a introduit une notion de ressource :

$$t ::= x \mid \lambda x t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t$$

Exemple

$$\begin{aligned} & \langle \lambda x \langle x \rangle x x \rangle abc \\ & \longrightarrow 2 \langle a \rangle bc + 2 \langle b \rangle ac + 2 \langle c \rangle ab \\ & a = \lambda x x \quad b = \lambda x x \quad c = \lambda x \langle x \rangle x \\ & \longrightarrow 0 + 0 + 4 \langle \lambda x x \rangle \lambda x x \\ & \longrightarrow 4 \lambda x x \end{aligned}$$

Syntaxe

Définition

On exprime les termes du λ -calcul avec ressources Δ grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \\ 0 \mid t + t$$

$$T ::= 1 \mid TT \mid t \\ 0 \mid T + T$$

Syntaxe

Définition

On exprime les termes du λ -calcul avec ressources Δ grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= \begin{array}{l} x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \\ 0 \mid t + t \end{array} \quad T ::= \begin{array}{l} 1 \mid TT \mid t \\ 0 \mid T + T \end{array}$$

- On quotiente par associativité, comutativité et neutralité pour les constructions de paquets :

$$t_1 \cdots t_n$$

Syntaxe

Définition

On exprime les termes du λ -calcul avec ressources Δ grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= \begin{array}{l} x \mid \lambda x \, t \mid \langle t \rangle T \\ 0 \mid t + t \end{array} \qquad T ::= \begin{array}{l} 1 \mid TT \mid t \\ 0 \mid T + T \end{array}$$

- ▶ On quotiente par associativité, comutativité et neutralité pour les constructions de paquets :

$$t_1 \cdots t_n$$

- ▶ On quotiente par (bi-)linéarité de toutes les constructions :

$$\lambda x \, (t_1 + t_2) = \lambda x \, t_1 + \lambda x \, t_2$$

Substitution linéaire

$$t = \langle x \rangle_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial x} t \cdot u = \langle u \rangle_{xx} + \langle x \rangle_{ux} + \langle x \rangle_{xu}$$

Substitution linéaire

$$t = \langle x \rangle_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial x} t \cdot u = \langle u \rangle_{xx} + \langle x \rangle_{ux} + \langle x \rangle_{xu}$$

Définition

Substitution linéaire de z par un terme u dans un terme t .

$$\frac{\partial}{\partial z} x \cdot u = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z} z \cdot u = u$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\lambda x s) \cdot u = \lambda x \frac{\partial}{\partial z} s \cdot u$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\langle r \rangle R) \cdot u = \left\langle \frac{\partial}{\partial z} r \cdot u \right\rangle R + \langle r \rangle \frac{\partial}{\partial z} R \cdot u$$

Substitution linéaire

$$t = \langle x \rangle_{xx} \quad \frac{\partial}{\partial x} t \cdot u = \langle u \rangle_{xx} + \langle x \rangle_{ux} + \langle x \rangle_{xu}$$

Définition

Substitution linéaire de z par un terme u dans un terme t .

$$\frac{\partial}{\partial z} x \cdot u = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} z \cdot u = u$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\lambda x s) \cdot u = \lambda x \frac{\partial}{\partial z} s \cdot u$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\langle r \rangle R) \cdot u = \left\langle \frac{\partial}{\partial z} r \cdot u \right\rangle R + \langle r \rangle \frac{\partial}{\partial z} R \cdot u$$

sur les paquets :

$$\frac{\partial}{\partial z} 1 \cdot u = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} ST \cdot u = \left(\frac{\partial}{\partial z} S \cdot u \right) T + S \left(\frac{\partial}{\partial z} T \cdot u \right)$$

Schwarz

Propriété

Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ commutent, c'est la propriété de *Schwarz* :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} t \cdot u \right) \cdot v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} t \cdot v \right) \cdot u$$

Schwarz

Propriété

Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ commutent, c'est la propriété de *Schwarz* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} t \cdot u \right) \cdot v + \frac{\partial}{\partial x} t \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} v \cdot u \right) \\ = \\ \frac{\partial}{\partial x} t \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} u \cdot v \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} t \cdot v \right) \cdot u \end{aligned}$$

On remarquera que dans le cas habituel où $x \notin v$ et $y \notin u$, on retrouve :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} t \cdot u \right) \cdot v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} t \cdot v \right) \cdot u$$

Réduction

Les rédex sont les sous termes de la forme $\langle \lambda x s \rangle R$.

Définition

La substitution linéaire nous permet de définir la réduction :

$$\begin{aligned}\langle \lambda x s \rangle r R &\longrightarrow \left\langle \lambda x \frac{\partial}{\partial x} s \cdot r \right\rangle R \\ \langle \lambda x s \rangle 1 &\longrightarrow s[0/x]\end{aligned}$$

Réduction

Les rédex sont les sous termes de la forme $\langle \lambda x s \rangle R$.

Définition

La substitution linéaire nous permet de définir la réduction :

$$\begin{aligned}\langle \lambda x s \rangle r R &\longrightarrow \left\langle \lambda x \frac{\partial}{\partial x} s \cdot r \right\rangle R \\ \langle \lambda x s \rangle 1 &\longrightarrow s[0/x]\end{aligned}$$

- ▶ Il y a plusieurs façons de réduire un même rédex.
- ▶ La propriété de *Schwarz* permet de montrer la confluence.

Réduction

Les rédex sont les sous termes de la forme $\langle \lambda x s \rangle R$.

Définition

La substitution linéaire nous permet de définir la réduction :

$$\begin{aligned}\langle \lambda x s \rangle r R &\longrightarrow \left\langle \lambda x \frac{\partial}{\partial x} s \cdot r \right\rangle R \\ \langle \lambda x s \rangle 1 &\longrightarrow s[0/x]\end{aligned}$$

- ▶ Il y a plusieurs façons de réduire un même rédex.
- ▶ La propriété de *Schwarz* permet de montrer la confluence.
- ▶ [?] *Uniformity and the taylor expansion of ordinary λ -terms.*
- ▶ [?] *The λ -calculus with multiplicities.*

ajoutons la promotion...

Syntaxe

Définition

On définit le λ -calcul avec ressources **et promotion** $\Delta_!$ grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \mid 0 \mid t + t \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t \mid t^!$$

Syntaxe

Définition

On définit le λ -calcul avec ressources et promotion $\Delta_!$ grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t \mid t!$$
$$0 \mid t + t \qquad 0 \mid T + T$$

Exemple

$$\langle f \rangle uv!$$

Syntaxe

Définition

On définit le λ -calcul avec ressources et promotion $\Delta_!$ grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \quad T ::= 1 \mid TT \mid t \mid t!$$
$$0 \mid t + t \quad 0 \mid T + T$$

Exemple

$$\langle f \rangle uv!$$

- Attention la construction *promotion* n'est pas linéaire :

$$(u + v)! \neq u! + v!$$

Syntaxe

Définition

On définit le λ -calcul avec ressources et promotion $\Delta!$ grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \quad T ::= 1 \mid TT \mid t \mid t!$$
$$0 \mid t + t \quad 0 \mid T + T$$

Exemple

$$\langle f \rangle uv!$$

- Attention la construction *promotion* n'est pas linéaire :

$$(u + v)! = u!v!$$

Syntaxe

Définition

On définit le λ -calcul avec ressources et promotion $\Delta_!$ grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t \mid t!$$
$$0 \mid t + t \qquad 0 \mid T + T$$

Exemple

$$\langle f \rangle uv^!$$

- Attention la construction *promotion* n'est pas linéaire :

$$(u + v)^! = u^! v^!$$

$$0^! = 1$$

Syntaxe

Définition

On définit le λ -calcul avec ressources et promotion $\Delta_!$ grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t \mid t!$$
$$0 \mid t + t \qquad 0 \mid T + T$$

Exemple

$$\langle f \rangle uv^!$$

- Attention la construction *promotion* n'est pas linéaire :

$$(u + v)^! = u^! v^!$$

$$0^! = 1$$

$$t^! \sim 1 + tt^!$$

Substitution linéaire

Définition

Substitution linéaire de z par un terme u dans un terme t :

$$\frac{\partial}{\partial z} x \cdot u = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z} z \cdot u = u$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\lambda x s) \cdot u = \lambda x \frac{\partial}{\partial z} s \cdot u$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\langle r \rangle R) \cdot u = \left\langle \frac{\partial}{\partial z} r \cdot u \right\rangle R + \langle r \rangle \frac{\partial}{\partial z} R \cdot u$$

sur les paquets :

$$\frac{\partial}{\partial z} 1 \cdot u = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z} ST \cdot u = \left(\frac{\partial}{\partial z} S \cdot u \right) T + S \left(\frac{\partial}{\partial z} T \cdot u \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} t^! \cdot u = \left(\frac{\partial}{\partial z} t \cdot u \right) t^!$$

la réduction atomique...

Réduction atomique

Les rédex sont les sous termes de la forme $\langle \lambda x s \rangle R$.

Définition

La substitution linéaire nous permet de définir la réduction à petits pas :

$$\begin{aligned}\langle \lambda x s \rangle 1 &\xrightarrow{a} s[0/x] & \langle \lambda x s \rangle rR &\xrightarrow{a} \left\langle \lambda x \frac{\partial}{\partial x} s \cdot r \right\rangle R \\ \langle \lambda x s \rangle r!R &\xrightarrow{a} \langle \lambda x s \rangle R + \left\langle \lambda x \frac{\partial}{\partial x} s \cdot r \right\rangle r!R\end{aligned}$$

Réduction atomique

Les rédex sont les sous termes de la forme $\langle \lambda x s \rangle R$.

Définition

La substitution linéaire nous permet de définir la réduction à petits pas :

$$\begin{aligned}\langle \lambda x s \rangle 1 &\xrightarrow{a} s[0/x] & \langle \lambda x s \rangle rR &\xrightarrow{a} \left\langle \lambda x \frac{\partial}{\partial x} s \cdot r \right\rangle R \\ \langle \lambda x s \rangle r!R &\xrightarrow{a} \langle \lambda x s \rangle R + \left\langle \lambda x \frac{\partial}{\partial x} s \cdot r \right\rangle r!R\end{aligned}$$

Réduction atomique

Les rédex sont les sous termes de la forme $\langle \lambda x s \rangle R$.

Définition

La substitution linéaire nous permet de définir la réduction à petits pas :

$$\begin{aligned}\langle \lambda x s \rangle 1 &\xrightarrow{a} s[0/x] & \langle \lambda x s \rangle rR &\xrightarrow{a} \left\langle \lambda x \frac{\partial}{\partial x} s \cdot r \right\rangle R \\ \langle \lambda x s \rangle r!R &\xrightarrow{a} \langle \lambda x s \rangle R + \left\langle \lambda x \frac{\partial}{\partial x} s \cdot r \right\rangle r!R\end{aligned}$$

Théorème

La réduction $\xrightarrow{a}$ est confluente.

Réduction atomique

Cette réduction ne termine pas. Par exemple, le terme $\langle \lambda x \langle y \rangle x^! \rangle z^!$ admet pour réduction infinie :

$$\begin{aligned} & \langle \lambda x \langle y \rangle x^! \rangle z^! \\ \xrightarrow{a} & \langle y \rangle 1 + \langle \lambda x \langle y \rangle zx^! \rangle z^! \\ \xrightarrow{a} & \langle y \rangle 1 + \langle y \rangle z + \langle \lambda x \langle y \rangle zzx^! \rangle z^! \\ \xrightarrow{a} & \langle y \rangle 1 + \langle y \rangle z + \langle y \rangle zz + \langle \lambda x \langle y \rangle zzzx^! \rangle z^! \\ & \vdots \end{aligned}$$

Réduction atomique

Cette réduction ne termine pas. Par exemple, le terme $\langle \lambda x \langle y \rangle x^! \rangle z^!$ admet pour réduction infinie :

$$\begin{aligned} & \langle \lambda x \langle y \rangle x^! \rangle z^! \\ \xrightarrow{a} & \langle y \rangle 1 + \langle \lambda x \langle y \rangle zx^! \rangle z^! \\ \xrightarrow{a} & \langle y \rangle 1 + \langle y \rangle z + \langle \lambda x \langle y \rangle zzx^! \rangle z^! \\ \xrightarrow{a} & \langle y \rangle 1 + \langle y \rangle z + \langle y \rangle zz + \langle \lambda x \langle y \rangle zzzx^! \rangle z^! \\ & \vdots \end{aligned}$$

- La réduction atomique est en train de calculer le développement de *Taylor–Ehrhard* de ce terme.

la réduction groupée...

Substitution groupée

On considère une opération de substitution groupée d'une variable z par un paquet U dans un terme t notée $t\{U/z\}$, définie comme suit (cette définition ne fonctionne que pour $z \notin U$) :

$$t\{uU'/z\} = \left(\frac{\partial}{\partial z} t \cdot u\right)\{U'/z\}$$
$$t\{u'/z\} = t[u/z]$$

Substitution groupée

On considère une opération de substitution groupée d'une variable z par un paquet U dans un terme t notée $t\{U/z\}$, définie comme suit (cette définition ne fonctionne que pour $z \notin U$) :

$$t\{uU'/z\} = \left(\frac{\partial}{\partial z} t \cdot u\right)\{U'/z\}$$

$$t\{u'/z\} = t[u/z]$$

$$t\{(u_1 + \cdots + u_n)'/z\} = t[u_1 + \cdots + u_n/z]$$

$$t\{u_1' \cdots u_n'/z\} = t[u_1 + \cdots + u_n/z]$$

Substitution groupée

On considère une opération de substitution groupée d'une variable z par un paquet U dans un terme t notée $t\{U/z\}$, définie comme suit (cette définition ne fonctionne que pour $z \notin U$) :

$$t\{^u U'/z\} = \left(\frac{\partial}{\partial z} t \cdot u\right)\{U'/z\}$$

$$t\{u'/z\} = t[u/z]$$

$$t\{(u_1 + \cdots + u_n)'/z\} = t[u_1 + \cdots + u_n/z]$$

$$t\{u_1' \cdots u_n'/z\} = t[u_1 + \cdots + u_n/z]$$

- *Schwarz* nous dit que cette opération est correctement définie.

Réduction groupée

Définition

La substitution par paquets nous permet de définir la réduction groupée directement :

$$\langle \lambda x s \rangle R \xrightarrow{g} s\{R/x\}$$

Réduction groupée

Définition

La substitution par paquets nous permet de définir la réduction groupée directement :

$$\langle \lambda x s \rangle R \xrightarrow{g} s\{R/x\}$$

Théorème

La réduction $\xrightarrow{g}$ est confluente.

Réduction groupée

Définition

La substitution par paquets nous permet de définir la réduction groupée directement :

$$\langle \lambda x s \rangle R \xrightarrow{g} s\{R/x\}$$

Théorème

La réduction $\xrightarrow{g}$ est confluente.

- Cette fois on peut espérer que la réduction termine (dans le cas de λ -termes typés).

$$\langle \lambda x \langle y \rangle x^! \rangle z^! \xrightarrow{g} \langle y \rangle z^!$$

λ -calcul différentiel

- [?] *The differential $\lambda\mu$ -calculus.*

On remarquera que le λ -calcul différentiel, ainsi que ses réductions, peut être codé dans le λ -calcul avec ressources et promotion muni de la réduction groupée :

$$\llbracket x \rrbracket := x$$

$$\llbracket \lambda x t \rrbracket := \lambda x \llbracket t \rrbracket \qquad \llbracket (s) t \rrbracket := \langle \llbracket s \rrbracket \rangle \llbracket t \rrbracket^!$$

$$\llbracket D t \cdot u \rrbracket := \lambda z \langle \llbracket t \rrbracket \rangle \llbracket u \rrbracket z^!$$

λ -calcul différentiel

- [?] *The differential $\lambda\mu$ -calculus.*

On remarquera que le λ -calcul différentiel, ainsi que ses réductions, peut être codé dans le λ -calcul avec ressources et promotion muni de la réduction groupée :

$$\begin{aligned}\llbracket x \rrbracket &:= x \\ \llbracket \lambda x t \rrbracket &:= \lambda x \llbracket t \rrbracket & \llbracket (s) t \rrbracket &:= \langle \llbracket s \rrbracket \rangle \llbracket t \rrbracket^! \\ \llbracket D t \cdot u \rrbracket &:= \lambda z \langle \llbracket t \rrbracket \rangle \llbracket u \rrbracket z^!\end{aligned}$$

- La β -réduction est simulée de façon triviale par la réduction groupée ;

λ -calcul différentiel

- [?] *The differential $\lambda\mu$ -calculus.*

On remarquera que le λ -calcul différentiel, ainsi que ses réductions, peut être codé dans le λ -calcul avec ressources et promotion muni de la réduction groupée :

$$\begin{aligned}\llbracket x \rrbracket &:= x \\ \llbracket \lambda x t \rrbracket &:= \lambda x \llbracket t \rrbracket & \llbracket (s) t \rrbracket &:= \langle \llbracket s \rrbracket \rangle \llbracket t \rrbracket^! \\ \llbracket D t \cdot u \rrbracket &:= \lambda z \langle \llbracket t \rrbracket \rangle \llbracket u \rrbracket z^!\end{aligned}$$

- La β -réduction est simulée de façon triviale par la réduction groupée ; la réduction différentielle aussi !

λ -calcul différentiel

- [?] *The differential $\lambda\mu$ -calculus.*

On remarquera que le λ -calcul différentiel, ainsi que ses réductions, peut être codé dans le λ -calcul avec ressources et promotion muni de la réduction groupée :

$$\begin{aligned}\llbracket x \rrbracket &:= x \\ \llbracket \lambda x \, t \rrbracket &:= \lambda x \, \llbracket t \rrbracket & \llbracket (s) \, t \rrbracket &:= \langle \llbracket s \rrbracket \rangle \llbracket t \rrbracket^! \\ \llbracket D \, t \cdot u \rrbracket &:= \lambda z \, \langle \llbracket t \rrbracket \rangle \llbracket u \rrbracket z^!\end{aligned}$$

- La β -réduction est simulée de façon triviale par la réduction groupée ; la réduction différentielle aussi !
- La règle $D \, (\lambda x \, s) \cdot u \longrightarrow \lambda x \, \frac{\partial}{\partial x} s \cdot u$ devient :

$$\lambda z \, \langle \lambda x \, \llbracket s \rrbracket \rangle \llbracket u \rrbracket z^! \xrightarrow{g} \lambda x \, \frac{\partial}{\partial x} \llbracket s \rrbracket \cdot \llbracket u \rrbracket$$

la réduction à la krivine...

Réduction à la Krivine

On s'intéresse à une réduction $\xrightarrow{k}$ telle que :

$$\langle \lambda x \langle x \rangle x \rangle u v! \xrightarrow{k} \langle \lambda x \langle u \rangle x \rangle v! + \langle \lambda x \langle v \rangle x \rangle u v!$$

Réduction à la Krivine

On s'intéresse à une réduction $\xrightarrow{k}$ telle que :

$$\langle \lambda x \langle x \rangle x \rangle u v! \xrightarrow{k} \langle \lambda x \langle u \rangle x \rangle v! + \langle \lambda x \langle v \rangle x \rangle u v!$$

Définition

Formellement on définit $\xrightarrow{k}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{c} \overline{x \rightsquigarrow_x \square} \\[1em] \frac{t \rightsquigarrow_x c}{\langle t \rangle R \rightsquigarrow_x \langle c \rangle R} \qquad \frac{t \rightsquigarrow_x c}{\lambda y t \rightsquigarrow_x \lambda y c} \\[1em] \frac{t \rightsquigarrow_x c}{\langle \lambda x t \rangle R \xrightarrow{k} \sum_{u R' = R} \langle \lambda x c[u] \rangle R'} \end{array}$$

Réduction à la Krivine

On s'intéresse à une réduction $\xrightarrow{k}$ telle que :

$$\langle \lambda x \langle x \rangle x \rangle u v! \xrightarrow{k} \langle \lambda x \langle u \rangle x \rangle v! + \langle \lambda x \langle v \rangle x \rangle u v!$$

Définition

Formellement on définit $\xrightarrow{k}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{c} \overline{x \rightsquigarrow_x \square} \\[1em] \frac{t \rightsquigarrow_x c}{\langle t \rangle R \rightsquigarrow_x \langle c \rangle R} \qquad \frac{t \rightsquigarrow_x c}{\lambda y t \rightsquigarrow_x \lambda y c} \\[1em] \frac{t \rightsquigarrow_x c}{\langle \lambda x t \rangle R \xrightarrow{k} \sum_{u R' = R} \langle \lambda x c[u] \rangle R'} \end{array}$$

- Cette réduction reste atomique, et normalise dans le cas typé.

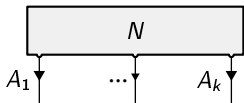
λ -calcul avec ressources avec promotion

Logique linéaire différentielle avec promotion

Super-promotion

L'univers des réseaux

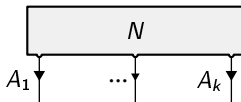
Un réseau N d'interface $\vdash A_1, \dots, A_k$ sera représenté graphiquement de la façon suivante :



Il y a des axiomes et des coupures.

L'univers des réseaux

Un réseau N d'interface $\vdash A_1, \dots, A_k$ sera représenté graphiquement de la façon suivante :

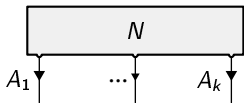


Il y a des axiomes et des coupures.

- On peut rajouter des constructions multiplicatives ou additives...

L'univers des réseaux

Un réseau N d'interface $\vdash A_1, \dots, A_k$ sera représenté graphiquement de la façon suivante :

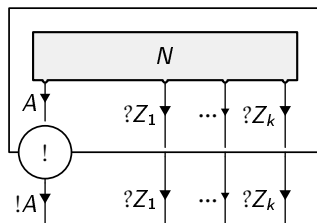


Il y a des axiomes et des coupures.

- ▶ On peut rajouter des constructions multiplicatives ou additives...
- ▶ On ne va s'intéresser qu'à la couche exponentielle.

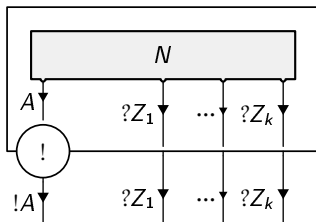
Petit rappel :

- Pour exprimer le λ -calcul dans les réseaux, on place les arguments dans des boîtes (*promotion*).

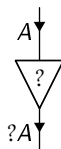
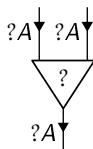


Petit rappel :

- Pour exprimer le λ -calcul dans les réseaux, on place les arguments dans des boîtes (*promotion*).



- On peut les dupliquer (*contraction*), les supprimer (*affaiblissement*), ou les ouvrir (*déréliction*).



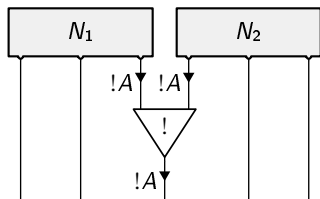
...comment exprimer les ressources ?

Proposition :

► Paquet vide 1 :



► Paquet composé UV :

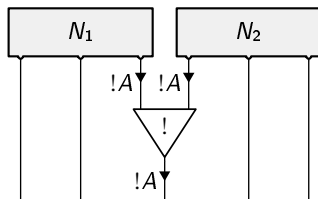


Proposition :

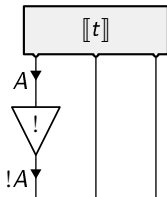
- Paquet vide 1 :



- Paquet composé UV :



- Paquet d'un seul terme t :

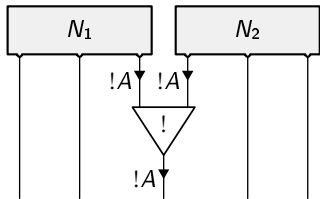


Proposition :

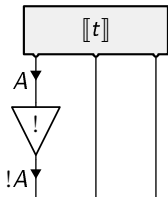
- ▶ Paquet vide 1 :



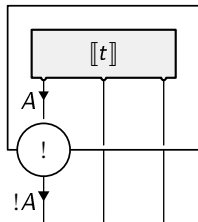
- ▶ Paquet composé UV :



- ▶ Paquet d'un seul terme t :



- ▶ Paquet d'un terme promu $t^!$:



Logique linéaire différentielle

- ▶ Tous ces petits dessins s'écrivent sous forme de séquents.
- ▶ Nous venons d'introduire les constructions de la logique linéaire différentielle.

$$\frac{\vdash !A, \Delta_1 \quad \vdash !A, \Delta_2}{\vdash !A, \Delta_1, \Delta_2}$$

$$\overline{\vdash !A}$$

$$\frac{\vdash A, \Delta}{\vdash !A, \Delta}$$

$$\frac{\vdash ?A, ?A, \Delta}{\vdash ?A, \Delta} \text{ contraction}$$

$$\frac{\vdash \Delta}{\vdash ?A, \Delta} \text{ affaiblissement}$$

$$\frac{\vdash A, \Delta}{\vdash ?A, \Delta} \text{ déréliction}$$

Logique linéaire différentielle

- ▶ Tous ces petits dessins s'écrivent sous forme de séquents.
- ▶ Nous venons d'introduire les constructions de la logique linéaire différentielle.

$$\begin{array}{c} \frac{\vdash !A, \Delta_1 \quad \vdash !A, \Delta_2}{\vdash !A, \Delta_1, \Delta_2} \text{ co-contraction} \\ \frac{}{\vdash !A} \text{ co-affaiblissement} \\ \frac{\vdash A, \Delta}{\vdash !A, \Delta} \text{ co-déréliction} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \frac{\vdash ?A, ?A, \Delta}{\vdash ?A, \Delta} \text{ contraction} \\ \frac{\vdash \Delta}{\vdash ?A, \Delta} \text{ affaiblissement} \\ \frac{\vdash A, \Delta}{\vdash ?A, \Delta} \text{ déréliction} \end{array}$$

Logique linéaire différentielle

- ▶ Tous ces petits dessins s'écrivent sous forme de séquents.
- ▶ Nous venons d'introduire les constructions de la logique linéaire différentielle.

$$\begin{array}{c} \frac{\vdash !A, \Delta_1 \quad \vdash !A, \Delta_2}{\vdash !A, \Delta_1, \Delta_2} \text{ co-contraction} \qquad \frac{\vdash ?A, ?A, \Delta}{\vdash ?A, \Delta} \text{ contraction} \\[1em] \frac{}{\vdash !A} \text{ co-affaiblissement} \qquad \frac{\vdash \Delta}{\vdash ?A, \Delta} \text{ affaiblissement} \\[1em] \frac{\vdash A, \Delta}{\vdash !A, \Delta} \text{ co-déréliction} \qquad \frac{\vdash A, \Delta}{\vdash ?A, \Delta} \text{ déréliction} \end{array}$$

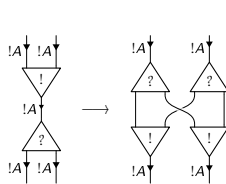
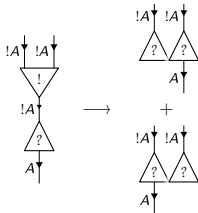
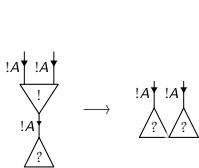
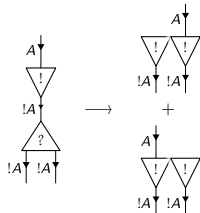
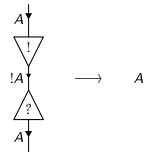
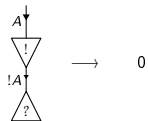
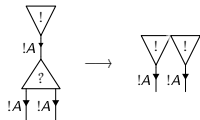
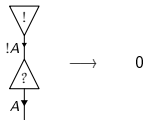
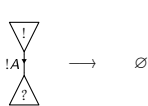
- ▶ Dans laquelle on a gardé la promotion :

$$\frac{\vdash A, ?\Delta}{\vdash !A, ?\Delta} \text{ promotion}$$

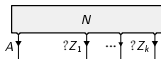
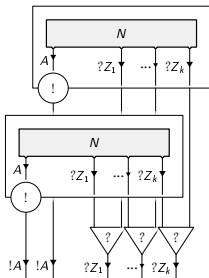
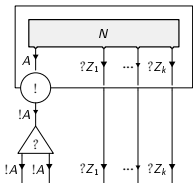
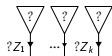
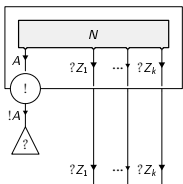
...comment élimine-t-on les coupures ?

- ▶ On connaît les réseaux d'interaction différentiels :

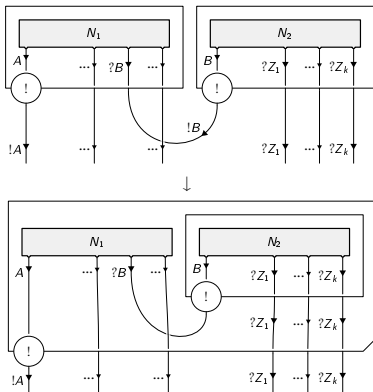
► On connaît les réseaux d'interaction différentiels :



- On connaît la logique linéaire habituelle :

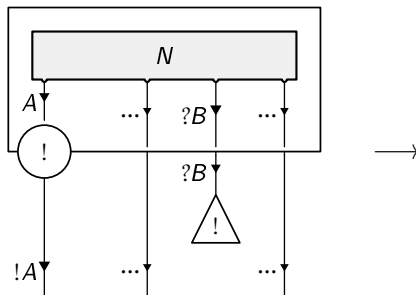


- On connaît la logique linéaire habituelle :

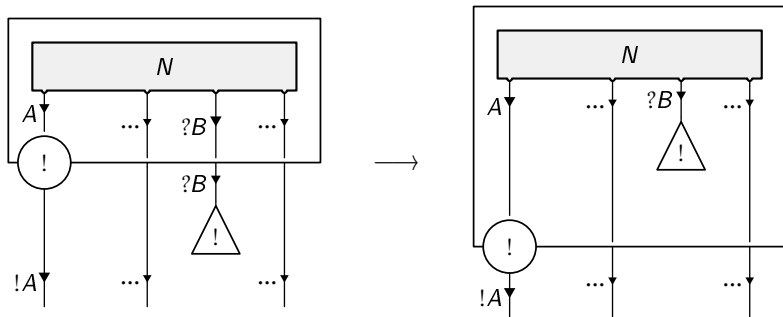


...que reste-t-il ?

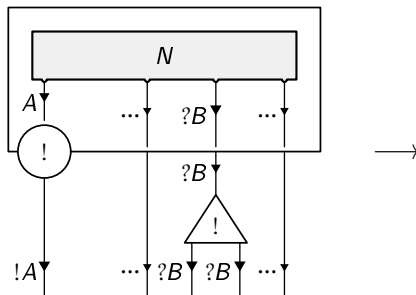
Un *co-affaiblissement* arrivant sur la sortie annexe d'une boîte rentre dans cette boîte.



Un *co-affaiblissement* arrivant sur la sortie annexe d'une boîte rentre dans cette boîte.

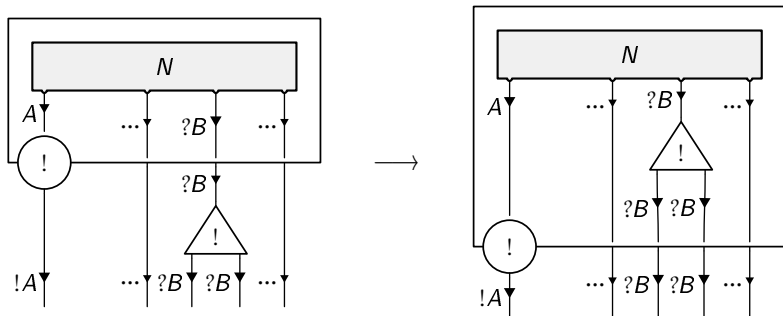


Une *co-contraction* arrivant sur une sortie annexe d'une boîte rentre dans cette boîte.



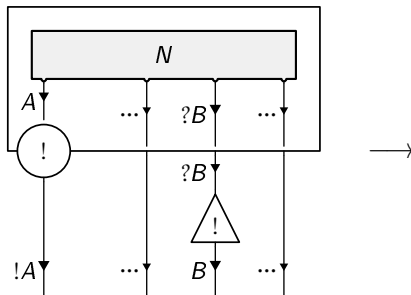
Promotion — Co-contraction

Une *co-contraction* arrivant sur une sortie annexe d'une boîte rentre dans cette boîte.



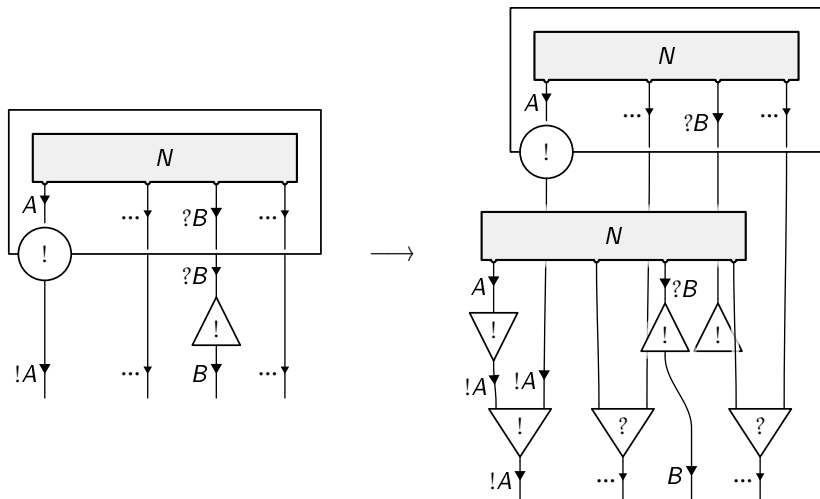
Promotion — Co-déréliction

Lorsqu'une *co-déréliction* rencontre une sortie annexe de boîte, elle réagit selon la règle de la chaîne.



Promotion — Co-déréliction

Lorsqu'une *co-déréliction* rencontre une sortie annexe de boîte, elle réagit selon la règle de la chaîne.



Petit bilan

On a obtenu un système relativement symétrique :

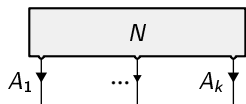
- ▶ qui permet d'exprimer la notion de ressources
- ▶ qui permet d'exprimer la logique linéaire et sa promotion
- ▶ qui est localement confluent
- ▶ qui possède une sémantique dénotationnelle (modèle relationnel)
- ▶ qui (probablement) normalise
[?] *Intuitionistic Differential Nets*.
- ▶ qui est exprimable sous forme de séquents

Sémantique relationnelle

Un peu de sémantique dénotationnelle.

- ▶ Pour chaque type de base X on se donne un support $|X|$.
- ▶ Le support du type $!A$ (et $?A$) est $\mathcal{M} |A|$.

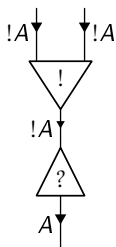
On interprète alors un réseau



dans l'ensemble des parties de $|A_1| \times \dots \times |A_n|$.

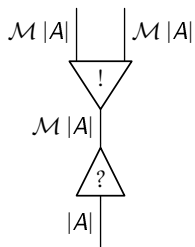
Sémantique relationnelle

- Pour cela, on fait des expériences.



Sémantique relationnelle

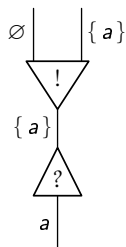
- Pour cela, on fait des expériences.



$$\mathcal{M} |A| \times \mathcal{M} |A| \times |A|$$

Sémantique relationnelle

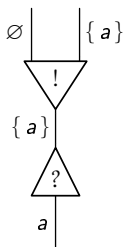
- Pour cela, on fait des expériences.



$$\mathcal{M} |A| \times \mathcal{M} |A| \times |A|$$

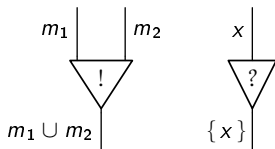
Sémantique relationnelle

- Pour cela, on fait des expériences.



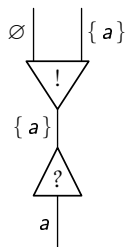
$$\mathcal{M} \mid A \mid \times \mathcal{M} \mid A \mid \times \mid A \mid$$

- Interprétation des nœuds :



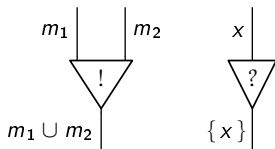
Sémantique relationnelle

- Pour cela, on fait des expériences.



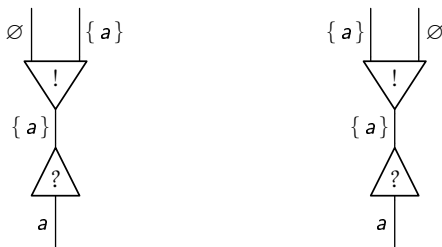
$$(\emptyset, \{a\}, a) \in \mathcal{M} |A| \times \mathcal{M} |A| \times |A|$$

- Interprétation des nœuds :



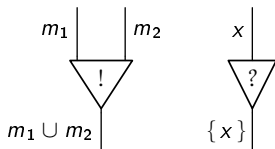
Sémantique relationnelle

- Pour cela, on fait des expériences.



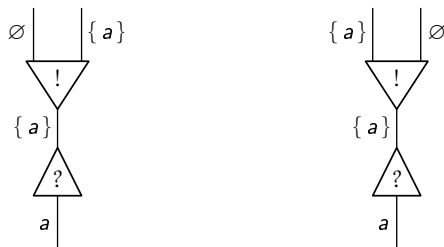
$$(\emptyset, \{a\}, a) \in \mathcal{M} |A| \times \mathcal{M} |A| \times |A|$$

- Interprétation des nœuds :



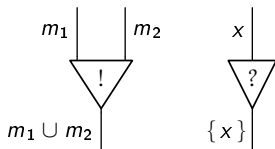
Sémantique relationnelle

- Pour cela, on fait des expériences.



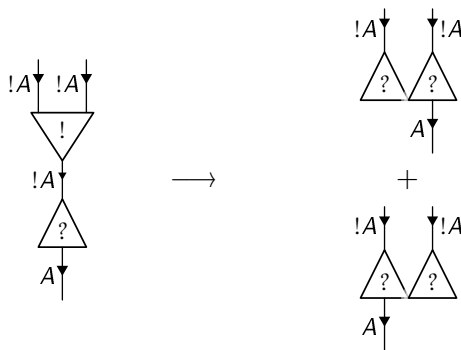
$$(\emptyset, \{a\}, a), (\{a\}, \emptyset, a)$$

- Interprétation des nœuds :



Sémantique relationnelle

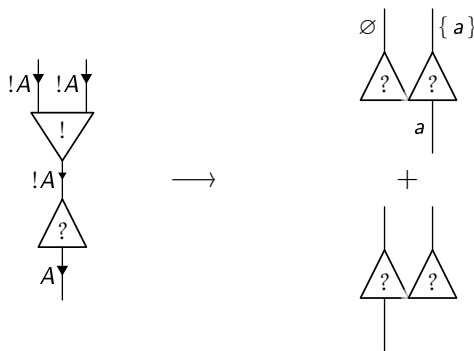
- Cette sémantique est dénotationnelle :



$(\emptyset, \{a\}, a), (\{a\}, \emptyset, a)$

Sémantique relationnelle

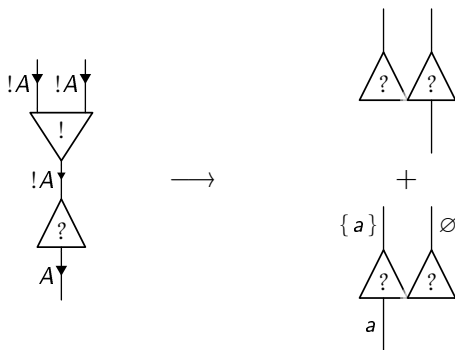
- Cette sémantique est dénotationnelle :



$(\emptyset, \{a\}, a), (\{a\}, \emptyset, a)$

Sémantique relationnelle

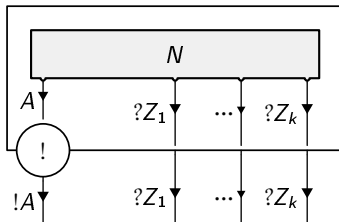
- Cette sémantique est dénotationnelle :



$(\emptyset, \{a\}, a), (\{a\}, \emptyset, a)$

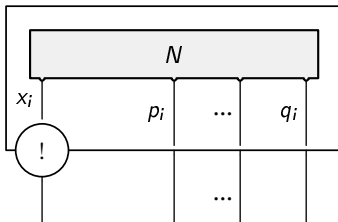
Sémantique relationnelle

- Interprétation des boîtes :



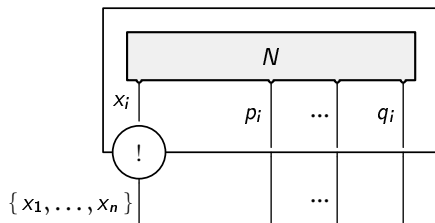
Sémantique relationnelle

- Interprétation des boîtes :



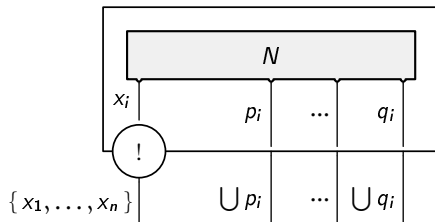
Sémantique relationnelle

- Interprétation des boîtes :



Sémantique relationnelle

- Interprétation des boîtes :



λ -calcul avec ressources avec promotion

Logique linéaire différentielle avec promotion

Super-promotion

Super-promotion dans le λ -calcul

Le λ -calcul avec ressources et la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \\ 0 \mid t + t$$

promotion $\Delta_!$ est défini grâce à

$$T ::= 1 \mid TT \mid t \mid t! \\ 0 \mid T + T$$

Super-promotion dans le λ -calcul

Le λ -calcul avec ressources et **super-promotion** $\Delta_!$ est défini grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \qquad T ::= 1 \mid TT \mid t \mid \textcolor{red}{T}!$$
$$0 \mid t + t \qquad 0 \mid T + T$$

Super-promotion dans le λ -calcul

Le λ -calcul avec ressources et **super-promotion** $\Delta_!$ est défini grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= \frac{x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T}{0 \mid t + t} \qquad T ::= \frac{1 \mid TT \mid t \mid \textcolor{red}{T}!}{0 \mid T + T}$$

- On peut exprimer des paquets de ressources de la forme $(uv)!$ ou même $(w!)!$.

Super-promotion dans le λ -calcul

Le λ -calcul avec ressources et **super-promotion** $\Delta_!$ est défini grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= \begin{array}{c} x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \\ 0 \mid t + t \end{array} \quad T ::= \begin{array}{c} 1 \mid TT \mid t \mid \textcolor{red}{T}! \\ 0 \mid T + T \end{array}$$

- ▶ On peut exprimer des paquets de ressources de la forme $(uv)^!$ ou même $(w^!)^!$.
- ▶ Mais il n'est pas simple de trouver une notion pertinente de réduction dans ce calcul.

$$\langle \lambda x. t \rangle U^! R \longrightarrow \langle \lambda x. t \rangle R + \langle \lambda x. t \rangle UU^! R$$

Super-promotion dans le λ -calcul

Le λ -calcul avec ressources et **super-promotion** $\Delta_!$ est défini grâce à la syntaxe suivante :

$$t ::= x \mid \lambda x. t \mid \langle t \rangle T \quad T ::= 1 \mid TT \mid t \mid \textcolor{red}{T}!$$
$$0 \mid t + t \quad 0 \mid T + T$$

- ▶ On peut exprimer des paquets de ressources de la forme $(uv)!$ ou même $(w!)!$.
- ▶ Mais il n'est pas simple de trouver une notion de réduction dans ce calcul.

$$\langle \lambda x. t \rangle U!R \longrightarrow \langle \lambda x. t \rangle R + \langle \lambda x. t \rangle UU!R$$



Autre motivation : Réplication dans le π -calcul

Le π -calcul se code dans les réseaux d'interaction différentiels.

- ▶ [?] *Interpreting a Finitary Pi-Calculus in Differential Interaction Nets.*

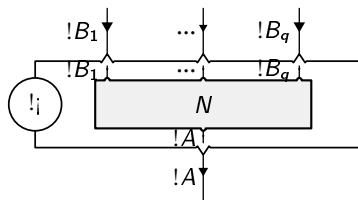
Un terme du π -calcul qui interagit sur des canaux $x_1, \dots, x_n$ est codé en un réseau dont l'interface est constituée de n paires de fils de type $!o$ et $?o^\perp$.

- ▶ La réplication gardée $!a(x_1, \dots, x_n).P$ peut être exprimée en ajoutant la promotion au système.
- ▶ La réplication $!P \equiv !P \mid P$ nécessite l'introduction de la super-promotion.

$$!(\bar{a} \mid \bar{b})$$

Boîtes de super-promotion

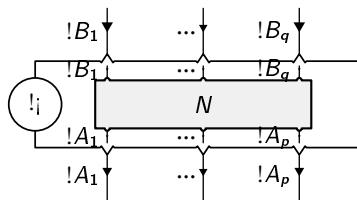
Dans les réseaux, la super-promotion s'exprime à l'aide de boîtes particulières :



- ▶ Les entrées se comportent comme les entrées des boîtes de promotion habituelles.
- ▶ Les sorties se comportent de façon duale.

Boîtes de super-promotion

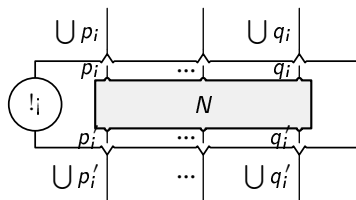
Dans les réseaux, la super-promotion s'exprime à l'aide de boîtes particulières :



- ▶ Les entrées se comportent comme les entrées des boîtes de promotion habituelles.
- ▶ Les sorties se comportent de façon duale.

Boîtes de super-promotion

Dans les réseaux, la super-promotion s'exprime à l'aide de boîtes particulières :



- ▶ Les entrées se comportent comme les entrées des boîtes de promotion habituelles.
- ▶ Les sorties se comportent de façon duale.

Boîtes de réplication

Dans les réseaux on peut définir des règles de réduction pour les boîtes de super-promotion,

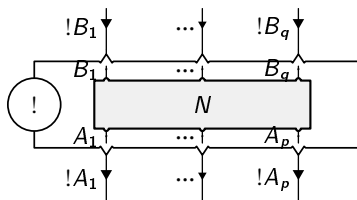
Boîtes de réplication

Dans les réseaux on peut définir des règles de réduction pour les boîtes de super-promotion, mais il est préférable de les découper en constructions plus atomiques.

Boîtes de réplication

Dans les réseaux on peut définir des règles de réduction pour les boîtes de super-promotion, mais il est préférable de les découper en constructions plus atomiques.

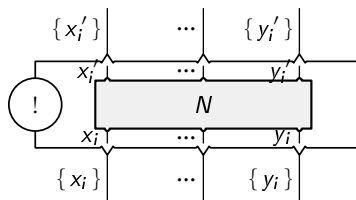
- Ces boîtes peuvent comme la promotion, s'exprimer à partir de leurs homologues fonctorielles :



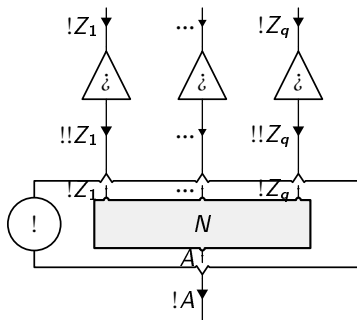
Boîtes de réplication

Dans les réseaux on peut définir des règles de réduction pour les boîtes de super-promotion, mais il est préférable de les découper en constructions plus atomiques.

- Ces boîtes peuvent comme la promotion, s'exprimer à partir de leurs homologues fonctorielles :

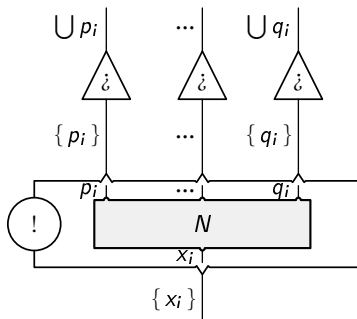


- La promotion se code :



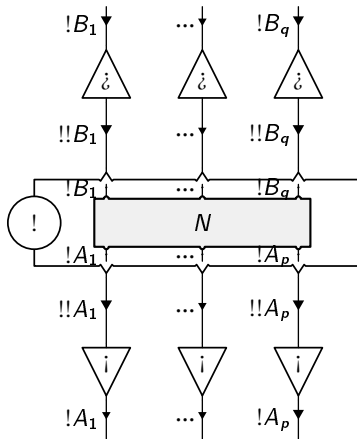
en utilisant la construction *enfouissement*.

- La promotion se code :



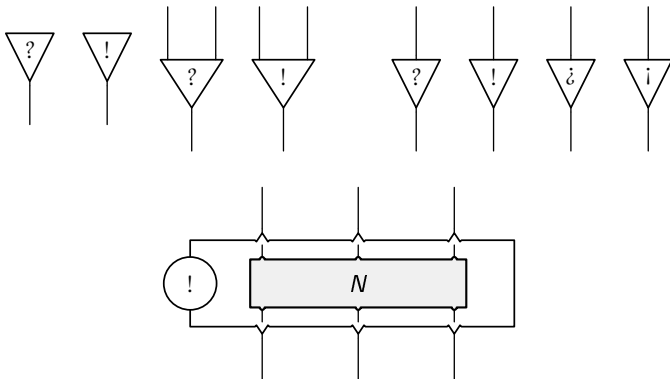
en utilisant la construction *enfouissement*.

- Et la super-promotion se code :

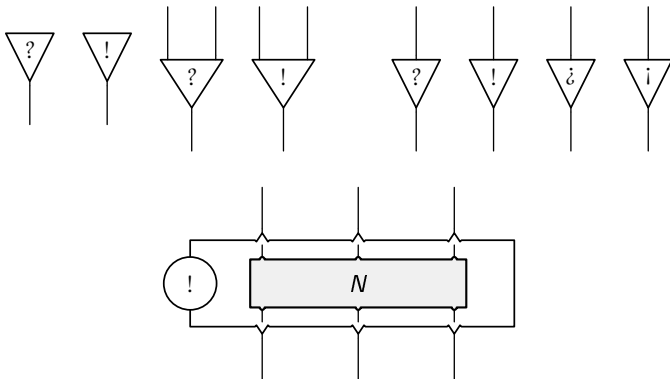


il suffit de rajouter la construction *co-enfouissement*.

On va étudier le système composé des ingrédients suivants :

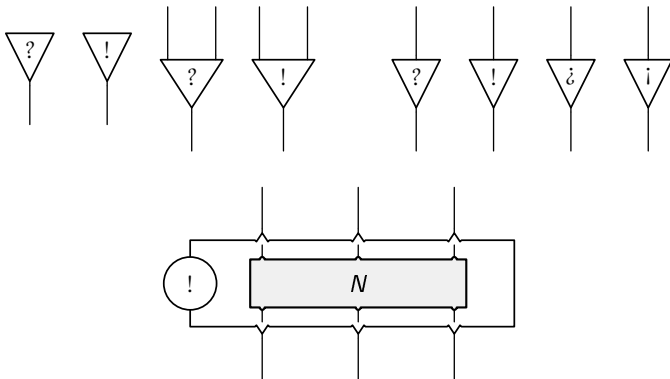


On va étudier le système composé des ingrédients suivants :



On connaît les $3 \times 3 = 9$ règles habituelles des réseaux d'interaction.

On va étudier le système composé des ingrédients suivants :

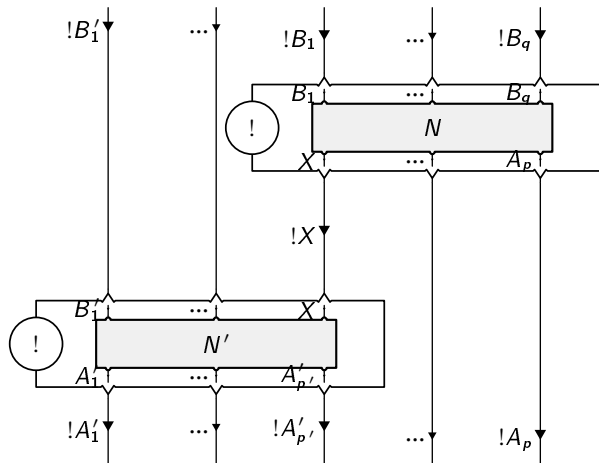


On connaît les $3 \times 3 = 9$ règles habituelles des réseaux d'interaction.
Ce système possède $5 \times 5 =$ 'beaucoup' règles.

...parlons d'abord des boîtes :

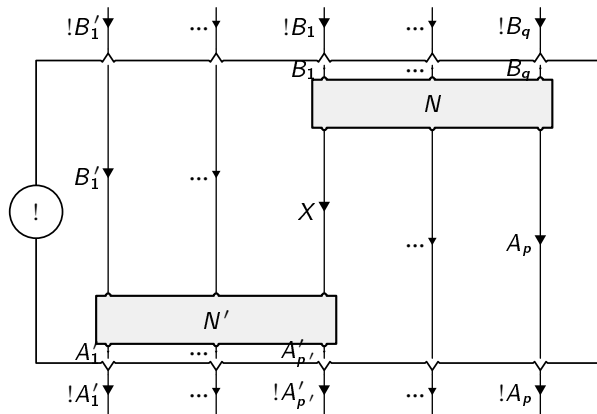
Réplication — Réplication

Deux boîtes de réplication qui se rencontrent fusionnent :

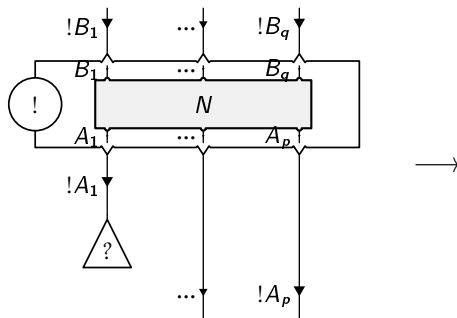


Réplication — Réplication

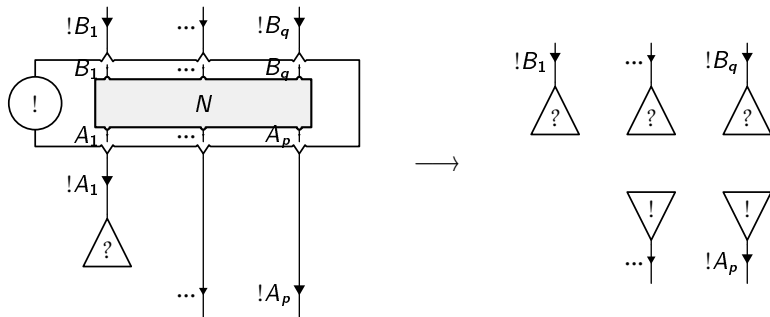
Deux boîtes de réplication qui se rencontrent fusionnent :



Une boîte de réplication se fait effacer par un *affaiblissement*.

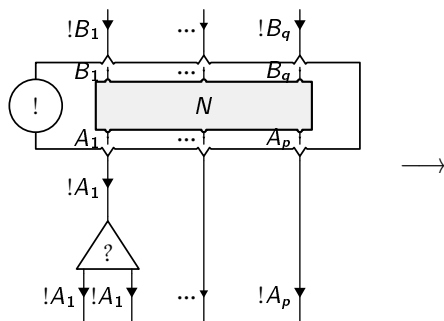


Une boîte de réplication se fait effacer par un *affaiblissement*.



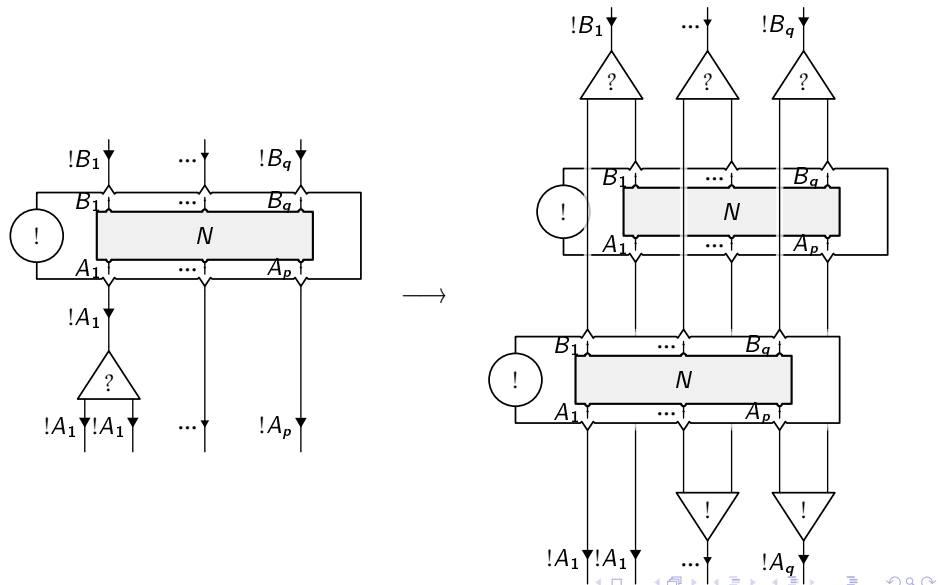
Contraction — Réplication

Une boîte de réplication se fait dupliquer par une *contraction*.

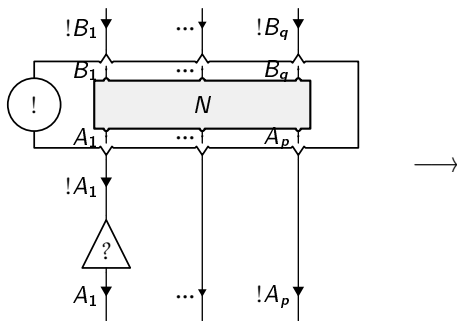


Contraction — Réplication

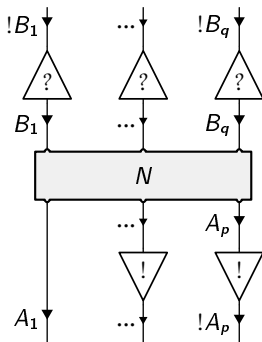
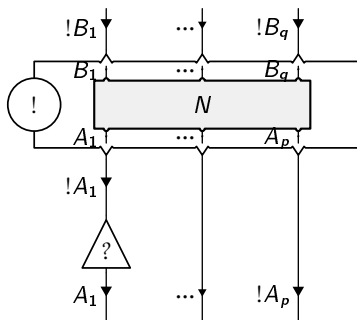
Une boîte de réplication se fait dupliquer par une *contraction*.



Une boîte de réplication se fait ouvrir par une *déréliction*.

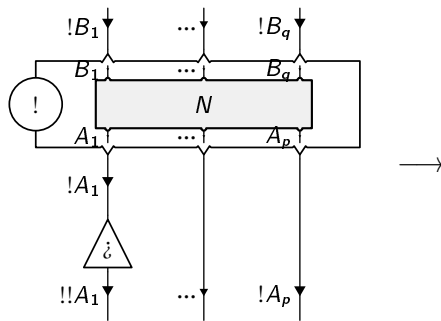


Une boîte de réplication se fait ouvrir par une *déréliction*.



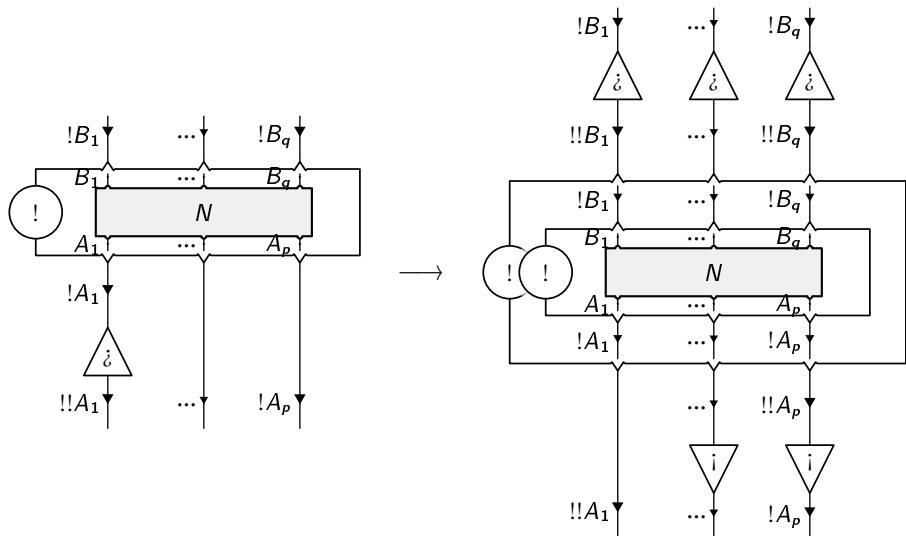
Enfouissement — Réplication

Une boîte de réplication fonctorielle se fait dédoubler par un *enfouissement*.



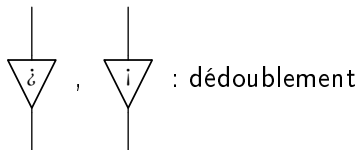
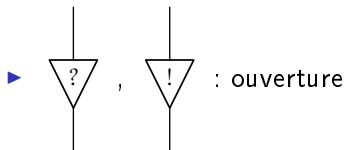
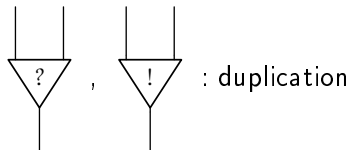
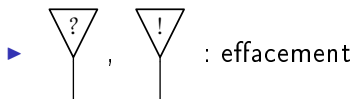
Enfouissement — Réplication

Une boîte de réplication fonctorielle se fait dédoubler par un enfouissement.



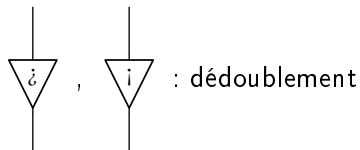
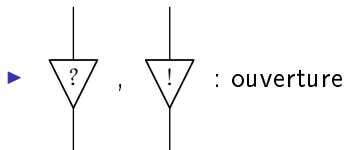
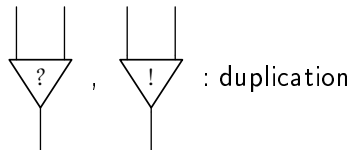
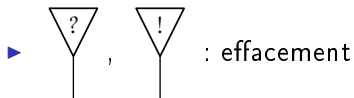
en résumé, face aux boîtes :

- ▶ une autre boîte fusionne



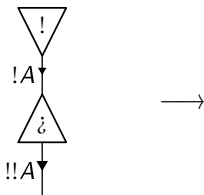
en résumé, face aux boîtes :

- ▶ une autre boîte fusionne

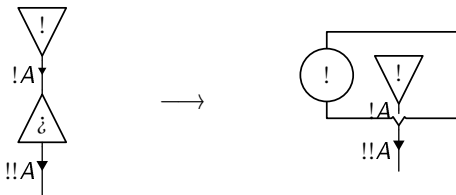


...mais que fait l'enfouissement face aux autres opérateurs ?

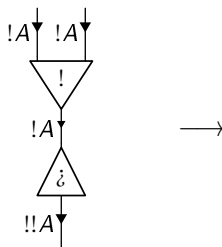
Une façon de deviner cette interaction consiste à remarquer qu'un *co-affaiblissement* est équivalent à un réseau nul dans une boîte.



Une façon de deviner cette interaction consiste à remarquer qu'un *co-affaiblissement* est équivalent à un réseau nul dans une boîte.

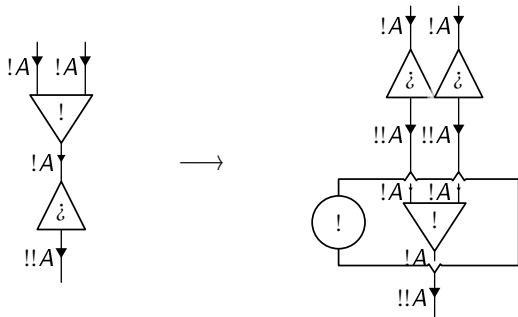


Lorsqu'il s'agit de l'opérateur binaire *co-contraction*...



Co-contraction — Enfouissement

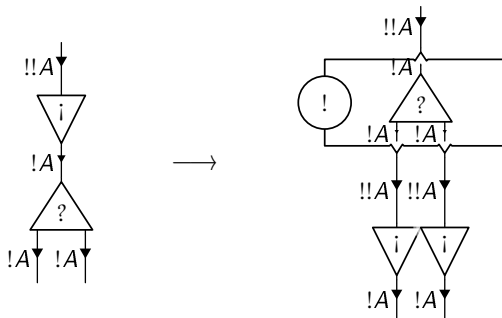
Lorsqu'il s'agit de l'opérateur binaire *co-contraction*...



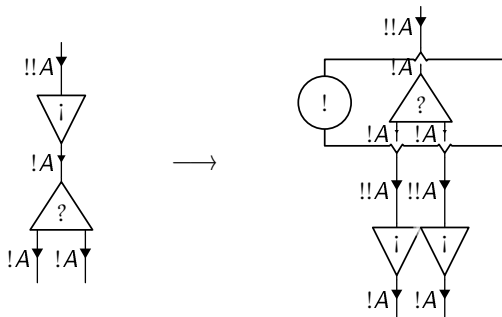
- ▶ Les règles duales sont symétriques.

- ▶ Les règles duales sont symétriques.
- ▶ En particulier, les réductions *co-enfouissement* – *contraction* et *co-enfouissement* – *affaiblissement* font qu'il est nécessaire de considérer des boîtes à plusieurs sorties.

- ▶ Les règles duales sont symétriques.
- ▶ En particulier, les réductions *co-enfouissement* – *contraction* et *co-enfouissement* – *affaiblissement* font qu'il est nécessaire de considérer des boîtes à plusieurs sorties.



- ▶ Les règles duales sont symétriques.
- ▶ En particulier, les réductions *co-enfouissement* – *contraction* et *co-enfouissement* – *affaiblissement* font qu'il est nécessaire de considérer des boîtes à plusieurs sorties.



- ▶ Avec de telles règles on sort du cadre du calcul des séquents.

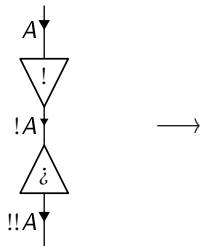
on a vu :

- ▶ co-affaiblissement – enfouissement (+duale)
- ▶ co-contraction – enfouissement (+duale)

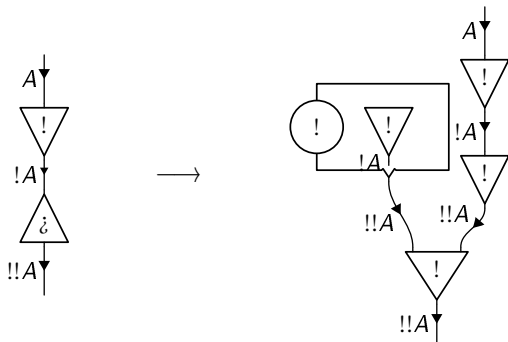
...il ne nous reste plus que deux règles à expliciter :

- ▶ co-déréliction – enfouissement (+duale)
- ▶ co-enfouissement – enfouissement

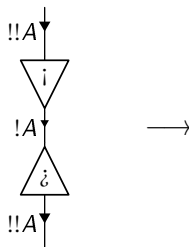
Cette règle décrit une réduction locale qui correspond à la règle de la chaîne.



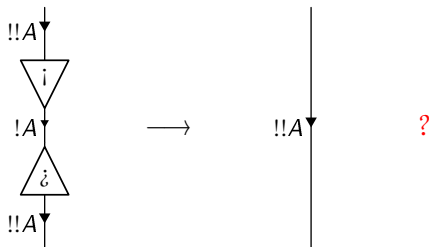
Cette règle décrit une réduction locale qui correspond à la règle de la chaîne.



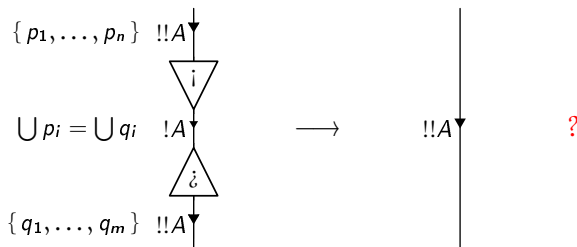
Co-enfouissement — Enfouissement



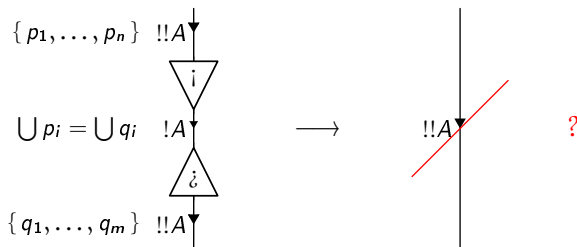
Co-enfouissement — Enfouissement



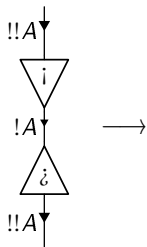
Co-enfouissement — Enfouissement



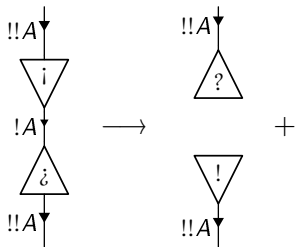
Co-enfouissement — Enfouissement



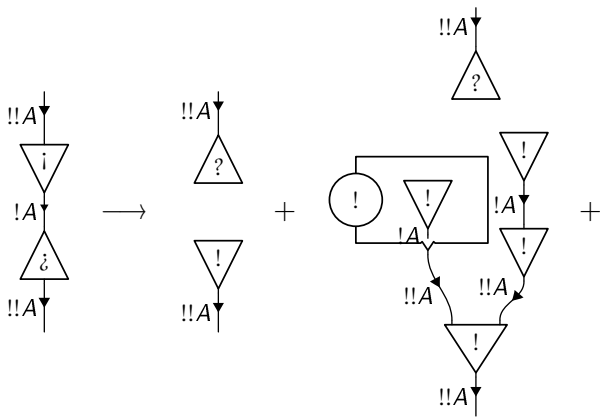
Co-enfouissement — Enfouissement



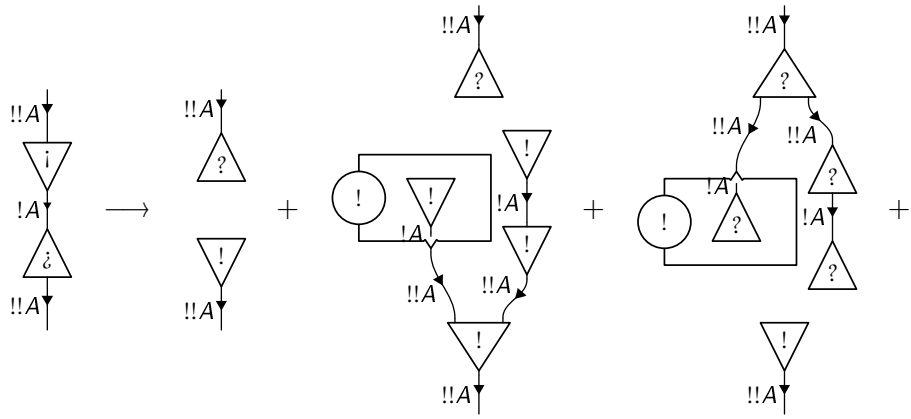
Co-enfouissement — Enfouissement



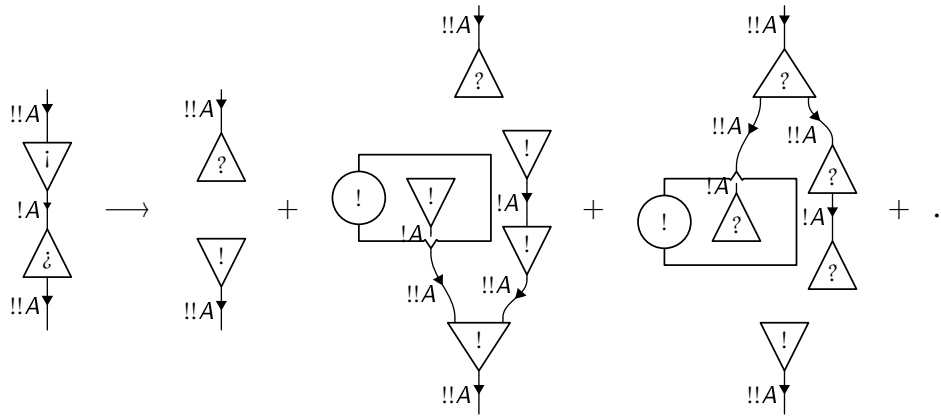
Co-enfouissement — Enfouissement

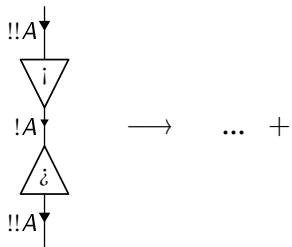


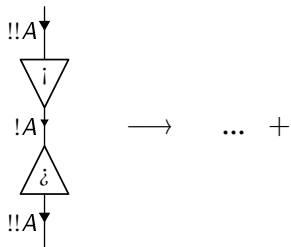
Co-enfouissement — Enfouissement



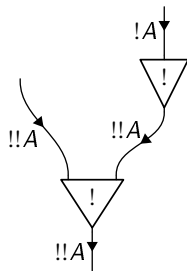
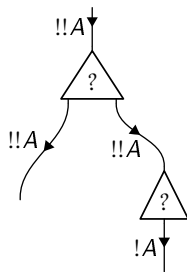
Co-enfouissement — Enfouissement

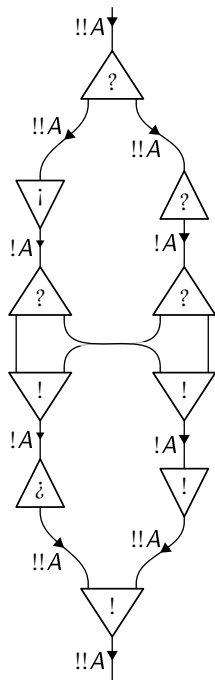
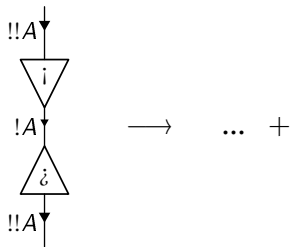






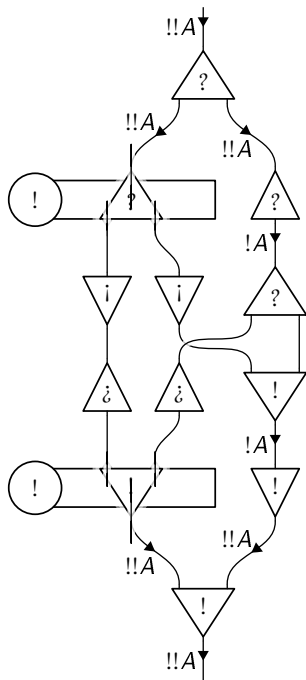
$\longrightarrow \dots +$







$\longrightarrow \dots +$





Bilan

On a décrit un système :

- ▶ qui étend le système des réseaux d'interaction
- ▶ qui permet d'exprimer la logique linéaire et sa promotion
- ▶ qui permet d'exprimer la super-promotion
- ▶ qui est entièrement symétrique
- ▶ qui est localement confluent
- ▶ qui possède une sémantique dénotationnelle (modèle relationnel)
- ▶ qui (probablement) normalise si on gèle l'interaction problématique i.e. *enfouissement* – *co-enfouissement*
- ▶ qui n'est pas exprimable sous forme de séquents

Bilan

On a décrit un système :

- ▶ qui étend le système des réseaux d'interaction
- ▶ qui permet d'exprimer la logique linéaire et sa promotion
- ▶ qui permet d'exprimer la super-promotion
- ▶ qui est entièrement symétrique
- ▶ qui est localement confluent
- ▶ qui possède une sémantique dénotationnelle (modèle relationnel)
- ▶ qui (probablement) normalise si on gèle l'interaction problématique i.e. *enfouissement* – *co-enfouissement*
- ▶ qui n'est pas exprimable sous forme de séquents

merci !