Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Algèbre homologique/*Homological Algebra*

Lambda-opérations et homologie des matrices

Philippe GAUCHER

Résumé – On étend les λ-opérations sur l'homologie cyclique de A à l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathrm{gl}_\infty(\mathrm{A})$ à l'aide des puissances extérieures de matrices. On exhibe une formule exprimant le comportement de celles-ci par rapport à la somme directe des matrices. Cette formule fait intervenir le coproduit ainsi que le surproduit induit par le produit tensoriel de matrices [3].

Lambda-operations and homology of matrices

Abstract – *One extends λ-operations from the cyclic homology of* A *to the homology of the Lie algebra* $\mathrm{gl}_\infty(\mathrm{A})$ *using exterior powers of matrices. One shows a formula giving their behavior with respect to the direct sum of matrices. It uses the coproduct and the "overproduct" induced by the tensor product of matrices* [3].

0. INTRODUCTION. – Les λ-opérations de l'homologie cyclique d'une k-algèbre commutative et unitaire A (k un corps de caractéristique 0) [7] s'étendent à l'algèbre de Hopf $\mathscr{L}=\mathrm{H}_*(\mathrm{gl}_\infty(\mathrm{A}), k)$, le produit étant induit par la somme directe des matrices. On a montré dans [3] que le produit de Loday-Quillen s'étend en le surproduit induit par le produit tensoriel de matrices. On va donner des formules exprimant le comportement de ces λ-opérations avec le produit et le surproduit. Dans la quatrième partie, on montre le lien avec les formules classiques sur les λ-opérations. On notera $\binom{n}{k}=n!/(k!(n-k)!)$ le coefficient binomial.

1. ALGÈBRE DE HOPF AVEC SURPRODUIT (AHS). – Une algèbre de Hopf avec surproduit $\mathscr{H}$ est une algèbre de Hopf ((co)unitaire et (co)commutative) munie d'un produit supplémentaire noté $\tilde{\otimes}$ compatible avec le coproduit et tel que

$$x\,\tilde{\otimes}\,(yz)=\Sigma_{(x)}(x_{(1)}\,\tilde{\otimes}\,y)(x_{(2)}\,\tilde{\otimes}\,z),$$
$$x\,\tilde{\otimes}\,y=\mathrm{S}(x)\,\tilde{\otimes}\,\mathrm{S}(y),$$
$$x\,\tilde{\otimes}\,1=1\,\tilde{\otimes}\,x=uc(x),$$

où $\Delta(x)=\Sigma x_{(1)}\otimes x_{(2)}$ est le coproduit, u l'unité, c la coünité et S l'antipode. On posera $\mu(x\otimes y)=xy$ (le produit de x et y). L'AHS sera dite unitaire si son surproduit l'est. On sait que le produit tensoriel de matrices induit sur $\mathscr{L}$ un surproduit non unitaire [3] étendant le produit de Loday-Quillen de $\mathrm{HC}_{*-1}(\mathrm{A})$. Deux autres exemples d'AHS sont donnés par les algèbres de Hopf $k[(\mathrm{R}, +)]$ et $k[(\mathrm{R}, +)]^\wedge$ (complété par l'idéal d'augmentation) où le surproduit est induit par le produit de R qui est ici un anneau commutatif. Si f et g sont dans $\mathrm{End}_{k\text{-lin}}(\mathscr{H})$ (*i.e.* les endomorphismes k-linéaires d'une AHS $\mathscr{H}$), on note $f\oplus g=\mu(f\otimes g)\Delta$ et $f\otimes g=\tilde{\otimes}\,(f\otimes g)\Delta$. On rappelle que $(\mathrm{End}_{k-\mathrm{lin}}(\mathscr{H}), +, \oplus)$ est une k-algèbre de neutre uc et que $(\mathrm{End}_{k\text{-}Cbre}(\mathscr{H}), \oplus, \otimes)$ (*i.e.* les endomorphismes de cogèbres) est un anneau [3].

2. LES λ-OPÉRATIONS SUR $\mathscr{L}$. – Sur l'homologie de $\mathrm{gl}_\infty(\mathrm{A})$ à coefficients triviaux [1], on définit des λ-opérations de la façon suivante. Le foncteur algèbre extérieure k fois, noté Λ^k, permet de construire des morphismes d'algèbres de Lie Λ_n^k de $\mathrm{gl}_n(\mathrm{A})$ dans $\mathrm{gl}_\infty(\mathrm{A})$ en associant à α de $\mathrm{gl}_n(\mathrm{A})$ l'élément de $\mathrm{gl}(\Lambda^k\mathrm{A}^n)$ qui envoie $v_1\wedge\ldots\wedge v_k$ sur

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/91/03130663 $ 2.00

$\sum_{i=1,\ldots,k} v_1 \wedge \ldots \wedge \alpha v_i \wedge \ldots \wedge v_k$ et en plongeant $\mathfrak{gl}(\Lambda^k A^n)$ dans $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ par choix d'une base. Le morphisme de cogèbres induit $(\Lambda_n^k)_*$ de $H_*(\mathfrak{gl}_n(A), k)$ dans $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), k)$ est indépendant de ce choix. A partir de [7] et en utilisant le construction $\underline{\theta}$ de [3], on montre :

Proposition 2.1. — *On considère les morphismes de cogèbres de* $H_*(\mathfrak{gl}_n(A), k)$ *dans* $\mathscr{L}=H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), k)$

$$a_n^k = \oplus_{i \text{ impair} < k} (\Lambda_n^{k-i})_*^{\oplus \binom{n-1+i}{i}} \quad et \quad b_n^k = \oplus_{i \text{ pair} < k} (\Lambda_n^{k-i})_*^{\oplus \binom{n-1+i}{i}}$$

($f^{\oplus n}$ *désignant* $f\oplus\ldots\oplus f$ *(n fois)). Alors* $a_n^k \underline{\theta}\, b_n^k$ *est compatible avec le système inductif convergeant vers* $\mathscr{L}$. *En passant à la limite inductive, on obtient un morphisme de cogèbres noté* λ^k. ■

Remarque. — La restriction à la partie primitive redonne les λ-opérations sur l'homologie cyclique [7].

3. Comportement des λ-opérations sur $\mathscr{L}$. — On va élucider maintenant le comportement de ces λ-opérations avec le produit et le surproduit ainsi que la façon dont elles se composent entre elles. On fera le lien avec les λ-anneaux au paragraphe suivant.

Théorème 3.1. — *Soient x et y deux éléments de* $\mathscr{L}=H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), k)$, *f et g deux éléments de* $\mathrm{End}_{k-\mathscr{C}bre}(\mathscr{L})$. *Alors on a :*

$$\lambda^k(xy)=\Sigma_{(x)(y)}(\lambda^1(x_{(1)})\tilde{\otimes}\lambda^{k-1}(y_{(1)}))\ldots(\lambda^{k-1}(x_{(k-1)})\tilde{\otimes}\lambda^1(y_{(k-1)}))\lambda^k(x_{(k)})\lambda^k(y_{(k)}),$$

$$\lambda^k(f\oplus g)=\lambda^k f\oplus\lambda^k g\oplus\oplus_{i+j=k,\, i\neq 0,\, j\neq 0}\lambda^i f\otimes\lambda^j g. \quad ■$$

Théorème 3.2. — *Avec les mêmes hypothèses, on a :*

$$\lambda^k(x\tilde{\otimes}y)=P_k(\lambda^1 i_1, \ldots, \lambda^k i_1; \lambda^1 i_2, \ldots, \lambda^k i_2)(x\otimes y),$$

$$\lambda^k(f\otimes g)=P_k(\lambda^1 f, \ldots, \lambda^k f, \lambda^1 g, \ldots, \lambda^k g),$$

où P_k *est le polynôme universel classique apparaissant dans la définition des* λ*-anneaux* [5] *et où* $i_1(x\otimes y_1\ldots y_q)=0$ *(les* y_i *étant primitifs et* $q\geqq 1$), $i_1(x\otimes 1)=x$, $i_2(x\otimes y)=i_1(y\otimes x)$ *et où, dans* P_k, *la somme est remplacée par* $\oplus$ *et le produit par* $\otimes$ *(des produits de convolution de fonctions allant de* $\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}$ *dans* $\mathscr{L}$). ■

Théorème 3.3. — *Avec les mêmes hypothèses, on a :*

$$\lambda^k(\lambda^{k'}(x))=P_{k,k'}(\lambda^1, \ldots, \lambda^{kk'})(x),$$

$$\lambda^k\lambda^{k'}f=P_{k,k'}(\lambda^1 f, \ldots, \lambda^{kk'}f),$$

où $P_{k,k'}$ *est le polynôme universel apparaissant dans la définition des* λ*-anneaux* [5] *et où, dans* $P_{k,k'}$, *la somme est remplacée par* $\oplus$ *et le produit par* $\otimes$. ■

4. Comparaison avec les formules classiques sur les λ-opérations. — L'AHS $\mathscr{L}$ considérée précédemment n'est pas unitaire. Introduisons l'AHS suivante notée $\mathscr{L}_+$: en tant qu'algèbre de Hopf c'est $k[\mathbb{Z}]\otimes\mathscr{L}$; le surproduit de $[m]\otimes x$ et $[n]\otimes y$ vaut

$$\Sigma_{(x)(y)}[mn]\otimes(x_{(1)}\ldots x_{(n)}y_{(1)}\ldots y_{(m)}(x_{(n+1)}\tilde{\otimes}y_{(m+1)}))$$

pour m et $n\geqq 0$,

$$\Sigma_{(x)(y)}[mn]\otimes(x_{(1)}\ldots x_{(n)}S(y_{(1)})\ldots S(y_{(-m)})(x_{(n+1)}\tilde{\otimes}S(y_{(-m+1)})))$$

pour $m<0$ et $n\geqq 0$,

$$\Sigma_{(x)(y)}[mn]\otimes(S(x_{(1)})\ldots S(x_{(-n)})y_{(1)}\ldots y_{(m)}(S(x_{(-n+1)})\tilde{\otimes}y_{(m+1)}))$$

pour $m \geqq 0$ et $n<0$,

$$\Sigma_{(x)(y)}[mn] \otimes (S(x_{(1)}) \ldots S(x_{(-n)}) S(y_{(1)}) \ldots S(y_{(-m)}) (S(x_{(-n+1)}) \tilde{\otimes} S(y_{(-m+1)})))$$

pour m et $n<0$.

Soit σ la surjection canonique de $\mathscr{L}_+$ dans $\mathscr{L}$ qui à $[m] \otimes x$ associe x et τ l'injection canonique qui à x associe $[0] \otimes x$ (morphismes d'algèbres de Hopf seulement). Alors $\mathscr{L}_+$ est une AHS unitaire de neutre $[1] \otimes 1 = e([0] \otimes 1$ reste le neutre du produit). On est alors en mesure d'énoncer le

LEMME 4.1. — *Soient* $(\mu^k)_{k \geqq 0}$ *et* $(\nu^k)_{k \geqq 0}$ *deux familles de morphismes de cogèbres définies respectivement sur* $\mathscr{L}$ *et sur* $\mathscr{L}_+$ *telles que*

$$\nu^k(e^m) = e^{\binom{m}{k}}, \qquad \nu^k(e^m x) = \Sigma_{(x)} \prod_{i+j=k} e^{\binom{m}{i}} \tilde{\otimes} \nu^j(x_{(i+1)}),$$

$$\nu^k(x) = \tau\mu^k(x) \quad (k>0), \qquad \nu^0(x) = [1] \otimes \mu^0(x)$$

pour tout x *dans* $\mathscr{L}$ *de longueur* $\geqq 1$, *et*

$$\mu^k(x) = \sigma\nu^k\tau(x)$$

pour tout x *dans* $\mathscr{L}$.

Alors les $(\mu^k)_{k \geqq 0}$ *vérifient les formules du théorème* (3.1) *si et seulement si*

$$\nu^k(xy) = \Sigma_{(x)(y)} (\nu^0(x_{(1)}) \tilde{\otimes} \nu^k(y_{(1)})) \ldots (\nu^k(x_{(k+1)}) \tilde{\otimes} \nu^0(y_{(k+1)}))$$

pour tout x *et* y *dans* $\mathscr{L}_+$. ■

THÉORÈME 4.2. — *En prenant pour* $(\mu^k)_{k \geqq 0}$ *la famille des* λ*-opérations définies ci-dessus sur* $\mathscr{L}$, *et en posant* $\nu^k = \lambda^k$ *on obtient que l'opération* $\lambda^k(f) = \lambda^k f$ *munit l'anneau* $(\mathrm{End}_{k\text{-}Cbre}(\mathscr{L}_+), \oplus, \otimes)$ *d'une structure de* λ*-anneau spécial. Sur* $\mathscr{L}_+$, *on a de plus les formules suivantes :*

(1) $$\lambda^k(xy) = \Sigma_{(x)(y)} (\lambda^0(x_{(1)}) \tilde{\otimes} \lambda^k(y_{(1)})) \ldots (\lambda^k(x_{(k+1)}) \tilde{\otimes} \lambda^0(y_{(k+1)})),$$

(2) $$\lambda^k(x \tilde{\otimes} y) = P_k(\lambda^1 i_1, \ldots, \lambda^k i_1; \lambda^1 i_2, \ldots, \lambda^k i_2)(x \otimes y),$$

(3) $$\lambda^k(\lambda^{k'}(x)) = P_{k,k'}(\lambda^1, \ldots, \lambda^{kk'})(x),$$

x et y étant dans $\mathscr{L}_+$. ■

L'AHS $k[R]$ introduite au paragraphe 1 est unitaire et on a le

THÉORÈME 4.3. — *Si* R *est un* λ*-anneau spécial,* $k[R]$ *est une AHS munie de* λ*-opérations de manière évidente et l'opération* $\lambda^k(f) = \lambda^k f$ *fait de l'anneau* $(\mathrm{End}_{k\text{-}Cbre}(k[R]), \oplus, \otimes)$ *un* λ*-anneau spécial. Les formules* (1) (2) *et* (3) *sont également vraies sur* $k[R]$. ■

Remarque. — Les formules (1) (2) et (3) sur $k[R]$ appliquées à des éléments « group-like » (*i.e.* si $\Delta(x) = x \otimes x$) redonnent les formules classiques sur les λ-anneaux. Par exemple (1) devient pour des éléments « group-like » x et y de $k[R]$ (qui sont dans R car k est intègre) :

$$\lambda^k(xy) = (\lambda^0(x) \tilde{\otimes} \lambda^k(y)) \ldots (\lambda^k(x) \tilde{\otimes} \lambda^0(y)).$$

On peut aussi remarquer que tout ce qui a été dit sur $k[R]$ peut être dit pour $k[R]^\wedge$ (le complété de $k[R]$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, $\mathfrak{m}$ étant l'idéal d'augmentation). Il suffit pour cela de vérifier que les λ-opérations sont continues pour cette topologie.

5. EXTENSION DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS. — Tous les résultats ci-dessus sont encore valables si l'on remplace l'homologie de $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ par son homologie non-commutative [6]. L'homologie cyclique de A est alors remplacée par l'homologie de Hochschild de A [2]

et les λ-opérations induites coïncident avec celles déjà connues [6]. De même, on peut remplacer l'homologie de $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ par celle du groupe $GL_\infty(A)$ et alors l'homologie cyclique de A devient la K-théorie algébrique de A munie de ses λ-opérations usuelles [4].

Note remise le 15 juin 1991, acceptée le 19 juillet 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[2] C. CUVIER, Homologie de Leibniz et Homologie de Hochschild, *C. R. Acad. Sci. Paris* (à paraître).

[3] P. GAUCHER, Produit Tensoriel de Matrices et Homologie Cyclique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 312, série I, 1991, p. 13-16.

[4] C. KRATZER, Lambda-structure en K-théorie Algébrique, *Com. Math. Helv.*, 55, 1980, p. 233-254.

[5] S. LANG et W. FULTON, *Riemann-Roch Algebra*, Springer, Berlin, 1985.

[6] J.-L. LODAY, *Cyclic Homology* (à paraître).

[7] J.-L. LODAY et C. PROCESI, Cyclic Homology and Lambda-Operations, in *Alg. K-theory: Connection with Geom. and Topology*, N.A.T.O. A.S.I. Series C, 279, 1989, p. 209-224.

Institut de Recherche Mathématique avancée, Université Louis-Pasteur et C.N.R.S.,
7, *rue Descartes*, 67084 *Strasbourg.*