K-Theory **13:** 151–167, 1998.

Lambda-opérations sur l'homologie d'une algèbre de Lie de matrices

(Lambda Operations on the Homology of a Lie Algebra of Matrices)

PHILIPPE GAUCHER
Institut de Recherche Mathématique Avancée, ULP et CNRS, 7 Due René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France. e-mail: gaucher@math.u-strasbg.fr

(Received: February 1992)

Résumé. On étend les lambda-opérations de l'homologie cyclique de A à l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ à l'aide des puissances extérieures de matrices. On exhibe une formule exprimant le comportement de celles-ci par rapport à la somme directe des matrices. Cette formule fait intervenir le coproduit ainsi que le surproduit induit par le produit tensoriel de matrices.

Abstract. One extends lambda operations from the cyclic homology of A to the homology of the Lie algebra $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ using exterior powers of matrices. One shows a formula giving their behavior with respect to the direct sum of matrices. It uses the coproduct and the structure of ring objet induced by the tensor product of matrices.

Mathematics Subject Classifications (1991). 55Nxx, 18F25.

Key words: Lie algebra, homology, tensor product, exterior power, lambda ring, cyclic homology, Hopf algebra, algebraic K-theory, general linear group, convolution, ring object of a category

0. Introduction

Le propos de cet article est de définir des opérations λ^k pour $k \geqslant 0$ sur l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ à coefficients triviaux, notée $\mathrm{H}_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$, à l'aide des puissances extérieures de matrices, A étant une K-algèbre commutative sur un corps K de caractéristique 0, et d'en étudier les propriétés. En particulier, leur restriction à la partie primitive redonnera les opérations de Loday–Procesi sur l'homologie cyclique de A, notée $HC_{*-1}(A)$.

Dans toute la suite, tous les produits qui apparaîtront seront supposés être commutatifs et sauf mention du contraire, K sera un anneau commutatif unitaire quelconque. Soit V un K-module et $\mathrm{S}(V)$ l'algèbre symétrique de V sur K, i.e.

$$\mathrm{S}(V) \cong \frac{\bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}}{x \otimes y \Leftrightarrow y \otimes x,\ x, y \in V}.$$

On sait que $\mathrm{S}(\Leftrightarrow)$ est un foncteur allant de la catégorie des K-modules vers celle des algèbres de Hopf avec surproduit (AHS) [Ga] (les AHS sont en fait des objets en anneau de la catégorie des cogèbres cocommutatives [H]) . Dans une cogèbre, on note

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)},$$

le comultiplié de x,

$$\Delta_2(x) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(x) = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}$$

et, par récurrence sur $h \geqslant 1$,

$$\Delta_h(x) = (\mathrm{id}^{\otimes(h-1)} \otimes \Delta)\Delta_{h-1}(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes \cdots \otimes x_{(h+1)}.$$

C'est une notation classique qui permet de manier très facilement les axiomes de cogèbres [Ab].

Supposons qu'une K-algèbre libre unifère V soit munie d'une famille d'applications linéaires $(\lambda^k)_{k \geqslant 0}$. Alors il existe une et une seule famille de morphismes de cogèbres $(\lambda^k)_{k \geqslant 0}$ sur $\mathrm{S}\,(V)$ coïncidant après restriction à V avec celle que l'on s'est donnée sur V telle que

$$\begin{aligned} \lambda^k(xy) \; = \; & \sum_{(x)(y)} (\lambda^1(x_{(1)}) \widetilde{\otimes} \lambda^{k-1}(y_{(1)})) \dots \\ & \dots (\lambda^{k-1}(x_{(k-1)}) \widetilde{\otimes} \lambda^1(y_{(k-1)})) \lambda^k(x_{(k)}) \lambda^k(y_{(k)}), \end{aligned} \tag{1}$$

pour tout $k \geqslant 1$ et telle que $\lambda^0 = 1$ (1 désignant ici le neutre de la AHS $\mathrm{S}\,(V)$) et telle que $\lambda^1 = \mathrm{id}$, $\widetilde{\otimes}$ désignant le surproduit de la AHS [Ga], et x et y étant des éléments de $\mathrm{S}\,(V)$. Dans le cas où V est l'homologie cyclique $HC_{*-1}(A)$ d'une K-algèbre A (K étant maintenant un corps de caractéristique zéro) munie du produit de Loday–Quillen, alors les opérations λ^k de Loday–Procesi induisent sur la AHS graduée $\mathrm{S}^*_{\mathrm{gr}}(HC_{*-1}(A))$, $\mathrm{S}^*_{\mathrm{gr}}(\Leftrightarrow)$ désignant le foncteur algèbre symétrique graduée [Ta], des opérations λ^k.

L'isomorphisme de AHS graduées $\mathrm{H}_*(\mathfrak{gl}_\infty(A)) \cong \mathrm{S}^*_{\mathrm{gr}}(HC_{*-1}(A))$ (cf [Ga] pour la démonstration de ce fait) étant compatible avec les opérations λ^k, on en déduit la formule (1) sur $\mathrm{H}_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$. On obtient aussi des formules analogues qui explicitent $\lambda^k(x \,\widetilde{\otimes}\, y)$ et $\lambda^k(\lambda^{k'}(x))$ (cf. le théorème (3.5)) pour tout x et tout y dans $\mathrm{S}(V)$ et tout $k \geqslant 0$.

Voici le plan de l'article: d'abord, on expose quelques lemmes relatifs à la structure des polynômes universels intervenant dans la définition des λ-anneaux; puis, on étudie le cas de l'algèbre symétrique d'une algèbre V et on montre comment construire des opérations λ^k sur celle-ci ; on applique tout ce qui précède au cas de l'homologie cyclique (c'est la véritable motivation de l'article) ; on évoque enfin quelques généralisations possibles des résultats précédents.

1. Les λ-anneaux et les AHS

DEFINITIONS. Soient les familles d'indéterminées $X = (X_i)_{i\geqslant 1}$, $Y = (Y_i)_{i\geqslant 1}$ et $T = (T_i)_{i\geqslant 1}$. Supposons que X_i soit la i-ème fonction symétrique élémentaire en les indéterminées $U_1, \ldots, U_m$ et Y_j la j-ème fonction symétrique élémentaire en les indéterminées $V_1, \ldots, V_n$ ($m \geqslant k \geqslant 1$ et $n \geqslant k \geqslant 1$). Soient les éléments suivants de $Z[X, Y]$:

$$Q_k(X,Y) = \sum_{i+j=k,\, i\neq 0,\, j\neq 0} X_i Y_j + X_k + Y_k,$$

$$\sum_{k\geqslant 0} P_k(X,Y)T^k = \prod_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n} (1 + U_i V_j T),$$

$$\sum_{k\geqslant 0} P_{k,h}T^k = \prod_{i_1\leqslant \ldots\leqslant i_h} (1 + U_{i_1}\ldots U_{i_h} T).$$

Il est clair que Q_k et P_k sont dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_k]$ et que $P_{k,h}$ est dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{kh}]$. On notera dans la suite

$$Q(X,Y) = (Q_1(X,Y), Q_2(X,Y), \ldots),$$

$$P(X,Y) = (P_1(X,Y), P_2(X,Y), \ldots),$$

$$P_{k,}(X) = (P_{k,1}(X), P_{k,2}(X), \ldots).$$

Un λ-anneau R est un anneau muni d'opérations λ^k pour tout $k \geqslant 0$ vérifiant (avec $\lambda(x) = (\lambda^1(x), \lambda^2(x), \ldots)$:

$$\lambda^0(x) = 1, \lambda^1 = \mathrm{id}, \lambda(x+y) = Q(\lambda(x), \lambda(y)), \lambda(xy) = P(\lambda(x), \lambda(y)),$$

$$\lambda^k(\lambda(x)) = P_{k,}(\lambda(x)),$$

pour tout x et tout y appartenant à R et tout $k \geqslant 0$.

Notation. Si f et g sont deux morphismes dans une catégorie donnée, fg désignera la composée de f et g. On notera

$$(\lambda^1 f, \lambda^2 f, \ldots) = \lambda f, (f\lambda^1, f\lambda^2, \ldots) = f\lambda, (Q_1 f, Q_2 f, \ldots) = Qf,$$

etc...

EXEMPLES. (1) On prend l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs avec pour opérations

$$\lambda^k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n \Leftrightarrow k)!}$$

pour tout $n \geqslant 0$ et tout $k \geqslant 0$.

(2) Il existe un et un seul λ-anneau tel que l'anneau sous-jacent soit $\mathbb{Z}[X]$ et tel que $\lambda^k(X_1) = X_k$ pour tout $k \geqslant 1$: c'est, par définition, le λ-anneau engendré par X_1.

(3) Si R et S sont deux λ-anneaux, le $\mathbb{Z}$-module $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ est muni canoniquement d'une structure de λ-anneau [Kn] [LF].

PROPOSITION 1.1. *Avec $k \geqslant 1$ et $k' \geqslant 1$.*

(i) *On a $P(X, Y) = P(Y, X)$.*
(ii) *Le seul terme de degré 2 qui apparaisse dans P_k est $(\Leftrightarrow 1)^{k-1} k X_k Y_k$.*
(iii) *Le seul terme de degré 1 de $P_{k,k'}$ est $(\Leftrightarrow 1)^{(k-1)(k'-1)} X_{kk'}$.*

Preuve. On se place dans le λ-anneau $\mathbb{Z}[X, Y]$ produit tensoriel des λ-anneaux $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Z}[Y]$. On sait que

$$\sum_{h=0}^{k-1} (\Leftrightarrow 1)^{k-1-h} \psi^{k-h}(X_1 Y_1) \lambda^h(X_1 Y_1) = k \lambda^k(X_1 Y_1),$$

où les morphismes d'anneaux ψ^k sont les opérations d'Adams. Donc

$$\sum_{h=0}^{k-1} (\Leftrightarrow 1)^{k-1-h} \psi^{k-h}(X_1) \psi^{k-h}(Y_1) \lambda^h(X_1 Y_1) = k \lambda^k(X_1 Y_1),$$

soit

$$\sum_{h=0}^{k-1} (\Leftrightarrow 1)^{k-1-h} \psi^{k-h}(X_1) \psi^{k-h}(Y_1) P_h(X, Y) = k P_k(X, Y).$$

Par récurrence sur $k \geqslant 1$ (le cas $k = 1$ est évident), on peut alors dire que le terme du second degré de P_k est

$$(\Leftrightarrow 1)^{k-1} (\Leftrightarrow 1)^{k-1} k X_k (\Leftrightarrow 1)^{k-1} k \frac{Y_k}{k} \text{ car } \psi^k(X_1) = (\Leftrightarrow 1)^{k-1} k \lambda^k(X_1) + R_1$$

où R_1 ne contient que des termes de degré supérieur où égal 2.

De la même façon, partant de $\psi^k \psi^{k'} = \psi^{kk'}$ pour tout $k, k' \geqslant 1$, on obtient $\psi^k \psi^{k'}(X_1) = \psi^{kk'}(X_1)$, soit

$$(\Leftrightarrow 1)^{k'-1} k' \psi^k(X_{k'}) + R_2 = (\Leftrightarrow 1)^{kk'-1} k k' X_{kk'} + R_3,$$

où R_2 et R_3 ne contiennent que des termes de degré supérieur où égal 2 donc

$$(\Leftrightarrow 1)^{k'-1} k' (\Leftrightarrow 1)^{k-1} k \lambda^k(X_{k'}) = (\Leftrightarrow 1)^{kk'-1} k k' X_{kk'} + R_4,$$

où R_4 ne contient que des termes de degré supérieur où égal 2 d'où la conclusion attendue vu que $\lambda^k(X_{k'}) = P_{k,k'}(X)$. □

On introduit pour la proposition suivante la famille d'indéterminées $T = (T_i)_{i\geqslant 0}$.

PROPOSITION 1.2. *On travaille dans le λ-anneau $\mathbb{Z}[X, Y, Z, T]$ engendré par X_1,Y_1,Z_1 et T_1.*

(1) *On a $Q(Q(X, Y), Z) = Q(X, Q(Y, Z))$. On notera ce polynôme $Q(X, Y, Z)$. On définit de façon analogue $Q(X, Y, Z, T)$.*
(2) *On a $P(Q(X, Y), Q(Z, T)) = Q(P(X, Z), P(X, T), P(Y, Z), P(Y, T))$.*
(3) *Il existe un polynôme $R_{k,k'}$ et un seul qui vérifie pour tout $k \geqslant 1$ et tout $k' \geqslant 1$*

$$P_{k,k'}(Q(X, Y)) = R_{k,k'}(P_{k,}(X), P_{k,*}(Y)).$$

De plus $R_{k,k'}(X, Y)$ est dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{k'}, Y_1, \ldots, Y_{k'}]$.

Preuve. On a

$$\lambda(X_1 + Y_1 + Z_1) = Q(\lambda(X_1 + Y_1), Z) = Q(Q(X, Y), Z),$$
$$\lambda(X_1 + Y_1 + Z_1) = Q(X, \lambda(Y_1 + Z_1)) = Q(X, Q(Y, Z))$$

d'où (1). On a

$$\begin{aligned}
&\lambda((X_1 + Y_1)(Z_1 + T_1)) \\
&\quad = P(\lambda(X_1 + Y_1), \lambda(Y_1 + Z_1)) \\
&\quad = P(Q(X, Y), Q(Z, T))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\lambda((X_1 + Y_1)(Z_1 + T_1)) \\
&\quad = \lambda(X_1Z_1 + X_1T_1 + Y_1Z_1 + Y_1T_1) \\
&\quad = Q(\lambda(X_1Z_1), \lambda(X_1T_1), \lambda(Y_1Z_1), \lambda(Y_1T_1)) \\
&\quad = Q(P(X, Z), P(X, T), P(Y, Z), P(Y, T)),
\end{aligned}$$

d'où (2). Enfin on a

$$\begin{aligned}
\lambda^k\lambda^{k'}(X + Y) &= P_{k,k'}(\lambda(X + Y)) = P_{k,k'}(Q(X, Y)) \\
\lambda^k\lambda^{k'}(X + Y) &= \lambda^k Q_{k'}(X, Y) = R_{k,k'}(\lambda^k X, \lambda^k Y) \\
&= R_{k,k'}(P_{k,}(X), P_{k,}(Y)),
\end{aligned}$$

d'où (3). □

2. Le cas de l'algèbre symétrique d'un *K*-module *V*

Soit $\mathcal{H}$ une AHS de produit μ, de surproduit $\widetilde{\otimes}$ et de coproduit Δ et soit C une cogèbre de coproduit Δ. Si f et g sont deux morphismes linéaires de C dans $\mathcal{H}$, on pose $f \underline{\oplus} g = \mu(f \otimes g)\Delta$ (convolée additive) et $f \underline{\otimes} g = \widetilde{\otimes}(f \otimes g)\Delta$ (convolée multiplicative). Si h est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{H}$ vers une algèbre $\mathcal{H}'$, alors on a $h(f \underline{\oplus} g) = (hf \underline{\oplus} hg)$ et $h(f \underline{\otimes} g) = (hf \underline{\otimes} hg)$. Si h est un morphisme de cogèbres d'une cogèbre C' vers la cogèbre C, alors on a $(f \underline{\oplus} g)h = (fh \underline{\oplus} gh)$ et $(f \underline{\otimes} g)h = (fh \underline{\otimes} gh)$. Il est facile de démontrer (cf [Ga] pour plus de détails) que l'ensemble des morphismes de cogèbres de C dans $\mathcal{H}$, noté $w(C, \mathcal{H})$, muni de l'addition $\underline{\oplus}$ et de la multiplication $\underline{\otimes}$ est un anneau commutatif avec $u\epsilon$ pour neutre de l'addition (u étant le neutre de $\mathcal{H}$ et ϵ étant la coünité de C). De plus, si $\mathcal{H}$ est de la forme $\mathrm{S}(V)$ (l'algèbre symétrique d'une algèbre V) et si K contient $\mathbb{Q}$ alors $w(\mathcal{H}) := \sqsupseteq(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre.

DEFINITIONS. Soit $\mathcal{H}$ une AHS. Si $E = \{a, \ldots, b\} \subset \{1, \ldots, n\}$ où n est un entier supérieur où égal à 1, on peut définir le morphisme de cogèbres suivant allant de $\mathcal{H}^{\otimes\backslash}$ dans $\mathcal{H}^{\#\mathcal{E}}$ ($\#E$ désignant le cardinal de l'ensemble E) :

$$i_{a,\ldots,b}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \prod_{i \notin E} \epsilon(x_i) x_a \otimes \ldots \otimes x_b.$$

Si f est un morphisme K-linéaire allant d'une cogèbre C vers une algèbre A et si dans K, tous les $n!$ sont inversibles, on pose $\exp^{\underline{\oplus}}(f) = \sum_{n \geqslant 0} f^{\underline{\oplus} n}/n!$ qui est un morphisme K-linéaire allant de C dans A. Par définition, π est la projection sur V parallèlement $\mathrm{S}^0(V) \oplus \bigoplus_{i \geqslant 2} \mathrm{S}^i(V)$.

LEMME 2.1. *On a* $\exp^{\underline{\oplus}}(\pi) = \mathrm{id}$.

Preuve. Il faut démontrer que $\exp^{\underline{\oplus}}(\pi)(x) = x$ si $x \in \mathrm{S}(V)$. On peut par K-linéarité se restreindre à $x = x_1 \ldots x_m$ où les x_i sont dans V. Alors $\pi^{\underline{\oplus} n}(x) = 0$ si $n \neq m$ et $\pi^{\underline{\oplus} n}(x) = (n!)x$ si $n = m$. □

LEMME 2.2. *Soient f et g deux éléments de $w(\mathcal{H})$. Alors on a $fi_1 \underline{\oplus} gi_2 = \mu(f \otimes g)$ et $fi_1 \underline{\otimes} gi_2 = \widetilde{\otimes}(f \otimes g)$.*

Preuve. On a, x et y étant deux éléments de $\mathcal{H}$,

$$(fi_1 \underline{\oplus}\ gi_2)(x \otimes y) = \sum_{(x)(y)} fi_1(x_{(1)} \otimes y_{(1)}) gi_2(x_{(2)} \otimes y_{(2)}),$$

par définition du produit tensoriel de cogèbres. Donc

$$\begin{aligned}(fi_1 \underline{\oplus} gi_2)(x \otimes y) &= \sum_{(x)(y)} \epsilon(y_{(1)}) \epsilon(x_{(2)}) f(x_{(1)}) g(y_{(2)}) \\ &= (u\epsilon \underline{\oplus} f)(x)(u\epsilon \underline{\oplus} g)(y).\end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned}(fi_1 \underline{\otimes}\, gi_2)(x\otimes y) &= \sum_{(x)(y)} fi_1(x_{(1)}\otimes y_{(1)})\,\widetilde{\otimes}\, gi_2(x_{(2)}\otimes y_{(2)})\\ &= \sum_{(x)(y)} (\epsilon(y_{(1)})f(x_{(1)}))\,\widetilde{\otimes}\,(\epsilon(x_{(2)})g(y_{(2)})).\end{aligned}$$

Donc par K-bilinéarité du surproduit,

$$\begin{aligned}(fi_1 \underline{\otimes}\, gi_2)(x\otimes y) &= \sum_{(x)(y)} (\epsilon(x_{(2)})f(x_{(1)}))\,\widetilde{\otimes}\,(\epsilon(y_{(1)})g(y_{(2)}))\\ &= (u\epsilon \,\underline{\oplus}\, f)(x)\widetilde{\otimes}(u\epsilon\,\underline{\oplus}\, g)(y).\end{aligned}$$ □

THEOREME 2.3. *Considérons une famille* $(\lambda^k)_{k\geqslant 0}$ *de* $w(S(V))$ *et les énoncés suivants:*

(1) *'pour toute cogèbre* C*, pour tout* $f,g\in w(C,S(V))$*, on a* $\lambda(f\,\underline{\oplus}\,g) = Q(\lambda f,\lambda g)$

(1′) $\lambda\mu = Q(\lambda i_1,\lambda i_2)$'

(2) *Si* x,...,y *sont des éléments primitifs de* $S(V)$ *alors*

$$\pi\lambda^k(x\dots y) = \sum_{i+\dots+j=k}\lambda^i(x)\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}\lambda^j(y)'$$

(3) *Si* x *et* y *sont dans* $S(V)$ *alors*

$$\begin{aligned}\lambda^k(xy) &= \sum_{(x)(y)}(\lambda^1(x_{(1)})\,\widetilde{\otimes}\,\lambda^{k-1}(y_{(1)}))\dots\\ &\quad\dots(\lambda^{k-1}(x_{(k-1)})\,\widetilde{\otimes}\,\lambda^1(y_{(k-1)}))\lambda^k(x_{(k)})\lambda^k(y_{(k)})\end{aligned}$$

où

$$\Delta_{k-1}(x) = \sum_{(x)} x_{(1)}\otimes\dots\otimes x_{(k)} \quad\text{et}\quad \Delta_{k-1}(y) = \sum_{(y)} y_{(1)}\otimes\dots\otimes y_{(k)}.$$

Alors (1) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (1′) et (3) $\Longrightarrow$ (2). Si $K\supset\mathbb{Q}$ alors (2) $\Longrightarrow$ (3).

Preuve. A partir de $\lambda\mu = Q(\lambda i_1,\lambda i_2)$, on compose à droite par le morphisme de cogèbres $(f\otimes g)\Delta$, ce qui donne $\lambda(f\,\underline{\oplus}\,g) = Q(\lambda i_1,\lambda i_2)(f\,\underline{\oplus}\,g)$ donc $\lambda(f\,\underline{\oplus}\,g) = Q(\lambda i_1(f\,\underline{\oplus}\,g),\lambda i_2(f\,\underline{\oplus}\,g))$. Un calcul facile montre que $i_1(f\,\underline{\oplus}\,g)\Delta = f$ et que $i_2(f\,\underline{\oplus}\,g)\Delta = g$ donc (1′) $\Longrightarrow$ (1). La formule (1) avec $C = \mathrm{S}(V)\otimes\mathrm{S}(V)$ et $(f,g) = (i_1,i_2)$ évaluée en $x\otimes y$ donne (3) et (1′). D'où (1) $\Longleftrightarrow$ (1′). Puis (3) se réécrit

$$\lambda^k\mu = \widetilde{\otimes}(\lambda^1\otimes\lambda^{k-1})\,\underline{\oplus}\dots\underline{\oplus}\,\widetilde{\otimes}(\lambda^{k-1}\otimes\lambda^1)\,\underline{\oplus}\,\mu(\lambda^k\otimes\lambda^k). \tag{4}$$

On obtient (1) en composant à droite par $(f \otimes g)\Delta$. D'où (1) $\Longleftrightarrow$ (3). La projection de (3) sur la partie primitive donne (2). Donc (3) $\Longrightarrow$ (2). Soit l'énoncé suivant: (4)$'$ Si x et y sont de longueur supérieure ou égale à un alors $\pi\lambda^k(xy) = \sum_{i+j=k} \pi\lambda^i(x) \mathbin{\tilde{\otimes}} \pi\lambda^j(y)'$. Alors (2) $\Longrightarrow$ (4). En effet, en se ramenant à $x = x_1 \dots x_p$ et $y = y_1 \dots y_q$ où les x_i et les y_j sont dans V, par bilinéarité on a

$$\pi\lambda^k(xy) = \sum_{i+\dots+j=k} \lambda^i(x_1) \mathbin{\tilde{\otimes}} \dots \mathbin{\tilde{\otimes}} \lambda^j(y_q),$$

donc

$$\pi\lambda^k(xy) = \sum_{i+j=k} \pi\lambda^i(x) \tilde{\otimes} \lambda^j(y),$$

donc

$$\pi\lambda^k(xy) = \sum_{i+j=k} \pi\lambda^i(x) \tilde{\otimes} \pi\lambda^j(y) + \pi(\lambda^k(x)\lambda^k(y)), \tag{5}$$

le dernier terme étant nul. On constate alors que (5) est vrai pour tout x et tout y quelle que soit leur longueur respective (par exemple si $y = 1$ alors $\lambda^j(y) = 0$ pour tout j et donc $\pi\lambda^j(y) = 0$). La formule (2) peut donc s'écrire

$$\pi\lambda^k\mu = \sum_{i+j=k, i\neq 0, j\neq 0} \tilde{\otimes}(\lambda^i \otimes \lambda^j) + \pi\mu(\lambda^k \otimes \lambda^k). \tag{6}$$

Si $K \supset \mathbb{Q}$, tous les $n!$ sont inversibles dans K et on peut utiliser l'exponentielle. On applique alors $\exp^{\underline{\oplus}}(\Leftrightarrow)$ à (6) et on obtient (3). Donc (2) $\Rightarrow$ (3). $\square$

THEOREME 2.4. *On suppose donnée une famille d'endomorphismes K-linéaires $(\lambda^k)_{k\geqslant 1}$ d'une K-algèbre libre V. Alors il existe une et une seule famille $(\lambda^k)_{k\geqslant 0}$ de $w(S(V))$ coïncidant après restriction à V avec celle que l'on s'est donnée sur V telle que pour tout f et pour tout g de $w(S(V))$, on ait $\lambda(f \mathbin{\underline{\oplus}} g) = Q(\lambda f, \lambda g)$, telle que $\lambda^0 = 1$ (l'unité de $S(V)$) et telle que $\lambda^1 = \mathrm{id}$.*

Preuve Soient $(\lambda^k)_{k\geqslant 0}$ et $(\lambda'^k)_{k\geqslant 0}$ deux familles de $w(\mathrm{S}(V))$ solution du problème. Soit T_m l'énoncé: 'pour tout x de longueur inférieure ou égal à m, $\lambda(x) = \lambda'(x)$'. Par définition, si $f \in w(\mathrm{S}(V))$ alors $f(1) = 1$ donc T_0 est vrai. T_1 est vrai par hypothèse. Si x est un élément de V et si y est de longueur m ($m \geqslant 1$) alors (compte tenu de l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3))

$$T_m \Rightarrow Q(\lambda i_1, \lambda i_2)(x \otimes y) = Q(\lambda' i_1, \lambda' i_2)(x \otimes y),$$

puisque le coproduit est compatible avec la filtration par la longueur. Donc, avec le théorème précédent, $T_m \Longrightarrow T_{m+1}$ d'où l'unicité de la famille $(\lambda^k)_{k\geqslant 0}$.

Soit $\mathcal{B}$ une K-base de V, $\mathcal{B}^n$ l'ensemble des produits dans $\mathrm{S}(V)$ d'au plus n éléments de $\mathcal{B}$ (par convention, $\mathcal{B}^0 = 1$).

Posons $\lambda(1) = 1$ et pour tout $x \in \mathcal{B}^n$ et tout $y \in \mathcal{B}$,

$$\lambda(xy) = Q(\lambda i_1, \lambda i_2)(x \otimes y).$$

Il est clair que R_0 et R_1 sont vrais. Soit $z \in \mathcal{B}$ et supposons R_m vrai. Alors

$$\begin{aligned}\lambda(xyz) &= Q(\lambda i_1, \lambda i_2)((xy) \otimes z)\\ &= Q(\lambda i_1, \lambda i_2)(\mu \otimes id)(x \otimes y \otimes z)\\ &= Q(\lambda i_1(\mu \otimes \mathrm{id}), \lambda i_2(\mu \otimes \mathrm{id}))(x \otimes y \otimes z)\end{aligned}$$

car $\mu \otimes$ id est un morphisme de cogèbres. Un calcul facile montre que $i_1(\mu \otimes \mathrm{id}) = \mu i_{1,2}$ et que $i_2(\mu \otimes \mathrm{id}) = i_3$. Ainsi

$$\lambda(xyz) = Q(\lambda \mu i_{1,2}, \lambda i_3)(x \otimes y \otimes z),$$

soit, à cause de l'hypothèse de récurrence R_m,

$$\lambda(xyz) = Q(Q(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{1,2}, \lambda i_3)(x \otimes y \otimes z),$$

d'où, puisque $i_{1,2}$ est un morphisme de cogèbres et que $i_2 i_{1,2} = i_2$ et $i_1 i_{1,2} = i_1$,

$$\begin{aligned}\lambda(xyz) &= Q(Q(\lambda i_1, \lambda i_2), \lambda i_3)(x \otimes y \otimes z)\\ &= Q(\lambda i_1, Q(\lambda i_2, \lambda i_3))(x \otimes y \otimes z).\end{aligned}$$

De $i_1 i_{2,3} = i_2$ et de $i_2 i_{2,3} = i_3$, on déduit

$$\begin{aligned}\lambda(xyz) &= Q(\lambda i_1, Q(\lambda i_1 i_{2,3}, \lambda i_2 i_{2,3}))(x \otimes y \otimes z)\\ &= Q(\lambda i_1, Q(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{2,3})(x \otimes y \otimes z)\\ &= Q(\lambda i_1, \lambda \mu i_{2,3})(x \otimes y \otimes z) \quad (par\ R_1).\end{aligned}$$

De $i_1(\mathrm{id} \otimes \mu) = i_1$ et de $i_2(\mathrm{id} \otimes \mu) = \mu i_{2,3}$, on déduit

$$\begin{aligned}\lambda(xyz) &= Q(\lambda i_1(\mathrm{id} \otimes \mu), \lambda i_2(\mathrm{id} \otimes \mu))(x \otimes y \otimes z)\\ &= Q(\lambda i_1, \lambda i_2)(\mathrm{id} \otimes \mu)(x \otimes y \otimes z)\\ &= Q(\lambda i_1, \lambda i_2)(x \otimes (yz))\end{aligned}$$

d'où R_{m+1} et l'existence. □

THEOREME 2.5. *On se place dans le cadre du théorème (2.4). Si sur V la famille $(\lambda^k)_{k \geqslant 1}$ vérifie $\lambda^k(x \widetilde{\otimes} y) = (\Leftrightarrow 1)^{k-1} k \lambda^k(x) \widetilde{\otimes} \lambda^k(y)$ pour tout x et tout y appartenant à V alors on a pour tout f et g dans $w(S(V))$: $\lambda(f \underline{\otimes} g) = P(\lambda f, \lambda g)$.*

Preuve. On notera $\mu(x \otimes \ldots \otimes y) = x \ldots y$ pour un nombre quelconque d'arguments $x, \ldots, y$. Par une méthode analogue à celle d'un raisonnement déjà fait, on démontre que

$$\lambda \widetilde{\otimes} = P(\lambda i_1, \lambda i_2) \tag{1}$$

si et seulement si pour tout f et tout g dans $w(\mathrm{S}(V))$, on a $\lambda(f \underline{\otimes} g) = P(\lambda g, \lambda g)$. D'après la proposition (1.1), le polynôme P_k est de la forme

$$P_k = (\Leftrightarrow 1)^{k-1} k X_k Y_k + \sum a (X_1 Y_1)^m \ldots (X_k Y_k)^n,$$

$m + \cdots + n \geqslant 2$. Alors (1) est vrai si on l'évalue en $x \otimes y$ où x et y sont primitifs à cause des hypothèses faites ou si on l'évalue en $x \otimes y$ où $1 \in \{x, y\}$ (dans ce dernier cas, les deux membres de l'égalité (1) sont nuls). Puis on écrit (x, y, z et t étant dans $\mathrm{S}(V)$)

$$\begin{aligned}
&P(\lambda i_1, \lambda i_2)((xy) \otimes (zt)) \\
&\quad = P(\lambda i_1, \lambda i_2)(\mu \otimes \mu)(x \otimes y \otimes z \otimes t) \\
&\quad = P(\lambda \mu i_{1,2}, \lambda \mu i_{3,4})(\mu \otimes \mu)(x \otimes y \otimes z \otimes t) \\
&\quad = P(Q(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{1,2}, Q(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{3,4})(x \otimes y \otimes z \otimes t) \\
&\quad = Q(P(\lambda i_1, \lambda i_3), P(\lambda i_1, \lambda i_4), P(\lambda i_2, \lambda i_3), P(\lambda i_2, \lambda i_4))(x \otimes y \otimes z \otimes t) \\
&\quad = Q(P(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{1,3}, P(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{1,4}, \\
&\qquad P(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{2,3}, P(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{2,4})(x \otimes y \otimes z \otimes t),
\end{aligned}$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}
&P(\lambda i_1, \lambda i_2)((xy) \otimes (zt)) \\
&\quad = Q(P(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{1,3}, P(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{1,4}, \\
&\qquad P(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{2,3}, P(\lambda i_1, \lambda i_2) i_{2,4})(x \otimes y \otimes z \otimes t).
\end{aligned} \tag{2}$$

Soit U_m l'énoncé: '(1) est vrai pour tout x de longueur 1 et tout y de longueur inférieure ou égale à m'. On sait déjà que U_0 et U_1 sont vrais. Si U_m est vrai, on considère (2) avec x et t de longueur 1, $y = 1$ et z de longueur m et on obtient

$$\begin{aligned}
&P(\lambda i_1, \lambda i_2)((xy) \widetilde{\otimes} (zt)) \\
&\quad = Q(\lambda \,\widetilde{\otimes}\, i_{1,3}, \lambda \,\widetilde{\otimes}\, i_{1,4}, \lambda \,\widetilde{\otimes}\, i_{2,3}, \lambda \,\widetilde{\otimes}\, i_{2,4})(x \,\widetilde{\otimes}\, y \,\widetilde{\otimes}\, z \,\widetilde{\otimes}\, t) \\
&\quad = \sum_{(x)(y)(z)(t)} \lambda((x_{(1)} \,\widetilde{\otimes}\, z_{(1)})(x_{(2)} \,\widetilde{\otimes}\, t_{(1)})(y_{(1)} \,\widetilde{\otimes}\, z_{(2)})(y_{(2)} \,\widetilde{\otimes}\, t_{(2)})) \\
&\quad = \lambda((xy) \,\widetilde{\otimes}\, (zt)),
\end{aligned}$$

donc U_{m+1} est vrai. Soit V_m l'énoncé: '(1) est vrai pour tout x de longueur inférieure ou égale à m et pour tout y'. On sait déjà que V_0 et V_1 sont vrais. Si V_m est vrai, on considère (2) avec $t = 1$, y de longueur 1, z de longueur quelconque et x de longueur m. Le calcul ci-dessous implique que V_{m+1} est vrai. □

THEOREME 2.6. *On se place dans le cadre du théorème (2.4). Si sur V la famille $(\lambda^k)_{k\geqslant 0}$ vérifie $\lambda^k\lambda^{k'}(x) = (\Leftrightarrow 1)^{(k-1)(k'-1)}\lambda^{kk'}(x)$ pour tout x appartenant à V alors on a pour tout f dans $w(S(V))$: $\lambda^k\lambda^{k'}f = P_{k,k'}(\lambda f)$.*

Preuve. Il est clair que les énoncés 'pour tout f et tout g dans $w(\mathrm{S}(V))$, on a $\lambda^k\lambda^{k'}f = P_{k,k'}(\lambda f)$' et 'pour tout $x \in \mathrm{S}(V)$, on a $\lambda^k\lambda^{k'}(x) = P_{k,k'}(\lambda)(x)$' sont équivalents pour tout k et tout k' donnés à l'avance. Soit U_m l'énoncé: 'pour tout x de longueur inférieure ou égale à m, $\lambda^k\lambda^{k'}(x) = P_{k,k'}(\lambda)(x)$'. Il est clair que U_0 est vrai. D'après le lemme (1.1), le polynôme $P_{k,k'}$ est de la forme

$$P_{k,k'} = (\Leftrightarrow 1)^{(k-1)(k'-1)}X_{kk'} + \sum a(X_i)^m$$

ce qui implique U_1 compte tenu de l'hypothèse. On a alors

$$\begin{aligned}\lambda^k(\lambda^{k'}(xy)) &= \lambda^k\lambda^{k'}\mu(x\otimes y)\\ &= \lambda^k Q_{k'}(\lambda i_1, \lambda i_2)(x\otimes\\ &= R_{k,k'}(\lambda^k\lambda i_1, \lambda^k\lambda i_2)(x\otimes y).\end{aligned} \tag{1}$$

Si on suppose U_m vrai et si dans (1), on prend x de longueur m et y de longueur 1, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda^k(\lambda^{k'}(xy)) &= R_{k,k'}(P_{k,*}(\lambda)i_1, P_{k,*}(\lambda)i_2)(x\otimes y)\\ &= R_{k,k'}(P_{k,*}(\lambda i_1), P_{k,*}(\lambda i_2))(x\otimes y)\\ &= P_{k,k'}(Q(\lambda i_1, \lambda i_2))(x\otimes y)\\ &= P_{k,k'}(\lambda\mu)(x\otimes y)\\ &= P_{k,k'}(\lambda)(xy),\end{aligned}$$

donc U_{m+1} est vrai. □

3. Des opérations λ^k sur l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_\infty(A)$

Dans ce chapitre, K est un corps de caractéristique zéro. En utilisant les méthodes de [LP], on va définir des opérations λ^k sur l'homologie de $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ à coefficients triviaux où A est une K-algèbre commutative et unitaire. On verra alors qu'en restreignant à la partie primitive (qui est exactement l'homologie cyclique $V = HC_{*-1}(A)$ de A), on retrouve les opérations λ^k usuelles sur V. Les résultats du chapitre précédent permettront alors d'élucider le comportement de celles-ci par rapport au produit et au surproduit de $\mathrm{H}_* \mathfrak{gl}_\infty(A)$ (provenant respectivement de la somme par bloc et du produit tensoriel de matrices [Ga]).

On note $\bigwedge^k_{+,n}$ le morphisme d'algèbres de Lie, fonctoriel par rapport à A de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A^n)$ des endomorphismes linéaires de A^n dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\bigwedge^k A^n)$ des endomorphismes linéaires de $\bigwedge^k A^n$ (on suppose fixée une fois pour toute une injection de $\mathfrak{gl}(\bigwedge^k A^n)$ dans $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ par choix d'une base, ce qui ne pose aucun problème car la conjugaison induit l'identité en homologie) tel que

$$\left(\bigwedge{}^k_{+,n}(\alpha)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} v_1 \wedge \ldots \wedge \alpha v_i \wedge \ldots \wedge v_k\right)$$

(les v_i étant dans A^n).C'est la version additive du morphisme de groupes

$$\bigwedge{}^k_{*,n}(\alpha)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \alpha v_1 \wedge \ldots \wedge \alpha v_i \wedge \ldots \wedge \alpha v_k.$$

LEMME 3.1. [LP]

(i) *Si α est une matrice de*

$$\mathfrak{gl}_n(A), \bigwedge{}^k_{+,n+1}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0_1 \end{pmatrix}\right)$$

est conjugué à

$$\begin{pmatrix} \bigwedge^k_{+,n}(\alpha) & 0 \\ 0 & \bigwedge^{k-1}_{+,n}(\alpha) \end{pmatrix}$$

par une matrice de permutation.

(ii) *Soient les morphismes d'algèbres de Lie*

$$a_n^k : \begin{cases} \mathfrak{gl}_n \Leftrightarrow\!\rightarrow \mathfrak{gl}_\infty \\ \alpha \Leftrightarrow\!\!\!\rightarrow \displaystyle\bigoplus_{i\ impair<k} \bigwedge{}^{k-i}_{+,n}(\alpha)^{\oplus\binom{n-1+i}{i}} \end{cases}$$

et

$$b_n^k : \begin{cases} \mathfrak{gl}_n \Leftrightarrow\!\rightarrow \mathfrak{gl}_\infty \\ \alpha \Leftrightarrow\!\!\!\rightarrow \displaystyle\bigoplus_{i\ pair<k} \bigwedge{}^{k-i}_{+,n}(\alpha)^{\oplus\binom{n-1+i}{i}} \end{cases}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n \Leftrightarrow k)!}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} a_n^k(\alpha) & 0 \\ 0 & b_{n+1}^k(\alpha \oplus 0_1) \end{pmatrix}$$

est conjugué à

$$\begin{pmatrix} a_{n+1}^k(\alpha \oplus 0_1) & 0 \\ 0 & b_n^k(\alpha) \end{pmatrix}$$

par une matrice de permutation ne dépendant que des entiers k et n. □

LEMME 3.2. *Il existe des endomorphismes λ^k de cogèbres de $H_* \mathfrak{gl}_\infty(A)$ qui redonnent sur la partie primitive les opérations de Loday–Procesi.*

Preuve. Il suffit de poser

$$\lambda^k = \varinjlim_n \lambda_n^k = \varinjlim_n ((a_n^k)_* \ominus (b_n^k)_*).$$

Pour démontrer la compatibilité avec la limite inductive, on fait une démonstration analogue à celle du théorème (1.6) de [Ga]. L'étude de la restriction à la partie primitive est déjà faite dans [LP]. □

La AHS $\mathrm{S}_{gr}^*(HC_{*-1}(A))$ est munie d'opérations λ^k en utilisant une version $\mathbb{N}$-graduée du théorème (2.4) et les opérations λ^k de Loday–Procesi sur $HC_{*-1}(A))$.

THEOREME 3.3. *L'isomorphisme de AHS $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A)) \cong S_{gr}^*(HC_{*-1}(A))$ est compatible avec les opérations λ^k construites des deux côtés.*

Preuve. On part de l'isomorphisme naturel suivant entre A-modules

$$\bigwedge^k (A^p \oplus A^q) \cong \bigoplus_{r=0}^k \bigwedge^r (A^p) \otimes \bigwedge^{k-r} (A^q).$$

On obtient alors pour les matrices l'égalité suivante, vraie à conjugaison près par une matrice de permutation :

$$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits_{+,p+q}^k \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right) &= \bigoplus_{r=0}^k \bigwedge\nolimits_{+,p}^r (\alpha) \otimes \mathrm{id}_{\binom{q}{k-r}} + \mathrm{id}_{\binom{p}{r}} \otimes \bigwedge\nolimits_{+,q}^{k-r} (\beta) \\ &= \bigoplus_{r=0}^k f_{\binom{p}{r},\binom{q}{k-r}} \left(\bigwedge\nolimits_{+,p}^r (\alpha), \bigwedge\nolimits_{+,q}^{k-r} (\beta) \right), \end{aligned}$$

donc, avec (1.5) de [Ga], après application du foncteur $\mathrm{H}_*(\Leftrightarrow)$

$$\left(\bigwedge\nolimits^k_{+,p+q}\right)_*\mu = \bigoplus_{r=0}^k \left(f_{\binom{p}{r},\binom{q}{k-r}}\right)_*\left(\bigwedge\nolimits^r_{+,p},\bigwedge\nolimits^{k-r}_{+,q}\right)_*$$

donc, avec les notations de [Ga], on obtient dans $\mathrm{H}_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$

$$\begin{aligned}\pi\left(\bigwedge\nolimits^k_{+,p+q}\right)_*\mu &= \sum_{r=0}^k \pi\left(f_{\binom{p}{r},\binom{q}{k-r}}\right)_*\left(\bigwedge\nolimits^r_{+,p},\bigwedge\nolimits^{k-r}_{+,q}\right)_* \\ &= \sum_{r=0}^k \pi\left(f_{\binom{p}{r},\binom{q}{k-r}}\right)_*\left(K_{\binom{p}{r},\binom{q}{k-r}}\right)^{-1}\cdots \\ &\qquad \cdots\left(\left(\bigwedge\nolimits^r_{+,p}\right)_*\otimes\left(\bigwedge\nolimits^{k-r}_{+,q}\right)_*\right)K_{p,q},\end{aligned}$$

donc dans $\mathrm{H}_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$, on obtient

$$\begin{aligned}\pi\left(\bigwedge\nolimits^k_{+,p+q}\right)_*\mu K_{p,q}^{-1} &= \sum_{r=0}^k \pi\left(f_{\binom{p}{r},\binom{q}{k-r}}\right)_*\left(K_{\binom{p}{r},\binom{q}{k-r}}\right)^{-1}\times \\ &\qquad \times\left(\left(\bigwedge\nolimits^r_{+,p}\right)_*\otimes\left(\bigwedge\nolimits^{k-r}_{+,q}\right)_*\right).\end{aligned}$$

Soient alors x et y des éléments primitifs respectivement de $\mathrm{H}_m\,\mathfrak{gl}_\infty(A)$ et $\mathrm{H}_n\,\mathfrak{gl}_\infty(A)$ provenant (par construction de la limite inductive) respectivement d'éléments de $\mathrm{H}_m(\mathfrak{gl}_p(A))$,..., $\mathrm{H}_n(\mathfrak{gl}_q(A))$ pour un certain p et un certain q. Alors d'après [Ga], en posant $n = p+q$, on obtient

$$\begin{aligned}&\pi\left(\bigwedge\nolimits^k_{+,p+q}\right)_*\mu K_{p,q}^{-1}(x\otimes y) \\ &= \sum_{r=0}^k \pi h_* K_{\infty,\infty}^{-1}\left(\left(\bigwedge\nolimits^r_{+,p}\right)_*\otimes\left(\bigwedge\nolimits^{k-r}_{+,q}\right)_*\right)(x\otimes y)\end{aligned}$$

dans $\mathrm{H}_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$. Ainsi

$$\pi\left(\bigwedge\nolimits^k_{+,p+q}\right)_*\mu K_{p,q}^{-1}(x\otimes y) = \sum_{r=0}^k \left(\bigwedge\nolimits^r_{+,p}\right)_*(x)\widetilde{\otimes}\left(\bigwedge\nolimits^{k-r}_{+,q}\right)_*(y).$$

On sait aussi avec [L] et (1.5) de [Ga] que

$$\bigwedge\nolimits^k_{+,n} = \lambda^k_n \underline{\oplus} \ldots \underline{\oplus}\ (\lambda^1_n)^{\underline{\oplus}\ \binom{k-1}{n}}.$$

Donc, en projetant sur la partie primitive,

$$\pi\lambda_n^k(\mu K_{p,q}^{-1}(x\otimes y))+\cdots+\binom{k\Leftrightarrow 1}{n}\pi\lambda_n^1(\mu K_{p,q}^{-1}(x\otimes y))$$
$$=\sum_{\substack{0\leqslant r\leqslant k, 0\leqslant i\leqslant r\\ 0\leqslant j\leqslant k-r}}\binom{r\Leftrightarrow i}{p}\binom{k\Leftrightarrow r\Leftrightarrow j}{q}\lambda_p^i(x)\widetilde{\otimes}\lambda_q^j(y). \tag{3.3.1}$$

On a alors le

LEMME 3.4. *Soit W un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et soient $v_1^n,\dots,v_k^n$ des éléments de W qui convergent dans W respectivement quand $n\to\infty$ vers $v_1,\dots,v_k$. Supposons que pour $n\geqslant h$(h étant un entier naturel supérieur ou égal à 1),$n^{a_1}v_1^n+\cdots+n^{a_k}v_k^n=0$ où les a_i sont des entiers relatifs deux à deux distincts. Alors pour tout i dans $\{1,\dots,k\}$, $v_i=0$.*

Preuve. Supposons par exemple que $a_1<\cdots<a_k$. Alors $n^{a_1-a_k}v_1^n+\cdots+n^{a_k-a_k}v_k^n=0$ pour $n\geqslant h$. Avec n tendant vers l'infini, on obtient $v_k=0$. Puis on procède par récurrence descendante sur k. □

Dans (3.3.1), en faisant alors tendre $n=p+q$ vers l'infini, on obtient avec le lemme $v_0=0$, soit

$$\pi\lambda^k(xy)=\sum_{r+s=k}\lambda^r(x)\widetilde{\otimes}\lambda^s(y).$$

On démontre de façon analogue (mais c'est plus long à écrire) que, pour toute famille finie d'éléments primitifs $x,\dots,y$, on a

$$\pi\lambda^k(x\dots y)=\sum_{r+s=k}\lambda^r(x)\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}\lambda^s(y).$$

Comme les λ^k sont des morphismes de cogèbres, le théorème est démontré d'après (2.3) et (2.4). □

THEOREME 3.5. *Les opérations λ^k sur $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ définies au début de ce chapitre à l'aide des puissances extérieures de matrices sont reliées au produit (provenant de la somme par bloc des matrices) et au surproduit (provenant du produit tensoriel de matrices) par les deux formules suivantes (où x et y sont des éléments de $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ et où $xy=\epsilon x_{(1)}y_{(1)}\dots x_{(k-1)}y_{(k-1)}x_{(k)}y_{(k)}$):*

$$\lambda^k(xy)=\sum_{(x)(y)}\epsilon(\lambda^1(x_{(1)})\widetilde{\otimes}\lambda^{k-1}(y_{(1)}))\dots$$
$$\dots(\lambda^{k-1}(x_{(k-1)})\widetilde{\otimes}\lambda^1(y_{(k-1)}))\lambda^k(x_{(k)})\lambda^k(y_{(k)}),$$

$$\lambda^k(x\widetilde{\otimes}y)=P_k(\lambda i_1,\lambda i_2)(x\otimes y).$$

De plus elles se composent selon la formule suivante:

$$\lambda^k(\lambda^{k'}(x)) = P_{k,k'}(\lambda)(x).$$

Preuve. Il suffit pour démontrer ce théorème de se rappeler que sur la partie primitive, qui est l'homologie cyclique de A, les opérations λ^k définies ci-dessus vérifient les hypothèses des théorèmes (2.5) et (2.6) du présent article [L], i.e. que pour tout x et y primitifs, on a

$$\lambda^k(x\widetilde{\otimes}y) = (\Leftrightarrow 1)^{k-1}k\lambda^k(x)\widetilde{\otimes}\lambda^k(y),$$

$$\lambda^k\lambda^{k'}(x) = (\Leftrightarrow 1)^{(k-1)(k'-1)}\lambda^{kk'}(x). \qquad \square$$

Le résultat suivant donne le comportement des opérations λ^k de $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ par rapport à la filtration provenant de la notion de longueur.

COROLLAIRE 3.6. *Étant donné un élément de longueur x de $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$, la partie primitive de longueur d de $\lambda^k(x)$ est égal à*

$$\sum_{(x)} \frac{(\pi\lambda^k)(x_{(1)})\ldots(\pi\lambda^k)(x_{(d)})}{d!}.$$

Si $x = u\ldots v$ où $u,\ldots,v$ sont n éléments primitifs alors

$$\sum_{(x)} \frac{(\pi\lambda^k)(x_{(1)})\ldots(\pi\lambda^k)(x_{(d)})}{d!} = 0,$$

pour $d > n$ et

$$\sum_{(x)} \frac{(\pi\lambda^k)(x_{(1)})\ldots(\pi\lambda^k)(x_{(n)})}{n!} = \lambda^k(u)\ldots\lambda^k(v).$$

Preuve. Cela provient de la formule $\exp^{\underline{\oplus}}(\pi\lambda^k) = \lambda^k$. $\square$

4. Extension des résultats précédents

Les théorèmes (3.5) et (3.6) s'étendent sans difficulté aux groupes d'homologie suivant (A étant toujours une K-algèbre sur un corps K de caractéristique zéro) : $\mathrm{H}_*(\mathfrak{sl}_\infty(A))$, $\mathrm{H}_*(\mathfrak{sp}_\infty(A))$, $\mathrm{H}_*(\mathfrak{so}_\infty(A))$, $\mathrm{H}_*(\mathfrak{o}_\infty(A))$, etc ...

C'est dû à la stabilité du produit tensoriel de matrices et des puissances extérieures de matrices à l'intérieur des familles d'algèbres de Lie $(\mathfrak{sl}_n)_{n\geqslant 0}$, $(\mathfrak{sp}_n)_{n\geqslant 0}$, $(\mathfrak{so}_n)_{n\geqslant 0}$, $(\mathfrak{o}_n)_{n\geqslant 0}$, etc ...

Il faut juste adapter la démonstration du théorème (3.5) en démontrant directement les propriétés exigées sur la partie primitive grâce à des propriétés standards des puissances extérieures de matrices.

On étend également sans problème les théorèmes (3.5) et (3.6) à l'homologie des groupes correspondants. Dans le cas de l'homologie du groupe linéaire, on retrouve sur la partie primitive, qui est alors isomorphe à la K-théorie algébrique de Quillen de l'algèbre A, les opérations λ^k définies par Kratzer et Soulé.

Bibliographie

[Ab] Abe, E.: *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, 1977.

[CE] Cartan and Eilenberg.: *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[Ga] Gaucher, P.: Produit tensoriel de matrices, homologie cyclique, homologie des algèbres de Lie, *Ann. Inst. Fourier* (1994), 403–411.

[ ] Gaucher, P.: Produit tensoriel de matrices et homologie cyclique, *C.R. Acad Sci Paris Sér I* **312** (1991).

[ ] Gaucher, P.: Lambda-opération et homologie des matrices, *C.R. Acad Sci Paris Sér I* **313** (1991), 663–666.

[H] Husemoller, D.: Homology of certain H-spaces as group ring objects, *Algebra, Topology and Category Theory*, A collection of papers in Honor of Samuel Eilenberg, Academic Press, New York, 1976, pp. 309–377.

[Kn] Knutson, D.: *Lambda-ring and Representation Theory of the Symmetric Group*, Lecture Notes in Math 308, Springer, New York, 1973.

[Kr] Kratzer, C.: Lambda-structure en K-théorie algébrique, *Comm. Math. Helv.* **55** (1980), 233–254.

[LF] Lang, S. and Fulton, W.: *Riemann-Roch Algebra*, Springer, Berlin, 1985.

[L] Loday, J.-L.: *Cyclic Homology*, Springer, New York, 1993.

[LP] Loday, J.-L. and Procesi, C.: Cyclic homology and lambda-operations, in *Algebraic K-theory: Connection with Geom. and Topology*, NATO ASI Series C, 279, 1989, pp. 209–224.