Logique
pour l'Informatique Avancée
MI067 STL
Janvier 2012

Devoir sur table n° 2

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

Exercice I : *Histoire de famille embrouillée*

Soit les symboles de relations binaires suivants : $Pere$, $Mere$, $Frere$, $Soeur$.

On se donne les axiomes suivants

(F1) $\forall x \forall y \forall z.((Pere(z,x) \land Pere(z,y)) \lor (Mere(z,x) \land Mere(z,y))$
$\to (Frere(x,y) \lor Soeur(x,y)))$

(F2) $\forall x \forall y.(\neg Frere(x,y) \land \neg Soeur(x,y)$
$\to \forall z.((\neg Pere(z,x) \lor \neg Pere(z,y)) \land (\neg Mere(z,x) \lor \neg Mere(z,y))))$

(F3) $\forall x \forall y.(Pere(x,y) \to \neg Mere(x,y))$

(F4) $\forall x \forall y.(Frere(x,y) \to \neg Soeur(x,y))$

Question (I.1) [2×3 pts]

Soit les formules

(C1) $\forall x \forall y.(Frere(x,y) \land \neg Soeur(y,x) \to Frere(y,x))$

Réponse

(C1) n'est pas une consquence des axiomes : on peut montrer que la négation de (C1) ne contredit pas les axiomes ; c'est-à-dire que la conjonction de 3 formules, pour x et y quelconques, $Frere(x,y)$, $\neg Soeux(y,x)$ et $\neg Frere(y,x)$ n'empêche pas les axiomes d'être vérifiés. En effet, il y a un «trou» dans l'axiomatique : elle n'exige pas que deux inividus aient même pére et même mère pour être frères ou soeurs. Par exemple : si a et b sont 2 individus et que la seule relation vérifiée est $Soeur(a,b)$ (il n'y a dans ce modèle ni père, ni mère). Alors les axiomes (F1) et(F2) qui sont équivalents sont vérifiés - puisque la prémisse de (F1) n'est jamais vérifiée. L'axiome (F3) est aussi trivialement vérifié – puisque $Mre(x,y)$ n'est jamais vérifié. Et l'axiome (F4) est également trivialement vérifié puisque l'antécédent $Frere(x,y)$ n'est jamais vérifié.
Commentaire : il en eût été différemment si les termes de l'axiome (F2) (ou (F1)) avaient été inversés. dans ce cas être frère ou soeur eût été équivalent à avoir même père ou même mère.

Notez encore qu'avec les axiomes donnés, rien n'empêche d'être à la fois soeur et mère d'un même individu, voire frère et mère ! C'est vraiment une famille embrouillée !...

(C2) $\forall x \forall y.(Mere(x, y) \rightarrow \neg Pere(x, y))$

Réponse

(C2) est la contraposée de (F3), c'est donc une conséquence des axiomes.

(C3) $\forall x \forall y.(Soeur(x, y) \rightarrow \exists z.(Pere(z, x) \wedge Pere(z, y)))$

Réponse

(C3) n'est pas conséquence des axiomes : (F1) dit que pour être soeur, il suffit d'avoir même père **ou** même mère. Il est donc possible que $Soeur(x, y)$ en ayant même mère, mais pas même père.

Certaines des trois formules (C1), (C2) et (C3) sont conséquences des axiomes d'autres non. Dites lesquelles sont conséquences des axiomes et celles qui ne le sont pas. Pour les formules qui ne sont pas conséquence, vous donnerez un contre-exemple ; pour les autres, vous justifierez votre réponse par les moyens de votre choix.

Attention : ne vous laissez pas tromper par les noms choisis pour les symboles de relation. Seuls comptent les axiomes et les règles logiques.

.../...

Exercice II : *Déduction naturelle*

Question (II.1) [2×3 pts]

Donnez une dérivation en déduction naturelle des formules suivantes

– $(F \to C) \to ((F \wedge G) \to C)$

Réponse

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle Ax$}
\UnaryInfC{$(F \to C) \vdash F \to C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle Ax$}
\UnaryInfC{$(F \wedge G) \vdash F \wedge G$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge e1$}
\UnaryInfC{$(F \wedge G) \vdash F$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to e$}
\BinaryInfC{$(F \to C), (F \wedge G) \vdash C$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to i(\times 2)$}
\UnaryInfC{$\vdash (F \to C) \to ((F \wedge G) \to C)$}
\end{prooftree}
$$

– $((F \vee G) \to C) \to ((H \to F) \to (H \to C))$

Réponse

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle Ax$}
\UnaryInfC{$((F \vee G) \to C) \vdash (F \vee G) \to C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle Ax$}
\UnaryInfC{$(H \to F) \vdash H \to F$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle Ax$}
\UnaryInfC{$H \vdash H$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to e$}
\BinaryInfC{$(H \to F), H \vdash F$}
\RightLabel{$\scriptstyle oui1$}
\UnaryInfC{$(H \to F), H \vdash F \vee G$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to e$}
\BinaryInfC{$((F \vee G) \to C), (H \to F), H \vdash C$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to i(\times 3)$}
\UnaryInfC{$\vdash ((F \vee G) \to C) \to ((H \to F) \to (H \to C))$}
\end{prooftree}
$$

– $(\neg F \to F) \to F$

Réponse

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle Ax$}
\UnaryInfC{$(\neg F \to F) \vdash \neg F \to F$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle Ax$}
\UnaryInfC{$F \vdash F$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to e$}
\BinaryInfC{$(\neg F \to F), F \vdash \neg F$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle Ax$}
\UnaryInfC{$F \vdash F$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg e$}
\BinaryInfC{$(\neg F \to F), F \vdash \bot$}
\RightLabel{$\scriptstyle Abs$}
\UnaryInfC{$(\neg F \to F) \vdash F$}
\RightLabel{$\scriptstyle \to i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\neg F \to F) \to F$}
\end{prooftree}
$$

Exercice III : *Conséquence logique*

Question (III.1) [2×2 pts] Montrez que

– $\exists x.\forall y.F \models \forall y.\exists x.F$

Réponse

Il faut montrer que pour tout modèle $\mathcal{M}$ (dont l'ensemble de base est M) et environnement ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.\forall y.F$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \forall y.\exists x.F$.

Si $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.\forall y.F$:

alors, pour au moins un $m_0 \in M$, on a $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m_0] \models \forall y.F$;

alors pour au moins un $m_0 \in M$ et pour tout $m \in M$, on a $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m_0][y \mapsto m] \models F$;

alors pour au moins un $m_0 \in M$ et pour tout $m \in M$, on a $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m][x \mapsto m_0] \models F$ (on a choisi $x \not\equiv y$) ;

alors pour tout $m \in M$, on a $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models \exists x.F$;

alors $\mathcal{M}, \rho \models \forall y.\exists x.F$.

– $\forall y.\exists x.F \not\models \exists x.\forall y.F$

RÉPONSE

La formule $\exists x.\forall y.F$ n'est une conséquence de $\forall y.\exists x.F$. C'est la fameuse situation : «tout le monde aime quelque chose, mais il n'y a pas une (unique) chose que tout le monde aime».

La manière la plus simple de démontrer cela est de construire un contre-modèle : on pose $F \equiv A(x, y)$, $M = \{a, b, c\}$ (rappelons que les éléments sont supposés différents 2 à 2), $\mathcal{I}_P(R) = \{(a, b); (b, c); (c, a)\}$. On vérifie bien que pour a, il existe $b \in M$ tel que $A(a, b)$; pour b, il existe $c \in M$ tel que $A(b, c)$ et, pour c, il existe $a \in M$ tel que $A(c, a)$. Maix si l'on suppose qu'il existe un $m \in M$ tel que $A(a, m)$ et $A(b, m)$ et $A(c, m)$ on obtient la contradiction que $m = a$ et $m = b$ et $m = c$; c'est-à-dire $m \neq m$.

La solution la plus en vogue dans vos copies a été de rendre $F \equiv y < x$ avec $M = I\!N$: c'est une bonne réponse.

Exercice IV : *Système T*

Question (IV.1) [3 pts]

On utilise le terme $\mathsf{add} : I\!N \to I\!N \to I\!N$.

Soit le terme

$$\begin{array}{lll} \lambda x.(\mathsf{rec}\ x & \lambda y.y & \\ & \lambda x_1 \lambda h \lambda y.(\mathsf{rec}\ y & (h\ \mathsf{S}x_1) \\ & & \lambda y_1 \lambda g.(\mathsf{add}\ (h\ y)\ g))) \end{array}$$

Montrez qu'il est de type $I\!N \to I\!N \to I\!N$.

RÉPONSE

L'arbre de dérivation du typage étant un peu gros, nous en donnons une version «linéarisée» :

On a :

(1) $y : I\!N \vdash y : I\!N$ par Ax

On déduit de (1)

(2) $\vdash \lambda y.y : I\!N \to I\!N$ par $\to i$.

On a :

(3) $g : I\!N \vdash g : I\!N$ par Ax

On a :

(4) $h : I\!N \to I\!N \vdash h : I\!N \to I\!N$ par Ax

On déduit de (4) et (3) :

(5) $g : I\!N, h : I\!N \to I\!N \vdash (h\ g) : I\!N$ par $\to e$

On a :

(6) $\vdash \mathsf{add} : I\!N \to I\!N \to I\!N$ (hypothèse de l'exercice)

On déduit de (6), (5) et (3) que :

(7) $y : I\!N, g : I\!N, h : I\!N \to I\!N \vdash (\mathsf{add}\ (h\ y)\ g) : I\!N$ par $\to e$ (2 fois)

On déduit de (7) :

(8) $y_1 : I\!N, y : I\!N, g : I\!N, h : I\!N \rightarrow I\!N \vdash (\mathsf{add}\ (h\ y)\ g) : I\!N$ par affaiblissement $(y_1 : I\!N)$

On déduit de (8) :

(9) $y : I\!N, h : I\!N \rightarrow I\!N \vdash \lambda y_1.\lambda g.(\mathsf{add}\ (h\ y)\ g) : I\!N \rightarrow I\!N \rightarrow I\!N$ par $\rightarrow i$ (2 fois)

On a :

(10) $x_1 : I\!N \vdash x_1 : I\!N$ par Ax

On déduit de (10) :

(11) $x_1 : I\!N \vdash x_1 : \mathsf{S}I\!N$ par N_s

On déduit de (4) et de (11) :

(12) $h : I\!N \rightarrow I\!N, x_1 : I\!N \vdash (h\ \mathsf{S}x_1) : I\!N$ par $\rightarrow e$

On déduit de (1), de (12) et de (9) :

(13) $x_1 : I\!N, h : I\!N \rightarrow I\!N, y : I\!N \vdash (\mathsf{rec}\ \ y\ (h\ \mathsf{S}x_1)\ \lambda y_1.\lambda g.(\mathsf{add}\ (h\ y)\ g)) : I\!N$ par N_e

On déduit de (13) :

(14) $\vdash \lambda x_1.\lambda h.\lambda y.(\mathsf{rec}\ \ y\ (h\ \mathsf{S}x_1)\ \lambda y_1.\lambda g.(\mathsf{add}\ (h\ y)\ g)) : I\!N \rightarrow (I\!N \rightarrow I\!N) \rightarrow (I\!N \rightarrow I\!N)$ par $\rightarrow i$ (3 fois)

On a :

(15) $x : I\!N \vdash x : I\!N$ par Ax

On déduit de (14), de (2) et de (13) :

(16) $x : I\!N \vdash (\mathsf{rec}\ \ x\ \lambda y.y\ \lambda x_1.\lambda h.\lambda y.(\mathsf{rec}\ \ y\ (h\ \mathsf{S}x_1)\ \lambda y_1.\lambda g.(\mathsf{add}\ (h\ y)\ g)) : I\!N \rightarrow I\!N$ par N_e

Et enfin, on déduit de (16) :

(18) $\vdash \lambda x.(\mathsf{rec}\ \ x\ \lambda y.y\ \lambda x_1.\lambda h.\lambda y.(\mathsf{rec}\ \ y\ (h\ \mathsf{S}x_1)\ \lambda y_1.\lambda g.(\mathsf{add}\ (h\ y)\ g)) : I\!N \rightarrow I\!N \rightarrow I\!N$ par $\rightarrow i$

Question (IV.2) [3 pts]

On utilise le terme mul vu en cours ou en TD qui calcule la multiplication de deux entiers. C'est-à-dire que $(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}\ \mathsf{S}^m\mathsf{0})$ se réduit en $\mathsf{S}^{n\times m}\mathsf{0}$.

Soit le terme $\mathsf{f} = \lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \mathsf{S0}\ \lambda x_1 \lambda h(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}x_1\ \ h))$. Montrez que ce terme calcule la factorielle. C'est-à-dire que $(\mathsf{f}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0})$ se réduit en $\mathsf{S}^{n!}\mathsf{0}$ où $n!$ est défini par $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Réponse

On montre que $(\mathsf{f}\ \mathsf{S}^n\mathsf{0}) \hookrightarrow \mathsf{S}^{n!}\mathsf{0}$ par récurrence sur n

– si $n = 0$, alors $\mathsf{S}^0\mathsf{0} = \mathsf{0}$, $\mathsf{S}^{0!}\mathsf{0} = \mathsf{S0}$ et

$$\begin{array}{rcl} (\mathsf{f}\ \mathsf{0}) & \hookrightarrow & (\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ \mathsf{S0}\ \lambda x_1 \lambda h(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}x_1\ h)) \\ & \hookrightarrow & \mathsf{S0} \end{array}$$

– si $n = n' + 1$, alors $\mathsf{S}^{n'+1}\mathsf{0} = \mathsf{SS}^{n'}\mathsf{0}$, $\mathsf{S}^{(n'+1)!}\mathsf{0} = \mathsf{S}^{(n'+1)\times(n'!)}\mathsf{0}$ et, par hypothèse de récurrence :

$$(\mathsf{f}\ \mathsf{S}^{n'}\mathsf{0}) \hookrightarrow \mathsf{S}^{n'!}\mathsf{0}$$

c'est-à-dire

$$(\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^{n'}\mathsf{0}\ \mathsf{S0}\ \lambda x_1 \lambda h(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}x_1\ h)) \hookrightarrow \mathsf{S}^{n'!}\mathsf{0}$$

On a

$$\begin{array}{rcl}(\mathsf{f}\ \mathsf{S}^{n'+1}0) & \hookrightarrow & (\mathsf{rec}\ \ \mathsf{SS}^{n'}0\ \lambda x_1\lambda h(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}x_1\ h)) \\ & \hookrightarrow & (\lambda x_1\lambda h(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}x_1\ h)\ \mathsf{S}^{n'}0\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^{n'}0\ \mathsf{S}0\ \lambda x_1\lambda h(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}x_1\ h))) \\ & \hookrightarrow & (\mathsf{mul}\ \mathsf{SS}^{n'}0\ (\mathsf{rec}\ \mathsf{S}^{n'}0\ \mathsf{S}0\ \lambda x_1\lambda h(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}x_1\ h))) \\ & \hookrightarrow & (\mathsf{mul}\ \mathsf{SS}^{n'}0\ \mathsf{S}^{n'!}0\end{array}$$

Or, tout tout $n, m \in I\!\!N$ on sait que $(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}^n0\ \mathsf{S}^m0) \hookrightarrow \mathsf{S}^{n\times m}0$, en particulier

$$(\mathsf{mul}\ \mathsf{SS}^{n'}0\ \mathsf{S}^{n'!}0) \hookrightarrow \mathsf{S}^{(n'+1)\times(n'!)}0$$

c'est-à-dire

$$\mathsf{S}^{(n'+1)!}0$$