Master 1 Informatique Année 2011/2012

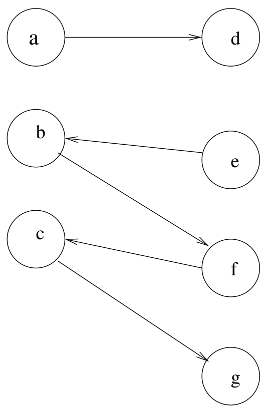
Logique pour l'Informatique Avancée
MI067 STL
Novembre 2011

Devoir sur table n° 1

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

Exercice I : *Modèles*

On se donne un symbole de relation binaire R. On considère l'ensemble de base (fini) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ et interprète la relation $R(x, y)$ comme $x \to y$. On propose alors le modèle suivant :



Question (I.1) Le modèle proposé satisfait-il la formule suivante :

$$\forall y.\exists x.R(x, y)$$

RÉPONSE

Non : il n'existe aucun x tel que $R(x, a)$, ni $R(x, e)$.

Question (I.2) Même question pour la formule :

$$\forall x.\forall y.\forall z_1.\forall z_2.\,[(x \neq y) \wedge R(x, z_1) \wedge R(y, z_2)] \to (z_1 \neq z_2)$$

Expliquez.

RÉPONSE

Oui : il n'y a pas d'élément qui soit cible de deux flèches d'origines distinctes.

Question (I.3) Si l'une au moins des deux formules ci-dessus n'est pas statisfaite, complétez le modèle proposé pour qu'elles soient toutes deux satisfaites (ajout d'élément ou ajout de flèches à la relation).

RÉPONSE

On rajoute : $R(g, a)$ et $R(d, e)$, par exemple.

Exercice II : *De Morgan*

On se propose de démontrer l'une des *lois de De Morgan* :

$$\neg(A \wedge B) \text{ si et seulement si } \neg A \vee \neg B$$

On décompose la preuve en deux étapes :

1. Si $\neg(A \wedge B)$ alors $\neg A \vee \neg B$.
2. Si $\neg A \vee \neg B$ alors $\neg(A \wedge B)$.

Pour chacune de ces étapes, on utilisera deux moyens :

– le moyen sémantique de la relation de conséquence ;
– le moyen syntaxique de la déduction naturelle.

Rappel : par définition de la fonction d'interprétation des formules, pour toute formule F, tout modèle $\mathcal{M}$ et tout environnement ρ :

– $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \top$ ou $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \bot$;
– $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \top$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho \neq \bot$;
– et $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \bot$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho \neq \top$.

Pour répondre aux deux questions suivantes, vous ferez aussi appel aux définitions de la conséquence sémantique $\Gamma \models F$, de relation de satisfaisabilité $\mathcal{M}, \rho \models F$ et des équivalences du FAIT (2) du cours.

Question (II.1) Montrez que $\neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B$.

RÉPONSE

Pour montrer $\neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B$, on montre que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et environnement ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \neg(A \wedge B)$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \neg A \vee \neg B$.

Par l'absurde : supposons (1) $\mathcal{M}, \rho \models \neg(A \wedge B)$ et (2) $\mathcal{M}, \rho \not\models \neg A \vee \neg B$.

Si $\mathcal{M}, \rho \not\models \neg A \vee \neg B$	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg A \vee \neg B)_\rho = \bot$
	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg A)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg B)_\rho = \bot$
	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(A)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(B)_\rho = \top$
	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(A \wedge B)_\rho = \top$
	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg(A \wedge B))_\rho = \bot$
	et	$\mathcal{M}\rho \not\models \neg(A \wedge B)$

Ce qui contredit l'hypothèse $\mathcal{M}, \rho \models \neg(A \wedge B)$.

Question (II.2) Montrez que $\neg A \vee \neg B \models \neg(A \wedge B)$.

RÉPONSE

Ici également, on procède par l'absurde en supposant un modèle $\mathcal{M}$ et un environnement ρ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \neg A \vee \neg B$ et $\mathcal{M}, \rho \not\models \neg(A \wedge B)$.

Si $\mathcal{M}, \rho \not\models \neg(A \wedge B)$	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg(A \wedge B))_\rho = \bot$
	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}((A \wedge B))_\rho = \top$
	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(A)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(B)_\rho = \top$
	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg A)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg B)_\rho = \bot$
	alors	$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg A \vee \neg B)_\rho = \bot$
	et	$\mathcal{M}, \rho \not\models \neg A \vee \neg B$

Ce qui contredit l'hypothèse $\mathcal{M}, \rho \models \neg A \vee \neg B$.

Pour répondre aux deux questions suivantes, vous utiliserez les règles de la déduction naturelle, ainsi que le résultat $\vdash A \lor \neg A$ (que l'on admettra).

Question (II.3) Montrez que $\neg(A \land B) \vdash \neg A \lor \neg B$ (c'est ici que l'on utilise $\vdash A \lor \neg A$).

RÉPONSE

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A \lor \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,{\scriptstyle Ax} \quad \dfrac{}{B \vdash B}\,{\scriptstyle Ax}}{A, B \vdash A \land B}\,{\scriptstyle \land i} \quad \dfrac{}{\neg(A \land B) \vdash \neg(A \land B)}\,{\scriptstyle Ax}}{\neg(A \land B), A, B \vdash \bot}\,{\scriptstyle \neg e}}{\neg(A \land B), A \vdash \neg B}\,{\scriptstyle \neg i}}{\neg(A \land B), A \vdash A \lor \neg B}\,{\scriptstyle \lor i2} \qquad \dfrac{{\scriptstyle Ax}\,\neg A \vdash \neg A}{\neg(A \land B), \neg A \vdash \neg A \lor \neg B}\,{\scriptstyle \lor i1}}{\neg(A \land B) \vdash \neg A \lor \neg B}\,{\scriptstyle \lor e}$$

Question (II.4) Montrez que $\neg A \lor \neg B \vdash \neg(A \land B)$.

RÉPONSE

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A \lor \neg B \vdash \neg A \lor \neg B}\,{\scriptstyle Ax} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land B \vdash A \land B}\,{\scriptstyle Ax}}{A \land B \vdash A}\,{\scriptstyle \land e1} \quad \dfrac{}{\neg A \vdash \neg A}\,{\scriptstyle Ax}}{A \land B, \neg A \vdash \bot}\,{\scriptstyle \neg e} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land B \vdash A \land B}\,{\scriptstyle Ax}}{A \land B \vdash B}\,{\scriptstyle \land e2} \quad \dfrac{}{\neg B \vdash \neg B}\,{\scriptstyle Ax}}{A \land B, \neg B \vdash \bot}\,{\scriptstyle \neg e}}{\neg A \lor \neg B, A \land B \vdash \bot}\,{\scriptstyle \lor e}}{\neg A \lor \neg B \vdash \neg(A \land B)}\,{\scriptstyle \neg i}$$

<u>Exercice III :</u>

La *barre de Sheffer* (notée |) est un connecteur propositionnel défini par la table de vérité suivante :

A	B	$A\|B$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

C'est l'opérateur booléen `nand`.

Soient A et B deux formules du calcul des prédicats, on dit A *est équivalente à* B si et seulement si $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B)$. On note $A \simeq B$.

Question (III.1) Vérifiez, à l'aide des tables de vérité, que

1. $\neg A \simeq (A|A)$

   RÉPONSE

A	$\neg A$	$A\|A$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

2. $(A \land B) \simeq \neg(A|B)$

   RÉPONSE

A	B	$A \land B$	$A\|B$	$\neg(A\|B)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$

Question (III.2) Montrez que, pour toute formule A du calcul des prédicats, il existe une formule A^* équivalente dont les seuls symboles logiques sont le connecteur propositionnel $|$ et le quantificateur $\forall$.

Pour répondre à cette question vous pourrez utiliser, sans les démontrer, les équivalences suivantes :

1. $\neg\neg A \simeq A$
2. $\neg(A \vee B) \simeq \neg A \wedge \neg B$
3. $\exists x.A \simeq \neg\forall x.\neg A$

Vous procèderez par récurrence sur la forme de la formule A.

Nota : le cas de base, si A est une formule atomique est trivial puisque qu'alors A ne contient aucun symbole logique.

Réponse

Par induction sur la forme de A (en excluant le cas atomique).

- si $A \equiv \neg A_1$. Par hyptotèse d'induction, on a qu'il existe $A_1^* \simeq A_1$. On a vu que $\neg A_1^* \simeq (A_1^*|A_1^*)$. On pose donc : $(\neg A_1)^* \equiv (A_1^*|A_1^*)$.
- si $A \equiv A_1 \vee A_2$. On a

$$\begin{array}{rcl} A_1 \vee A_2 & \simeq & \neg\neg(A_1 \vee A_2) \\ & \simeq & \neg(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \\ & \simeq & \neg\neg(\neg A_1|\neg A_2) \\ & \simeq & \neg A_1|\neg A_2 \\ & \simeq & (A_1|A_1)|(A_2|A_2) \end{array}$$

  Par hypothèse d'induction, on a A_1^* et A_2^* : $(A_1 \vee A_2)^* \equiv (A_1^*|A_1^*)|(A_2^*|A_2^*)$
- si $A \equiv A_1 \wedge A_2$.

$$\begin{array}{rcl} A_1 \wedge A_2 & \simeq & \neg(A_1|A_2) \\ & \simeq & (A_1|A_2)|(A_1|A_2) \end{array}$$

  Par hypothèse d'induction, on a A_1^* et A_2^* : $(A_1 \wedge A_2)^* \equiv (A_1^*|A_2^*)|(A_1^*|A_2^*)$
- si $A \equiv A_1 \rightarrow A_2$. On vérifie que $A_1 \rightarrow A_2 \simeq \neg A_1 \vee A_2$ par les tables de vérité

A_1	A_2	$A_1 \rightarrow A_2$	$\neg A_1$	$\neg A_1 \vee A_2$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

  On a, par hypothèse d'induction A_1^* et A_2^*. On a que

$$\begin{array}{rcl} (A_1^* \rightarrow A_2^*) & \simeq & \neg A_1^* \vee A_2^* \\ & \simeq & (A_1^*|A_1^*) \vee A_2^* \\ & \simeq & ((A_1^*|A_1^*)|(A_1^*|A_1^*))|(A_2^*|A_2^*) \end{array}$$

- si $A \equiv \forall x.A_1$. Le résultat est immédiat par hypothèse d'induction : $(\forall x.A_1)^* \equiv \forall x.A_1^*$.
- si $A \equiv \exists x.A_1$. On a

$$\begin{array}{rcl} \exists x.A_1 & \simeq & \neg\forall x.\neg A_1 \\ & \simeq & \neg\forall x.(A_1|A_1) \\ & \simeq & (\forall x.(A_1|A_1))|(\forall x.(A_1|A_1)) \end{array}$$

  On pose $(\exists x.A_1)^* \equiv (\forall x.(A_1^*|A_1^*))|(\forall x.(A_1^*|A_1^*))$.