Logique
pour l'Informatique Avancée
MI067 STL
Janvier 2012

Devoir sur table n° 3

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

Exercice I : *Encore des histoires de famille*

Soit les symboles de relations binaires suivants : $Pere$, $Oncle$, $Frere$ (on ne considère que les éléments masculins de la famille, pour simplifier)

On se donne les axiomes suivants
(A1) $\forall x.\neg Frere(x,x)$
(A2) $\forall x.\forall y.(Frere(x,y) \to Frere(y,x))$
(A3) $\forall x.\forall y.\forall z.(Pere(x,y) \wedge Frere(y,z) \to Pere(x,z))$
(A4) $\forall x.\forall y.\forall z.(Pere(x,z) \wedge Oncle(y,z) \to Frere(x,y))$
(A5) $\forall x.\forall y.\forall z.(Pere(x,z) \wedge Frere(x,y) \to Oncle(y,z))$
(A6) $\forall x.\exists y.Pere(y,x)$

Question (I.1) [3×2 pts]

Soit les formules
(F1) $\forall x.\forall y.\forall z.(Pere(x,z) \to \neg O(x,z))$
(F2) $\forall x.\forall y.\forall z.(Frere(x,y) \wedge Frere(y,z) \to Frere(x,z))$
(F3) $\forall x.\forall y.\forall z.(Oncle(x,y) \wedge Frere(y,z) \to Oncle(x,z))$

Certaines des trois formules (F1), (F2) et (F3) sont conséquences des axiomes d'autres non. Dites lesquelles sont conséquences des axiomes et celles qui ne le sont pas. Vous justifierez votre réponse par les moyens de votre choix.

Attention : ne vous laissez pas tromper par les noms choisis pour les symboles de relation. Seuls comptent les axiomes et les règles logiques.

Exercice II : *Déduction naturelle*

Question (II.1) [3×2 pts]

Donnez une dérivation en déduction naturelle des formules suivantes

- $((H \to (F \wedge G)) \wedge (F \to C)) \to (H \to C)$
- $(F \to K) \to ((G \to K) \to ((F \vee G) \to K))$
- $((F \to G) \wedge \neg F) \to \neg G$

Exercice III : *Conséquence logique*

Question (III.1) [2×2 pts] Montrez que

- $\exists x.(F \vee G) \models (\exists x.F \vee \exists x.G)$
- $\exists x.(F \wedge G) \not\models (\exists x.F \wedge \exists x.G)$

Exercice IV : *Système T*

Question (IV.1) [3 pts]

Montrez que le terme

$$\begin{array}{lll} \lambda x.(\mathsf{rec}\ x & \lambda y.\mathsf{S}y & \\ & \lambda z\lambda h\lambda y.(\mathsf{rec}\ y & (h\ \mathsf{S}y) \\ & & \lambda w\lambda g.\mathsf{S}(h\ g))) \end{array}$$

est de type $I\!N \to I\!N \to I\!N$.

Question (IV.2) [3 pts]

On utilise le terme mul vu en cours ou en TD qui calcule la multiplication de deux entiers. C'est-à-dire que $(\mathsf{mul}\ \mathsf{S}^n 0\ \mathsf{S}^m 0)$ se réduit en $\mathsf{S}^{n \times m} 0$.

Soit le terme $\mathsf{f} = \lambda x.\lambda n.(\mathsf{rec}\ \ n\ \mathsf{S}0\ \lambda p.\lambda h.(\mathsf{mul}\ x\ h)$. Montrez que ce terme calcule l'élévation à la puissance. C'est-à-dire que pour tout x, $(\mathsf{f}\ x\ \mathsf{S}^n 0)$ se réduit en $\mathsf{S}^{x^n} 0$ où x^n est défini par $x^0 = 1$ et $x^{(n+1)} = x \times x^n$.