UPMC/MASTER/INFO/STL/MI067

P Manoury

Septembre 2012

1 Calcul des prédicats du premier ordre

Le *calcul des prédicats du premier ordre*[1] organise symboliquement le monde en deux niveaux :

1. Le niveau des *individus*. Un individu peut être désigné soit directement par un symbole, soit par une combinaison de symboles. Les symboles désignant un individu sont de deux sortes : les symboles de *variables* qui désignent un individu quelconque, indéterminé, possiblement interchangeable selon le contexte ; les symboles de *constantes* (sous-entendu *d'individu*) qui désignent un individu bien défini, à la manière d'un nom propre. Les symboles que l'on peut utiliser pour désigner un individu par combinaison sont les symboles de *fonctions* ou d'opérations sur les individus.

   Dans le monde des nombres, 2 et 3 sont des individus et $+$ un symbole de fonction. La combinaison $3 + 2$ désigne un individu (et un seul) connu aussi sous le nom de 5, ou encore, désigné également par la combinaison $4 + 1$. La combinaison $x + 1$, où x est un symbole de variable, désigne un individu qui ne pourra être pleinement déterminé que lorsque x le sera.

   On emploie parfois le nom ≪formule≫ pour désigner les combinaisons telles que $1 + 3$ ou $x + 1$. Dans le cadre du langage logique que nous étudierons, nous emploierons le nom *terme* pour désigner tout symbole ou combinaison de symboles désignant un individu, réservant le nom ≪formule≫ pour la suite.

2. Le niveau des propriétés et des relations entre individus, dit niveau des *prédicats*. On peut désigner des propriétés ou des relations entre individus en utilisant des symboles. Une propriété concerne un seul individu, une relation en engage plusieurs. Dans le langage du calcul des prédicats, on ne considère plus qu'une seule chose : les symboles de prédicat, que ceux-ci soient applicables à 1, 2, 3, etc. individus.

   Pour reprendre un exemple dans le monde des nombres, le symbole $\leq$ désigne la relation d'ordre entre les individus. Pour exprimer la relation entre deux individus désignés par des termes, on combine le symbole de relation et les termes d'individus, comme dans $0 \leq x + 1$ ou $x + 1 \leq 0$. Les propriétés ou les relations sont comme des fonctions qui, lorsqu'on les applique à des individus, prennent une valeur ; mais pour les prédicats, il n'y a que deux valeurs possibles, exclusives l'une de l'autre, que l'on appelle *valeurs de vérité* et qui sont : soit le ≪vrai≫, soit le ≪faux≫. Un prédicat, appliqué à des termes, *désigne* donc une valeur de vérité.

   Et le ≪vrai≫ et le ≪faux≫, ou toute combinaison les désignant, sont à leur tour combinables. Le langage du calcul des prédicats dispose pour créer ces combinaisons de deux catégories d'opérateurs : les *connecteurs propositionnels* et les *quantificateurs*.
   Par exemple, toujours dans le monde des nombres, le symbole $\neg$ désigne l'opération de négation d'une valeur de vérité et on pourra former la combinaison $\neg(0 \leq x + 1)$; ou encore, le symbole $\vee$ désigne l'opération de disjonction (le ≪ou≫) entre deux valeurs de vérités, et on pourra former la combinaison $(0 \leq x + 1) \vee (x + 1 \leq 0)$. Ces deux combinateurs de valeurs de vérités sont deux connecteurs propositionnels. On peut en utiliser d'autres.
   L'autre catégorie de combinateurs de valeurs de vérités sont les quatificateurs. Ils sont d'une autre sorte

1. Par la suite, l'expression ≪calcul des prédicat≫ sous-entendra toujours ≪du premier ordre≫.

syntaxique que les connecteurs propositionnels en ce sens qu'ils combinent un symbole de variable d'individu avec une combinaison désignant une valeur de vérité. Par exemple, le symbole $\forall$ désigne le quantificateur *universel* (le ≪*pour tout*≫), et on peut former la combinaison $\forall x.(0 \leq x+1)$. L'autre quantificateur est le quantificateur *existentiel* noté $\exists$.

Ce sont les combinaisons désignant des valeurs de vérité que, dans le langage du calcul des prédicats, on appelle *formules*. Lorsqu'une formule est composée uniquement de termes et d'un symbole de prédicat, on parle de *formule atomique*.

Nous avons décrit ci-dessus les principes de construction des formules du calcul des prédicats qui distingue deux niveaux de désignation : les individus et les valeurs de vérité. Même si les seuls exemples choisis l'ont été dans le monde des nombres, le formalisme du calcul des prédicats ne se limite pas nécessairement à ce monde. D'autre part, nous avons dit que les symboles ou les combinaisons de symboles ≪désignent≫ des individus ou des valeurs de vérités, mais nous nous sommes bien gardé de dire comment. Le symbole de variable x désigne un individu, mais, lequel ? Également, nous avons pris pour exemples des formules qui peuvent paraître vraies, ou fausses, ou ni l'une ni l'autre si l'on ne précise pas, par exemple, le domaine des nombres considérés (entiers positifs uniquement ou entiers relatifs).

La définition du rapport entre symboles, combinaisons de symboles et ce qu'ils désignent fera l'objet d'un paragraphe ultérieur : la *sémantique* du calcul des prédicats. Avant cela, nous allons donner une définition générale de la *syntaxe* des formules du calcul des prédicats.

1.1 Syntaxe

Le langage du calcul des prédicats doit être défini formellement, comme l'est un langage de programmation, mais, afin de pouvoir poser ou étudier ses propriétés, il doit l'être de manière générale. Ce qui entraîne une certaine abstraction par rapport à l'usage de l'écriture des formules que nous avons pu acquérir, principalement, en mathématiques. Nous allons donc donner dans ce paragraphe la syntaxe d'un langage *idéal* pour le calcul des prédicat. Cet ≪idéal≫ ne doit pas être compris comme le meilleur possible, mais plutôt comme le plus détaché des contingences et variantes de notations. Un peu comme LISP et Scheme ont idéalisé la syntaxe en choisissant de systématiser la notation préfixe complètement parenthésée de l'application fonctionnelle.

Définies formellement, les expressions – termes et formules – du calcul des prédicats deviennent des objets sur lesquels on peut exprimer des propriétés, à propos desquelles on peut raisonner. Bien entendu, pour parler des objets syntaxiques du calcul des prédicats, on n'utilisera pas le calcul des prédicats lui-même. C'est une loi générale : un langage ne peut parler de lui même. Il faut pour parler des constructions d'un langage, un autre langage, un langage d'un autre ordre, un *méta-langage*. Le méta-langage que nous emploierons dans ce cours sera la langue naturelle enrichie des connaissances que nous avons des objets syntaxiques et de quelques objets mathématiques. Essentiellement, nous devrons connaître un peu d'arithmétique, un peu de théorie des ensembles et des fonctions ; savoir ce que sont des structures de listes et d'arbres.

1.1.1 Les termes

Pour définir les termes, nous avons besoin de trois ensembles de symboles : les symboles de variables, les symboles de constantes et les symboles de fonctions. On se donne donc *abstraitement*, c'est-à-dire sans en définir réellement le contenu, les trois ensembles suivants

- $\mathcal{X}$: l'ensemble des symboles de variables ;
- $\mathcal{C}$: l'ensemble des symboles de constantes ;
- $\mathcal{F}$: l'ensemble des symboles de fonctions.

Ces trois ensembles doivent être disjoints. On doit également supposer que l'ensemble $\mathcal{X}$ est infini, comme l'ensemble des entiers naturels. Il n'est pas nécessaire de le supposer pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$, mais cela ne coûte pas plus cher de le faire. On doit également supposer que l'ensemble des symboles de fonctions $\mathcal{F}$ est muni d'une fonction d'*arité*. C'est-à-dire qu'à chaque symbole de fonction est associé un nombre entier qui indique le nombre d'arguments que l'on doit appliquer à ce symbole pour construire une combinaison correcte ; ce nombre est l'*arité* du symbole.

Outre les symboles de ces trois ensembles, nous nous donnons les trois symboles de ponctuation : ≪parenthèse ouvrante≫ que l'on écrit (; ≪parentèse fermante≫ que l'on écrit) et ≪virgule≫ que l'on écrit ,.

La définition de l'ensemble des termes est une *définition récursive*. La voici :

1. Les symboles de variables et les symboles de constantes sont des termes.
2. Si f est un symbole de fonction d'arité n et si $t_1, \ldots, t_n$ sont n termes, alors la combinaison $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme.

On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes.

Pour dire les choses plus ≪mathématiquement≫ :

<u>Définition :</u> (1)

1. $\mathcal{X} \subset \mathcal{T}$ et $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$.
2. Si $f \in \mathcal{F}$ d'arité n et si $t_1 \in \mathcal{T}, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.

Une autre manière de présenter cette définition est d'utiliser un formalisme *à la BNF*. Si x désigne une variable, si c désigne une constante et f une fonction, on définit l'ensemble t des termes par

$$t \quad ::= \quad x \mid c \mid f(t, \ldots, t)$$

Cette définition omet la précision de l'arité des symboles de fonction. On se restreint alors, pour définir proprement l'ensemble des termes, aux éléments de t de la forme $f(t, \ldots, t)$ qui satisfont l'arité de f.

Syntaxiquement, les termes sont des structures arborescentes dont les feuilles sont étiquetées par les symboles de variables ou de constante et les nœuds par les symboles de fonction. En tant que tels, on peut définir sur les termes des fonctions, comme on sait définir des fonctions sur les arbres. Il faut pour cela supposer que l'on dispose d'un certain nombre de connaissances sur les constituants de bases des termes, c'est-à-dire, les symboles. Par exemple, on doit savoir reconnaître que deux symboles sont identiques ou non. Si s_1 et s_2 sont deux symboles, on notera $s_1 \equiv s_2$ l'identité entre les symboles s_1 et s_2 ; on notera $s_1 \not\equiv s_2$ le fait que les symboles s_1 et s_2 sont distincts. De cette identité syntaxique, on déduit trivialement la définition de l'identité syntaxique entre termes (que l'on notera $\equiv_t$). Cette définition est *récursive*, elle suit les clauses de construction des termes.

1. Si s_1 et s_2 sont deux symboles de variable ou de constante alors $s_1 \equiv_t s_2$ si et seulement si $s_1 \equiv s_2$.
2. Si f_1 et f_2 sont deux symboles de fonctions de même arité n et si $t_1, \ldots, t_n$, et $u_1, \ldots, u_n$ sont des termes alors $f_1(t_1, \ldots, t_n) \equiv_t f_2(u_1, \ldots, u_n)$ si et seulement si $f_1 \equiv f_2$, $t_1 \equiv_t u_1$, …et $t_n \equiv_t u_n$.

Par la suite, on notera plus simplement $\equiv$ pour $\equiv_t$. Le contexte suffira en général pour lever l'ambiguïté. Naturellement, l'identité syntaxique doit impliquer l'égalité des individus désignés (si $t_1 \equiv t_2$ alors $t_1 = t_2$), mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai : dans le monde des nombres $5 + 3 = 8$ mais dans le monde des termes, $5 + 3 \not\equiv 8$.

Voici la définition d'une autre fonction utile sur les termes : celle qui calcule l'ensemble des symboles de variables ayant une *occurrence* dans un terme t, que l'on note $\mathcal{V}(t)$ et que l'on définit par récurrence sur la construction de t.

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{V}(x) & = & \{x\} & \text{si } x \in \mathcal{X} \\ \mathcal{V}(c) & = & \emptyset & \text{si } c \in \mathcal{C} \\ \mathcal{V}(f(t_1, \ldots, t_n) & = & \mathcal{V}(t_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(t_n) & \end{array}$$

On notera en conséquence $x \in \mathcal{V}(t)$ le fait que x a une occurrence dans le terme t.

De façon plus général, on peut définir, pour un terme t l'ensemble de ses *sous-termes*, c'est l'ensemble de ses sous arbres. Par défaut, un terme est sous-terme de lui-même (la relation ≪sous-terme de≫ est réflexive). Si t' est sous-terme de t et $t' \not\equiv t$, on dit que t' est sous-terme *strict* de t. Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, on dit que t_1, …et t_n sont des sous-termes *immédiats* de t.

Exos : les définitions inductives (sous-termes, hauteur, etc.).

1.1.2 Les formules

Pour définir l'ensemble des formules, il faut disposer de l'ensemble des termes $\mathcal{T}$, et donc des ensembles de symboles $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$, ainsi que d'un nouvel ensemble de symboles : $\mathcal{P}$, l'ensemble des symboles de prédicat. Cet ensemble est également supposé muni d'une fonction d'arité. Les autres symboles nécessaires sont ceux des connecteurs propositionnels ($\neg$, $\vee$, $\wedge$ et $\rightarrow$) et des quantificateurs ($\forall$ et $\exists$). Les parenthèses et la virgule seront également mises à contribution auxquelles on ajoute le point.

L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules du calcul des prédicats du premier ordre est ainsi défini :

<u>Définition :</u> (2)

1. Si $t_1 \in \mathcal{T}$,...et $t_n \in \mathcal{T}$ et si $P \in \mathcal{P}$ d'arité n alors $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$.
2. Si $F \in \mathcal{F}$ alors $\neg F \in \mathcal{F}$.
3. Si $F_1 \in \mathcal{F}$ et $F_2 \in \mathcal{F}$ alors $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{F}$, $(F_1 \vee F_2) \in \mathcal{F}$ et $(F_1 \rightarrow F_2) \in \mathcal{F}$.
4. Si $x \in \mathcal{X}$ et $F \in \mathcal{F}$ alors $\forall x.F \in \mathcal{F}$ et $\exists x.F \in \mathcal{F}$.

La relation d'identité syntaxique est étendue aux formules. On la note toujours $\equiv$ (définition en exercice).

Les formules sont également des structures arborescentes, incluant celle des termes. On y retrouve les notions de *sous-formule*, sous-formule *stricte* et sous-formule *immédiate*.

Exo : définir l'ensemble des sous-formules, strictes, immédiates.

L'égalité La relation d'égalité, celle usuellement notée =, peut être ou non comprise parmi les symboles de prédicats. Lorsque c'est le cas, on suppose qu'elle vérifie les propriétés des relations d'équivalence (ce qui peut être exprimé par des formules) ainsi que celle plus particulière qui dit que : ≪ dans toute formule, deux termes égaux peuvent être remplacés l'un par l'autre sans changer la valeur de vérité de la formule≫ ; ce que Liebniz à qui l'on doit cette caractérisation exprimait par : *eadem sunt qui substitui possunt salva veritate*. Cette seconde propriété ne peut pas être exprimée par une formule du calcul des prédicats du premier ordre à cause du ≪pour toute formule≫. Au premier ordre, le quantificateur universel ne peut être utilisé qu'au niveau des individus, pas au niveau des prédicats. Un langage qui autorise la quantification au niveau des prédicats est dit du *second ordre*. On peut alors y *définir* l'égalité $t = u$ par la formule $\forall X.(X(t) \leftrightarrow X(u))$. Mais ceci sort du cadre de ce cours.

Variables et quantificateurs On sait que dans les formules $\forall x.\exists y.R(x, y)$ et $\forall y.\exists z.R(y, z)$ le changement des symboles de variable ne change pas leur valeur de vérité. L'insensibilité des valeurs de vérité par rapport aux symboles ou noms de variables tient au rôle assigné aux quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Les quantificateurs ont un rôle logique et un rôle syntaxique.

Syntaxiquement, les quantificateurs sont des *lieurs* possédant une certaine *portée* à l'intérieur des formules. Dans les formules $\forall x.F$ et $\exists x.F$ (qui peuvent être sous-formules dans une formule plus grande), la portée des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est la formule F et la variable x est alors dite *liée* dans ces formules, plus exactement, ce sont les *occurrences* du symbole de variable tombant sous la *portée* d'un quantificateur qui sont liées et plus exactement encore, ce sont les occurrences de x dans F qui ne sont pas sous la portée d'un autre quantificateur qui sont liées dans $\forall x.F$ ou $\exists x.F$. Dualement, si l'on supprime la quantification, ces occurrences de x deviennent *libres* dans F. Une fois liée par un quantificateur, une occurrence de variable ne peut plus l'être par un autre. Par exemple, dans $\forall x.(P(x) \rightarrow \exists x.Q(x))$, le x de $P(x)$ est lié par le $\forall x$ alors que le x de $Q(x)$ est lié par le $\exists x$ et non par le $\forall x$.

Logiquement, et c'est ce qui permet le *renommage* des variables liées, les quantificateurs servent à désigner des ensembles possibles d'individus. Le quantificateur universel vise l'ensemble des tous les individus possibles. Le quantificateur existentiel vise au moins un individu, possiblement plusieurs, mais jamais zéro. Ainsi, que l'on donne un nom ou l'autre à ces individus ne doit pas importer.

Rappelons que nous avons supposé un *ensemble infini* de symboles de variables. C'est ici que prend sens cette hypothèse : elle rend toujours possible le changement de nom d'une variable liée puisque toute formule étant une suite finie de symbole, il existera toujours un symbole de variable non utilisé dans une formule que l'on pourra choisir pour donner un nouveau nom à une variable liée.

Soit $F \in \mathcal{F}$ nous définissons conjointement les ensembles : $\mathcal{V}(F)$ de toutes les variables de F ; $\mathcal{V}b(F)$ des variables ayant une occurrence liée dans F (*bound* en anglais) et $\mathcal{V}f(F)$ des variables ayant une occurrence libre dans F (*free* en anglais).

Définition : des ensembles $\mathcal{V}(F)$, $\mathcal{V}b(F)$ et $\mathcal{V}f(F)$

1. Si $F \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$ avec $t_1 \in \mathcal{T}$,...,$t_n \in \mathcal{T}$ et $P \in \mathcal{P}$ d'arité n alors $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}f(F) = \mathcal{V}(t_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(t_n)$ et $\mathcal{V}b(F) = \emptyset$.
2. Si $F \equiv \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(G)$, $\mathcal{V}f(F) = \mathcal{V}f(F)$ et $\mathcal{V}b(F) = \mathcal{V}b(G)$.
3. Si $F \equiv G_1 \wedge G_2$ ou $F \equiv G_1 \vee G_2$ ou $F \equiv G_1 \to G_2$ avec $G_1 \in \mathcal{F}$ et $G_2 \in F$ alors $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(G_1) \cup \mathcal{V}(G_2)$ $\mathcal{V}f(F) = \mathcal{V}f(G_1) \cup \mathcal{V}f(G_2)$ et $\mathcal{V}b(F) = \mathcal{V}b(G_1) \cup \mathcal{V}b(G_2)$.
4. Si $F \equiv \forall x.G$ ou $F \equiv \exists x.G$ avec $x \in \mathcal{X}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(G)$, $\mathcal{V}f(F) = \mathcal{V}f(G) - \{x\}$ et $\mathcal{V}b(F) = \{x\} \cup \mathcal{V}b(G)$.

Exercices : $\mathcal{V}b(F) \cap \mathcal{V}f(F) = \emptyset$? $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}b(F) \cup \mathcal{V}f(F) = \emptyset$? $\mathcal{V}b(F) = \mathcal{V}(F) - \mathcal{V}f(F)$? $\mathcal{V}f(F) = \mathcal{V}(F) - \mathcal{V}b(F)$?

Une formule qui ne contient aucune variable libre est appelée formule *close*. Dans une formule close, toutes les variables sont liées par un quantificateur. Une formule sans quantificateurs peut aussi être close si elle ne contient aucun symbole de variable, uniquement des symboles de fonctions et de constantes.

Si F est une formule dont les variables libres sont $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on appelle *clôture universelle de* F la formule $\forall x_1 \ldots \forall x_n.F$. C'est une formule close. On notera $\forall\!\!\!\forall F$.

Substitution On peut, en logique, passer du général au particulier : si l'on sait que quelques chose est vrai pour tout x alors on sait que cette chose est aussi vrai d'un individu désigné par n'importe quel terme t. Syntaxiquement, cette forme de raisonnement consiste à *substituer* le terme t *aux occurrences libres* de x dans une formule. Cette opération de substitution peut entraîner la nécessité d'un renommage de certaines variables liées de la formule. Par exemple si la formule est $(x \neq 0 \to \exists y.(x = y + 1)$ et si l'on veut remplacer x par un terme contenant y, par exemple $2y$, il faut avoir au préalable renommé le y de la formule. Ceci ne change pas la valeur de vérité de la formule, puisque y est liée. On obtiendra, par exemple $2y \neq 0 \to \exists z.(2y = z+1)$. Ce qui n'est pas la même chose que $2y \neq 0 \to \exists y.(2y = y+1)$. Sans le renommage de y en z nous aurions eu ce que l'on appelle un phénomène de *capture* de variable ; ce qui est à proscrire rigoureusement de l'opération de substitution.

Voici la définition formelle de la substitution sur les termes et sur les formules.

Termes : on écrit $t[u/x]$ pour désigner le terme obtenu en remplaçant les occurrences de x dans le terme t par le terme u, on dit ≪*t dans lequel u remplace x*≫ :

1. Si $t \equiv x$ alors $t[u/x] = x[u/x] = u$.
2. Si $t \equiv y$ avec $y \in \mathcal{X}$ et $y \not\equiv x$ alors $t[u/x] = y$.
3. $t \equiv c$ avec $c \in \mathcal{C}$ alors $t[u/x] = c[u/x] = c$.
4. Si $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$ avec $f \in \mathcal{F}$, $t_1 \in \mathcal{T}$,...et $t_n \in \mathcal{T}$ alors $t[u/x] = f(t_1[u/x], \ldots, t_n[u/x])$.

Formules : on écrit $F[u/x]$ pour désigner la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x dans F par u.

1. Si $F \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$ avec $t_1 \in \mathcal{T}$,...,$t_n \in \mathcal{T}$ et $P \in \mathcal{P}$ d'arité n alors $F[u/x] = P(t_1[u/x], \ldots, t_n[u/x])$.
2. Si $F \equiv \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}$ alors $F[u/x] = (\neg G)[u/x] = \neg G[u/x]$.
3. Si $F \equiv G_1 \wedge G_2$ ou $F \equiv G_1 \vee G_2$ ou $F \equiv G_1 \to G_2$ avec $G_1 \in \mathcal{F}$ et $G_2 \in F$ alors, respectivement, $F[u/x] = G_1[u/x] \wedge G_2[u/x]$, $F[u/x] = G_1[u/x] \vee G_2[u/x]$ et $F[u/x] = G_1[u/x] \to G_2[u/x]$.
4. Si $F \equiv \forall x.G$ ou $F \equiv \exists x.G$ avec $x \in \mathcal{X}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $F[u/x] = F$ puisque x n'est pas libre dans $\forall x.G$ et dans $\exists x.G$.

5. Si $F \equiv \forall y.G$ ou $F \equiv \exists y.G$ avec $y \not\equiv x$, $x \in \mathcal{X}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors, respectivement, $F[u/x] = \forall z.G[z/y][u/x]$ et $F[u/x] = \exists z.G[z/y][u/x]$ avec $z \in \mathcal{X} - \mathcal{V}(u) - \mathcal{V}f(G)$.

Exercices : prendre pleins d'exemples tordus, programmer ?

α-équivalence Avec les variables liées, il est possible d'identifier des formules (c'est-à-dire, de les considérer comme ≪égales≫), même si elles ne sont pas rigoureusement syntaxiquement identiques. Par exemple, on considère comme ≪égales≫ les formules $\forall x.P(x)$ et $\forall y.P(y)$. On dit que ces deux formules sont *α-équivalentes.* On définit la relation $\equiv_\alpha$ par induction sur les formules :

1. $P(t_1, \ldots, t_n) \equiv_\alpha P(t_1, \ldots, t_n)$
2. $\neg F \equiv_\alpha \neg G$ si et seulement si $F \equiv_\alpha G$
3. $F_1 \wedge F_2 \equiv_\alpha G_1 \wedge G_2$, $F_1 \vee F_2 \equiv_\alpha G_1 \wedge G_2$, $F_1 \to F_2 \equiv_\alpha G_1 \wedge G_2$ si et seulement si $F_1 \equiv_\alpha G_1$ et $F_2 \equiv_\alpha G_2$
4. $\forall x.F \equiv_\alpha \forall z.F[z/x]$ et $\exists x.F \equiv_\alpha \exists z.F[z/x]$ pour tout $z \notin \mathcal{V}f(F)$, c'est-à-dire, pour toute variable z sauf un nombre fini.

La relation $\equiv_\alpha$ est une relation d'équivalence : elle est réflexive, symétrique et transitive. Nous considèrerons désormais la formule ≪à α-équivalence près≫. Techniquement, cela signifie que l'on quotiente l'ensemble des formules par la relation d'équivalence $\equiv_\alpha$ et que l'on assimile une formule à sa classe d'équivalence. Nous écrirons simplment $F \equiv G$ pour signifier l'égalité de F et G *modulo α-équivalence.*

1.2 Sémantique

Nous avons donc défini la syntaxe du langage du calcul des prédicats du premier ordre. Nous savons maintenant reconnaître les formules *bien formées* et les distinguer des assemblages de symboles qui ne sont pas des formules. L'étape suivante du travail de construction de cette logique est de définir le *sens* qu'il faut donner aux termes et aux formules, la manière de les *interpréter.* En bref, il faut définir la *sémantique* du langage. Et comme pour la syntaxe, nous voulons une définition formelle de la sémantique, et comme pour la syntaxe, nous ferons appel pour cette définition à quelques notions de mathématique, en particulier, de théorie des ensembles.

Cette sémantique du calcul des prédicats est dite ≪*de Tarski*≫. On peut y distinguer deux niveaux

– un niveau *contingent* qui dépend des individus dont on veut parler ainsi que des propriétés de base qu'on leur accorde. Ce niveau correspond syntaxiquement aux termes (symboles de constantes, de fonctions) et aux symboles de prédicats ;
– un niveau *immuable* des relations logiques proprement dites et qui correspond syntaxiquement aux connecteurs propositionnels et aux quantificateurs.

1.2.1 Structures

La sémantique que l'on donne au calcul des prédicats s'inspire de la notion de *structure* comme on la connaît en mathématique, et plus particulièrement en algèbre, par exemple : la structure de *groupe.* La structure de groupe peut être abstraitement vue comme la donnée d'un ensemble E non vide muni d'une fonction binaire f associative (dite ≪loi de composition interne≫), d'un élément distingué e (appelé ≪élément neutre≫) et tel que chaque élément possède un inverse pour la loi de composition interne. Les *axiomes* définissant la structure de groupes sont :

1. Pour tout x, y, z, $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$.
2. pour tout x, $f(x, e) = f(e, x) = x$.
3. Pour tout x, il existe y tel que $f(x, y) = f(y, x) = e$

Il existe plusieurs structures mathématiques qui satisfont les demandes exprimées par ces axiomes :

1. Le groupe des entiers relatifs.

– on prend comme ensemble de base l'ensemble des nombre entiers positifs et négatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
– on prend comme fonction l'addition,
  – elle est associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$;
  – 0 est neutre pour l'addition : $x + 0 = 0 + x = x$;
  – et chaque élément admet un inverse : $n + (-n) = (-n) + n = 0$

2. Le groupe des symétries d'un carré dans le plan.
   – on prend comme ensemble de base l'ensemble des 8 symétries suivante : l'identité (notons la *id*), les 3 rotations de 90, 180 et 260 degrés vers la droite (notons les r_1, r_2 et r_3 et les 4 symétries miroirs selon les axes horizontaux et verticaux du carré et selon ses deux diagonales (notons les m_1, m_2, m_3 et m_4).
   – on prend comme loi de composition la composition fonctionnelle notée $\circ$: elle est associative, *id* est son élément neutre et toute symétrie possède un inverse.
   (*cf* `http://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_(mathématiques)`).

Ainsi, un même ensemble de formules (les axiomes du groupe) peut être interprété dans deux mondes différents :
– le monde arithmétique infini des nombres relatifs ;
– le monde géométrique fini des symétries du carré dans un plan.

Voici un autre exemple où la notion d'interprétation s'étend également aux symboles de prédicat. Si l'on vous soumet les deux formules suivantes :
(a) $\forall x.(0 < x + 1)$
(b) $\forall x.(x + 1 < 0)$
Vous affirmerez sans doute que (a) est vraie alors que (b) est fausse ; cela car en lisant ces formules, vous associez *illico* une interprétation aux symboles utilisés.

Si maintenant, on vous soumet la chose suivante :

> On se donne un symbole de prédication binaire R, un symbole de fonction f et un symbole de constante c ; soit les deux formules
> – $\forall x.R(c, f(x))$
> – $\forall x.R(f(x), c)$

Vous n'êtes plus en mesure de dire quoi que ce soit de ces deux formules, sauf à poser l'interprétation que vous donnez aux symboles.

En voici une première que nous appellerons $\mathcal{M}_1$:
– l'ensemble considéré est celui des entiers naturels $\mathbb{N}$
– la relation binaire R est définie par l'ensemble de couples $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}$
– la fonction f est définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $(x \mapsto x + 1)$, c'est-à-dire, la fonction qui à tout x associe son successeur $x + 1$;
– la constante c désigne 0

Alors, rappelant le savoir arithmétique que nous avons acquis, nous pouvons affirmer que
– $\forall x.R(c, f(x))$ est vraie et que
– $\forall x.R(f(x), 0)$ est fausse.

Si nous changeons maintenant l'ensemble considéré pour prendre $\mathbb{Z}$ à la place de $\mathbb{N}$ et nous adaptons l'interprétation des symboles (on remplace simplement $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$ dans les définitions), nous avons une nouvelle interprétation telle que
– $\forall x.R(c, f(x))$ est cette fois fausse.

Dire l'interprétation utilisée pour décider de la vérité d'une formule est ce que nous faisons lorsque nous disons quelque chose comme : $\ll\forall x.(0 < x + 1)$ est vraie dans $\mathbb{N}$, mais fausse dans $\mathbb{Z}\gg$.

Les formules que nous avons considérées ci-dessus sont des formules closes, et leur validité n'a pas dépendu de la valeur de leurs variables. Considérons à présent la formule du langage de l'arithmétique suivante : $\exists x.x < y$. Il est clair que cette formule n'est ni vraie ni fausse tant que nous n'avons pas donné de valeur à

y ; c'est-à-dire, tant que nous n'avons pas fixé une interprétation pour les variables libres [2]. Ainsi, en prenant 0 pour valeur de y on obtient une formule fausse et en prenant 42 elle devient vraie.

Langage, signature et structure Une structure est destinée non pas à interpréter l'ensemble de toutes les formules du langage générique du calcul des prédicats tel que l'avons défini au paragraphe précédent, mais uniquement un fragment déterminé par un ensemble particulier de constantes, de symboles de fonctions et de prédicats. Ainsi, le langage utile pour établir la théorie des groupes se contente de 3 symboles : le symbole de l'égalité, un symbole pour la loi de composition interne et un symbole pour l'élément neutre ; les exemples pris dans l'arithmétique utilisent le symbole de constante 0 [3], le symbole de fonction $\_ + 1$ et le symbole de prédicat binaire $<$.

On appelle *signature* un ensemble particulier de symboles de constantes, de fonctions et de prédicats. Formellement, une signature $\mathcal{S}$ est la donnée d'un sous ensemble $\mathcal{P}_S$ de $\mathcal{P}$, d'un sous ensemble $\mathcal{F}_S$ de $\mathcal{F}$ et d'un sous ensemble $\mathcal{C}_S$ de $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{S} = \langle \mathcal{P}_S, \mathcal{F}_S, \mathcal{C}_S \rangle$. Une signature $\mathcal{S}$ définit un sous-ensemble de toutes les formules possibles, que l'on note $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. On dit aussi qu'une signature définit un *langage* : celui des formules utilisant les symboles de la signature, les symboles de variable et, bien entendu, les symboles logiques en respectant par grammaire des formules du calcul des prédicats du premier ordre.

Étant donné une signature $\mathcal{S} = \langle \mathcal{P}_S, \mathcal{F}_S, \mathcal{C}_S \rangle$, on appelle $\mathcal{S}$-*structure* la donnée d'un *ensemble de base* non vide M (c'est l'ensemble des ≪individus≫), ainsi que :

- pour chaque symbole de constante $c \in \mathcal{C}_S$, un élément de M ;
- pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_S$ d'arité n, une fonction de M^n dans M que l'on suppose partout définie sur M^n ;
- pour chaque symbole de prédicat de $P \in \mathcal{P}_S$ d'arité n, un sous ensemble de M^n.

Si $\mathcal{S}$ est la signature donnée par $\langle \mathcal{P}_S, \mathcal{F}_S, \mathcal{C}_S \rangle$, une $\mathcal{S}$-structure est un *modèle* qui donne une *interprétation* des symboles de la signature $\mathcal{S}$. Formellement, un modèle $\mathcal{M}$ est un quadruplet de la forme $\langle M, \mathcal{I}_P, \mathcal{I}_F, \mathcal{I}_C \rangle$ où $\mathcal{I}_P$ est une fonction de $\mathcal{P}_S$ dans l'union sur n des enesembles de parties de M^n (ie. $\bigcup_n \mathfrak{P}(M^n)$), $\mathcal{I}_F$ est une fonction de $\mathcal{F}_S$ dans l'union sur n des ensembles de fonctions de M^n dans M et $\mathcal{I}_c$ une fonction de $\mathcal{C}_S$ dans M. Pour un modèle $\mathcal{M}$, on notera $\mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}(P)$, $\mathcal{I}_F^{\mathcal{M}}(f)$ et $\mathcal{I}_C^{\mathcal{M}}(c)$ les interprétations respectives du prédicat P, de la fonction f et de la constante c données par le modèle $\mathcal{M}$.

Une $\mathcal{S}$-structure, c'est-à-dire un modèle, doit être vue comme une structure ensembliste : un prédicat est interprété par un ensemble ; une fonction est interprétée par son *graphe*, c'est-à-dire, pour une fonction d'arité n, l'ensemble des $n+1$-uplets $(e_1, \ldots, e_n, e)$ tels que e est l'image par la fonction des arguments $(e_1, \ldots, e_n)$.

On définit la relation d'inclusion entre signatures et entre structures de la façon suivante :

- On dit que la signature $\mathcal{S} = \langle \mathcal{P}_S, \mathcal{F}_S, \mathcal{C}_S \rangle$ et incluse dans la signature $\mathcal{S}' = \langle \mathcal{P}'_S, \mathcal{F}'_S, \mathcal{C}'_S \rangle$ et on note $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ lorsque $\mathcal{P}_S \subseteq \mathcal{P}'_S$, $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}'_S$ et $\mathcal{C}_S \subseteq \mathcal{C}'_S$.
- On dit qu'une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I}_P, \mathcal{I}_F, \mathcal{I}_C \rangle$ est incluse dans une $\mathcal{S}'$-structure $\mathcal{M}' = \langle M', \mathcal{I}'_P, \mathcal{I}'_F, \mathcal{I}'_C \rangle$ et on note $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ lorsque $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, $M \subseteq M'$ et pour tout $P \in \mathcal{P}_S$, $\mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}(P) = \mathcal{I}_P^{\mathcal{M}'}(P)$, pour tout $f \in \mathcal{F}_S$, $\mathcal{I}_F^{\mathcal{M}}(f) = \mathcal{I}_F^{\mathcal{M}'}(f)$ et pour tout $c \in \mathcal{C}_S$, $\mathcal{I}_C^{\mathcal{M}}(x) = \mathcal{I}_C^{\mathcal{M}'}(c)$.

Lorsque $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ on dit que $\mathcal{S}'$ *étend* $\mathcal{S}$. Lorsque $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ on dit également que $\mathcal{M}'$ *étend* $\mathcal{M}$ ou que $\mathcal{M}$ est le *réduit* de $\mathcal{M}'$ (à la signature $\mathcal{S}$).

1.2.2 Interprétation

Étant donnée une signature $\mathcal{S}$ et une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$, on étend les fonctions d'interprétation des symboles de la signature aux termes et aux formules. Les termes et les formules font usage des symboles de la signature, mais en général aussi de symboles de variables. Pour interpréter les termes et les formules, il faut

2. En fait, dans une formule, une variable libre doit être regardée comme le sont les *paramètres* dans les formules mathématiques

3. En toute rigueur, on peut se passer de l'écriture 42 en la remplaçant par $0 \underbrace{+1 \ldots + 1}_{42 fois}$

donc également se munir d'une fonction d'interprétation des variables. Nous retrouvons là en fait la notion d'*environnement* connue des langages de programmation : une variable n'a de valeur que si on lui en a donné une. Nous noterons ρ les environnements qui sont des fonctions partielles de $\mathcal{X}$ dans M (l'ensemble de base de $\mathcal{M}$). Si ρ est un environnement, si $x \in \mathcal{X}$ et si $m \in M$, alors $\rho[x \mapsto m]$ est l'environnement définit par

$$\begin{array}{rcl} \rho[x \mapsto m](x) & = & m \\ \rho[x \mapsto m](y) & = & \rho(y) \text{ lorsque } y \not\equiv x \end{array}$$

On note $\rho[x_1 \mapsto m_1; \ldots ; x_n \mapsto m_n]$ comme abréviation de $\rho[x_1 \mapsto m_1] \ldots [x_n \mapsto m_n]$.

De façon plus générale, si ρ_1 et ρ_2 sont deux environnements, on note $\rho_1[\rho_2]$ l'environnement défini par

$$\begin{array}{rcll} \rho_1[\rho_2](x) & = & \rho_2(x) & \text{si } x \in dom(\rho_2) \\ \rho_1[\rho_2](x) & = & \rho_1(x) & \text{sinon} \end{array}$$

La fonction ρ peut n'être définie pour aucune variable, on parle alors de l'environnement *vide*. Un environnement est défini sur l'ensemble des symboles de variables $\mathcal{X}$ à valeur dans un ensemble M dépendant du modèle $\mathcal{M}$ considéré. On parlera alors plus précisément de $\mathcal{M}$-environnements.

<u>Fait</u> (1)

Pour tout environnement ρ, pour toutes variable x et y telles que $x \not\equiv y$, et toutes valeurs m, m',

$$\rho[x \mapsto m; y \mapsto m'] = \rho[y \mapsto m'; x \mapsto m]$$

Preuve

1. $\rho[x \mapsto m; y \mapsto m'](y) = m'$ et $\rho[y \mapsto m'; x \mapsto m](y) = \rho[y \mapsto m'](y)$, puisque $y \not\equiv x$ et $\rho[y \mapsto m'](y) = m'$
2. $\rho[x \mapsto m; y \mapsto m'](x) = \rho[x \mapsto m](x) = m$ et $\rho[y \mapsto m'; x \mapsto m](x) = m$.
3. si $z \not\equiv x$ et $z \not\equiv y$ alors $\rho[x \mapsto m; y \mapsto m'](z) = \rho[x \mapsto m](z) = \rho(z)$ et $\rho[y \mapsto m'; x \mapsto m](z) = \rho[y \mapsto m'](z) = \rho(z)$.

CQFD

Termes Soit donc un modèle $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_F^{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_C^{\mathcal{M}} \rangle$. On définit donc $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho$ l'interprétation d'un terme t dans $\mathcal{M}$. C'est un élément de M, puisque chaque terme désigne un individu.

1. Si $t \equiv x$ avec $x \in \mathcal{X}$ alors $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(x)_\rho = \rho(x)$
2. Si $t \equiv c$ avec $c \in \mathcal{C}$ alors $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(c)_\rho = \mathcal{I}_C^{\mathcal{M}}(c)$
3. Si $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$ avec $f \in \mathcal{F}$, $t_1 \in \mathcal{T}$,…et $t_n \in \mathcal{T}$ alors $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho = \mathcal{I}_F^{\mathcal{M}}(f)(\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_1)_\rho, \ldots, \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_n)_\rho)$.

Notez que, pour un terme t, son interprétation n'est correctement définie que si l'environnement ρ est défini au moins pour chaque variable ayant une occurrence dans t, c'est-à-dire $\mathcal{V}(t) \subseteq dom(\rho)$. Cette propriété devra être transposée au cas des formules pour lesquelles il faudra supposer que $dom(\rho)$ contient toujours l'ensemble des variables libres de la formule, c'est-à-dire, pour une formule F, $\mathcal{V}f(F) \subseteq dom(\rho)$.

Formules Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_F^{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_C^{\mathcal{M}} \rangle$. On définit $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho$ l'interprétation de la formule F étant donnés le modèle $\mathcal{M}$ et un $\mathcal{M}$-environnement ρ tel que $\mathcal{V}f(F) \subseteq dom(\rho)$. C'est soit la valeur «vrai», que nous noterons $\top$, soit la valeur «faux», que nous noterons $\bot$. Naturellement, $\top$ et $\bot$ sont distincts.

1. Si $F \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$ avec $t_1 \in \mathcal{T}$,…,$t_n \in \mathcal{T}$ et $P \in \mathcal{P}$ d'arité n alors

$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(P(t_1, \ldots, t_n))_\rho = \left\{ \begin{array}{l} \top \text{ si } (\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_1)_\rho, \ldots, \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_n)_\rho) \in \mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}(P) \\ \bot \text{ sinon} \end{array} \right.$$

2. Si $F \equiv \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}$ alors
$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg G)_\rho = \begin{cases} \top \text{ si } \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_\rho = \bot \\ \bot \text{ sinon} \end{cases}$$

3. Si $F \equiv G_1 \wedge G_2$ avec $G_1 \in \mathcal{F}$ et $G_2 \in F$ alors
$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_1 \wedge G_2)_\rho = \begin{cases} \top \text{ si } \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_1)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_2)_\rho = \top \\ \bot \text{ sinon} \end{cases}$$

4. Si $F \equiv G_1 \vee G_2$ avec $G_1 \in \mathcal{F}$ et $G_2 \in F$ alors
$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_1 \vee G_2)_\rho = \begin{cases} \bot \text{ si } \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_1)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_2)_\rho = \bot \\ \top \text{ sinon} \end{cases}$$

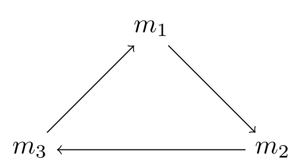
5. Si $F \equiv G_1 \rightarrow G_2$ avec $G_1 \in \mathcal{F}$ et $G_2 \in F$ alors
$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_1 \rightarrow G_2)_\rho = \begin{cases} \top \text{ si } \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_1)_\rho = \bot \\ \top \text{ si } \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_1)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G_2)_\rho = \top \\ \bot \text{ sinon} \end{cases}$$

6. Si $F \equiv \forall x.G$ avec $x \in \mathcal{X}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors
$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\forall x.G)_\rho = \begin{cases} \top \text{ si, pour chaque } m \in M, \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_{\rho[x \mapsto m]} = \top \\ \bot \text{ sinon} \end{cases}$$

7. Si $F \equiv \exists x.G$ avec $x \in \mathcal{X}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors
$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\exists x.G)_\rho = \begin{cases} \top \text{ si, pour au moins un } m \in M, \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_{\rho[x \mapsto m]} = \top \\ \bot \text{ sinon} \end{cases}$$

Commentaires sur la définition de la fonction d'interprétation. La fonction $\mathcal{I}$ est une *fonction de vérité* qui assigne à chaque formule une valeur de vérité ($\top$ ou $\bot$). Elle n'invente rien, mais donne une assise formelle au sens logique des formules.

– la valeur de $\mathcal{I}$ pour les formules atomiques explique simplement que l'on interprète un prédicat par un ensemble de n-uplets. Pour définir l'interprétation d'un symbole de prédicat, on pourra utiliser tous les moyens que nous offre la théorie des ensembles. Par exemple, on peut donner en arithmétique, où l'ensemble de base est $\mathbb{N}$, l'interprétation du prédicat binaire $\leq$ à l'aide du *schéma de compréhension* : $\mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}(\leq) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \textit{il existe } k \in \mathbb{N} \textit{tel que } y = x + k\}$. Ou encore, sur les petits exemples que l'on pourra donner en exercice, si l'ensemble de base est réduit, par exemple $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, on donnera *en extension* l'interprétation d'un prédicat $\mathcal{I}_P(R) = \{(m_1, m_2), (m_2, m_3), (m_3, m_1)\}$. Ce que l'on pourra dessiner :



– la valeur de $\mathcal{I}$ pour les formules propositionnelles (connecteurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$ et $\rightarrow$) reprend, sous formes d'équations conditionnelles, les cas de vérités des propositions tels qu'on peut les exprimer dans les *tables de vérités* des fonctions booléennes : on écrit ici simplement $\mathcal{I}(\_)$ pour $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\_)_\rho$

$\mathcal{I}(G)$	$\mathcal{I}(\neg G)$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

$\mathcal{I}(G_1)$	$\mathcal{I}(G_2)$	$\mathcal{I}(G_1 \wedge G_2)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\mathcal{I}(G_1)$	$\mathcal{I}(G_2)$	$\mathcal{I}(G_1 \vee G_2)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\mathcal{I}(G_1)$	$\mathcal{I}(G_2)$	$\mathcal{I}(G_1 \rightarrow G_2)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

– la valeur de $\mathcal{I}$ pour les formules quantifiées expriment symboliquement les locutions équivalentes de la langue naturelle rapportées à l'ensemble de base des modèles. C'est à dessein que nous avons employé dans nos définitions ≪*pour chaque*≫ et ≪*pour au moins un*≫ et non directement ≪pour tout≫ et ≪il existe≫, afin de bien marquer *l'extension* que chacun des deux quantificateurs : la totalité de l'ensemble de base pour l'universel et un sous-ensemble non vide pour l'existentiel.

Signature et environnements La fonction d'interprétation pour les formules du calcul des prédicats du premier ordre dépend donc d'une signature et d'un environnement.

La dépendence vis-à-vis des fonctions d'interprétation des signatures est un paramètre strict de la fonction d'interprétation des formules : l'interprétation de tous les symboles de prédicats, de fonctions et de constante ayant une occurrence dans la formule à interprétée doit être donnée. Mais cette exigence ne va que dans un seul sens : une formule peut ne pas utiliser tous les symboles d'une signature, elle n'en reste pas moins interprétable.

Pour ce qui est des environnements, on peut préciser la dépendence : l'interprétation d'une formule ne dépend que de l'interprétation de ses variables libres, c'est-à-dire, que de la valeur que donne l'environnement aux variables libres. Nous donnerons une expression formelle de ce fait lorsque nous aurons défini la notion de validité d'une formule sur la base de la fonction d'interprétation (*cf.* lemme 5).

Une formule close n'ayant aucune variable libre, son interprétation ne dépend d'aucun environnement en particulier.

Remarque : par la suite, on s'autorisera à ne pas préciser la signature et le domaine des environnements : on dira simplement ≪*une formule F, un modèle $\mathcal{M}$ et un environnement ρ*≫ comme abréviation de *soit une signature $\mathcal{S}$, une formule $F \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$, une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ et un $\mathcal{M}$-environnement ρ*≫.

1.2.3 Vérité, validité, satisfaisabilité

La notion d'interprétation étant formellement posée, revenons sur la notion de vérité d'une formule. L'interprétation des formules du calcul des prédicats vise bien la notion de vérité puisque la fonction d'interprétation donne aux formules soit la valeur ≪vrai≫ symbolisée par $\top$, soit la valeur ≪faux≫ symbolisée par $\bot$. Cette valeur de vérité est déterminée par une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ que nous avons également appelé *modèle*. En général, une formule n'est pas vraie ou fausse, mais elle est vraie ou valide dans un modèle. On dit en logique que c'est le modèle qui satisfait la formule. C'est l'objet de la définition suivante :

Définitions (3)

Soit une formule F, un modèle $\mathcal{M}$ et un environnement ρ.

1. On dit que $\mathcal{M}$ *satisfait* F et on note $\mathcal{M}, \rho \models F$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \top$.

On dit de façon équivalente que $\mathcal{M}$ *est un modèle de* F.

On dit enfin que F est *satisfaisable* lorsqu'il existe un modèle qui la satisfait.

2. On note $\mathcal{M}, \rho \not\models F$ lorsque $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \perp$ et on dit que $\mathcal{M}$ *ne satisfait pas* F ou que $\mathcal{M}$ *n'est pas un modèle de* F.
3. On étend ces notations aux ensembles de formules Γ. On note $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ lorsque $\mathcal{M}, \rho \models F_i$ pour tout $F_i \in \Gamma$ et $\mathcal{M}, \rho \not\models \Gamma$ lorsqu'il existe $F_i \in \Gamma$ telle que $\mathcal{M}, \rho \not\models F_i$.

Si F est une formule close, comme sa validité ne dépend d'aucun environnement en particulier, on note simplement : $\mathcal{M} \models F$ ou $\mathcal{M} \not\models F$.

Dans certains ouvrages, la relation $\models$ est directement définie inductivement pour donner la sémantique des formules. Les faits ci-dessous donnent cette présentation de la sémantique où l'on définit en fait conjointement $\models$ et $\not\models$. Ici, on peut les déduire de la fonction d'interprétation.

<u>FAITS</u> (2)

Soit F, F_1, F_2 des formules, $\mathcal{M}$ un modèle et ρ un environnement.

1. $\mathcal{M}, \rho \models \neg F$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho \not\models F$.
2. $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \vee F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho \models F_1$ ou $\mathcal{M}, \rho \models F_2$.
3. $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \wedge F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho \models F_1$ et $\mathcal{M}, \rho \models F_2$.
4. $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \to F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho \not\models F_1$ ou $\mathcal{M}, \rho \models F_2$.
5. $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.F$ si et seulement si pour tout $m \in M$, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F$.
6. $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.F$ si et seulement si il existe $m \in M$, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F$.

PREUVE:

1. $\mathcal{M}, \rho \models \neg F$ si et seulement si, par définition, $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg F)_\rho = \top$;
   $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg F)_\rho = \top$ si et seulement si, par définition, $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \perp$;
   $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg F)_\rho = \top$ si et seulement si, par définition, $\mathcal{M}, \rho \not\models F$.
2. en exercice
3. le cas de la disjonction demande un peu plus de travail puisque la définition de $\mathcal{I}$ ne donne explicitement que les conditions de la valeur $\perp$. On obtient la condition de la valeur $\top$ en niant la double égalité $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_1)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_2)_\rho = \perp$. La négation de cette double égalité dit qu'au moins l'une des valeurs de $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_1)_\rho$ ou de $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_2)_\rho$ ne doit pas être égale à $\perp$[4] ; c'est-à-dire qu'au moins l'une des valeurs de $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_1)_\rho$ ou de $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_2)_\rho$ doit être égale à $\top$; en d'autres termes, $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_1)_\rho = \top$ ou $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_2)_\rho = \top$.
   Ainsi : $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_1 \vee F_2)_\rho = \top$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_1)_\rho = \top$ ou $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_2)_\rho = \top$;
   c'est-à-dire, $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \vee F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho \models F_1$ ou $\mathcal{M}, \rho \models F_2$.
4. pour le cas de la flèche, on commence par montrer que $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F_1 \to F_2)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg F_1 \vee F_2)_\rho$. On peut, pour cela utiliser les tables de vérité, en notant simplement $\mathcal{I}(\_)$ pour $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\_)_\rho$:

$\mathcal{I}(F_1)$	$\mathcal{I}(F_2)$	$\mathcal{I}(\neg F_1)$	$\mathcal{I}(F_1 \to F_2)$	$=$	$\mathcal{I}(\neg F_1 \vee F_2)$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$=$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$=$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$=$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$=$	$\top$

   On a donc que $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \to F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho \models \neg F_1 \vee F_2$;
   c'est-à-dire, d'après le cas précédent : $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \to F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho \models \neg F_1$ ou $\mathcal{M}, \rho \models F_2$;
   c'est-à-dire, d'après le cas de la négation : $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \to F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho \not\models F_1$ ou $\mathcal{M}, \rho \models F_2$.
5. le cas du quantificateur universel est immédiat par définition, en disant ≪pour tout≫ à la place de ≪pour chaque≫.

4. Ce qui se cache dernière ce raisonnement est la loi de de Morgan : ≪non (A et B) est équivalent à (non A) ou (non B)≫.

6. le cas du quantificateur existentiel est immédiat par définition, en disant «il existe» à la place de «pour au moins un».

Pour montrer les propriétés de la relation $\models$, on se passera désormais de la fonction d'interprétation, lui préférant les divers cas du fait 2, sauf lorsqu'il faudra traiter des formules atomiques.

<u>Définition</u> (4)

> Une formule close F est dite *universellement valide* lorsque pour tout modèle $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models F$.

Les formules universellement valides sont les vérités purement logiques qui ne dépendent en fait que de l'interprétation des symboles logiques (connecteurs et quantificateurs). Si une formule universellement valide F appartient au fragment propositionnel du calcul des prédicats on l'appelle une *tautologie*.

Une formule close qui n'est satisfaite par aucun modèle est une *antilogie*.

On peut dire d'une formule non close F qu'elle est universellement valide lorsque pour tout modèle $\mathcal{M}$ et pour tout environnement ρ, on a $\mathcal{M}, \rho \models F$. Cela revient en fait à dire que la clôture universelle de F est universellement valide.

Le fait suivant nous dit que une formule F est satisfaisable si et seulement si sa négation $\neg F$ ne l'est pas, formellement :

<u>Faits</u> (3)

Soit une formule F, un modèle $\mathcal{M}$ et un environnement ρ, on a que

$$\mathcal{M}, \rho \models F \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho \not\models \neg F.$$

Preuve: en exercice

<u>Lemme :</u> (4)

> Une formule close F est satisfaisable si et seulement si sa négation $\neg F$ n'est pas universellement valide.

Preuve: Si F est satisfaisable, il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models F$. Or, par le fait 3, $\mathcal{M} \models F$ si et seulement si $\mathcal{M} \not\models \neg F$ et puisqu'il existe un modèle qui ne la satisfait pas, $\neg F$ n'est pas universellement valide.

CQFD

Exo : montrer la validité des formules données en annexe.

Faits et lemmes Quelques résultats portant sur les propriétés des environnements et de la substitution vis-à-vis de la relation de statisfaction.

<u>Lemme</u> (5)

> si x qui n'a pas d'occurrence libre dans F, pour tout $m \in M$ (ensemble de base de $\mathcal{M}$), on a que
>
> $$\mathcal{M}, \rho \models F \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F$$

Preuve: par induction sur la forme de F

1. si $F \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$: il est facile de vérifier, par induction sur les termes que pour tout t, si x n'a pas d'occurrence dans t alors

$$\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho = \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_{\rho[x \mapsto m]}$$

On en déduit que

$$(\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_1)_\rho, \ldots, \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_n)_\rho) = (\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_1)_{\rho[x \mapsto m]}, \ldots, \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_n)_{\rho[x \mapsto m]})$$

D'où $\mathcal{M}, \rho \models P(t_1, \ldots, t_n)$ si et seulement (par définition) $(\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_1)_\rho, \ldots, \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_n)_\rho) \in \mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}(P)$, si et seulement si (par égalité) $(\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_1)_{\rho[x\mapsto m]}, \ldots, \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_n)_{\rho[x\mapsto m]}) \in \mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}(P)$, si et seulement si (par définition) $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models P(t_1, \ldots, t_n)$.

2. si $F \equiv \neg F_1$: par hypothèse d'induction, $\mathcal{M}, \rho \models F_1$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F_1$ avec x non libre dans F_1 ; par contraposition $\mathcal{M}, \rho \not\models F_1$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \not\models F_1$; par le fait 2.1 $\mathcal{M}, \rho \models \neg F_1$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models \neg F_1$ et x est non libre dans $\neg F_1$.
3. si $F \equiv F_1 \vee F_2$: on a deux hypothèses d'induction :
   - $\mathcal{M}, \rho \models F_1$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F_1$ avec x non libre dans F_1 et
   - $\mathcal{M}, \rho \models F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F_2$ avec x non libre dans F_2.

   Par le fait 2.2, $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \vee F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho \models F_1$ ou $\mathcal{M}, \rho \models F_2$. En utilisant les équivalences des hypothèses d'induction pour remplacer $\mathcal{M}, \rho \models F_1$ et $\mathcal{M}, \rho \models F_2$ avec x libre ni dans F_1 ni dans F_2, on obtient $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \vee F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F_1$ ou $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F_2$; c'est-à-dire, en utilisant à nouveau le fait 2, $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \vee F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F_1 \vee F_2$, avec x libre ni dans F_1, ni dans F_2 ; c'est-à-dire non libre dans $F_1 \vee F_2$.
4. si $F \equiv F_1 \wedge F_2$: ce cas est analogue au cas précédent.
5. si $F \equiv F_1 \to F_2$: on procède ici également de façon analogue au cas de la disjonction en passant par la contraposée pour F_1 (*cf.* fait 2.4).
6. si $F \equiv \forall y.F_1$: on a, par hypothèse d'induction que si x est non libre dans F_1 alors <u>pour tout ρ'</u>, $\mathcal{M}, \rho' \models F_1$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho'[x \mapsto m] \models F_1$.
   Pour chaque $m' \in M$ (ensemble de base de $\mathcal{M}$), en instanciant le ρ' de l'hypothèse d'induction par $\rho[y \mapsto m']$, on a $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m'] \models F_1$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m'; x \mapsto m] \models F_1$ avec x non libre dans F_1, donc $x \not\equiv y$. Comme $x \not\equiv y$, on a que $\rho[y \mapsto m'; x \mapsto m] = \rho[x \mapsto m; y \mapsto m']$. On en déduit que $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m'] \models F_1$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m; y \mapsto m'] \models F_1$; d'où, par le fait 2.5, $\mathcal{M}, \rho \models \forall y.F_1$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models \forall y.F_1$.
7. si $F \equiv \exists y.F_1$: analogue au cas de l'universelle en chageant le ≪Pour chaque $m' \in M$≫ par ≪Pour au moins un $m' \in M$≫.

CQFD

Ce résultat se généralise naturellement aux ensembles de formules Γ.

<u>Lemme</u> (6)

si y n'a pas d'occurrence libre dans F alors

$$\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models F[y/x]$$

Preuve: Si $y \equiv x$, il n'y a rien à démonter. Sinon, par le lemme 5, puisque y n'est pas libre dans F, on a que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m; y \mapsto m] \models F$; d'autre part, en remarquant que x n'a pas d'occurrence libre dans $F[y/x]$, on a que $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models F[y/x]$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m; x \mapsto m] \models F[y/x]$; comme $x \not\equiv y$, on a, par le fait 1 que $\rho[x \mapsto m; y \mapsto m] = \rho[y \mapsto m; x \mapsto m]$, d'où $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models F[y/x]$ si et seulement si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m; y \mapsto m] \models F[y/x]$. Ce qui nous donne le résultat pas transitivité de l'équivalence.

CQFD

<u>Lemme</u> (7)

$$\mathcal{M}, \rho \models F[t/x] \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho] \models F$$

Preuve: Par induction sur F

1. si $F = P(t_1, \ldots, t_n)$: vérifions que pour tout terme u, on a

$$\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(u[t/x])_\rho = \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(u)_{\rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho]}$$

   Par induction sur u :
   (a) si $u \equiv x$, $u[t/x] = t$. Il faut vérifier que $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho = \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(x)_{\rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho]}$. Ce qui immédiat par définition : $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(x)_{\rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho]} = \rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho](x) = \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho$.
   Si $u \equiv y \not\equiv x$ alors $u[t/x] = y$. Il faut vérifier que $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(y)_\rho = \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(y)_{\rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho]}$. Par définition, $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(y)_\rho = \rho(y)$ et $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(y)_{\rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho]} = \rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho](y) = \rho(y)$ car $y \not\equiv x$.
   (b) si $u \equiv c$, avec $c \in \mathcal{C}$ alors $u[t/x] = c$. Par définition, $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(c)_\rho = \mathcal{I}_C(c)$ et $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(y)_{\rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho]} = \mathcal{I}_C(c)$.
   (c) si $u = f(u_1, \ldots, u_n)$ alors $u[t/x] = f(u_1[t/x], \ldots, u_n[t/x])$ et le résultat est immédiat par hypothèse d'induction.

   Ceci étant établi, il faut montrer que

$$\mathcal{M}, \rho \models P(t_1, \ldots, t_n)[t/x] \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho] \models P(t_1, \ldots, t_n)$$

   C'est-à-dire, par définition que

$$(\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_1[t/x])_\rho, \ldots, \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_n[t/x)_\rho) \in \mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}(P)$$

$$\text{si et seulement si}$$

$$(\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_1)_{\rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho]}, \ldots, \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_1)_{\rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho]}) \in \mathcal{I}_P^{\mathcal{M}}(P)$$

   Ce qui est trivial car nous avons vérifié l'égalité $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_i[t/x])_\rho = \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t_i)_{\rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho]}$ pour tout t_i.
2. si $F \equiv \neg F_1$, si $F \equiv F_1 \vee F_2$, si $F \equiv F_1 \wedge F_2$ et si $F \equiv F_1 \to F_2$ on raisonne de manière analogue à celle utilisée pour les cas correspondant dans la preuve du lemme 5, en utilisant en plus la définition de la sustitution.
3. si $F \equiv \forall x.F_1$ alors x n'est pas libre dans F est on applique le lemme 5.
   Si $F \equiv \forall y.F_1$ avec $y \not\equiv x$ et on peut toujours choisir un y qui n'a pas d'occurrence dans t. On a alors que $F[t/x] = (\forall y.F_1)[t/x] = \forall y.F_1[t/x]$. Par hypothèse d'induction, pour tout ρ'

$$\mathcal{M}, \rho' \models F_1[t/x] \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho'[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_{\rho'}] \models F_1$$

   Par définition $\mathcal{M}, \rho \models \forall y.F_1[t/x]$ si et seulement si pour tout $m \in M$ (ensemble de base de $\mathcal{M}$) $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models F_1[t/x]$.
   En instanciant le ρ' de l'hypothèse d'induction par $\rho[y \mapsto m]$ on obtient que

$$\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models F_1[t/x] \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho[y \mapsto m; x \mapsto \mathcal{I}_T^{M}(t)_{\rho[y \mapsto m]}] \models F_1$$

   On remarque que puisque l'on a choisi y sans occurrence dans t, on a que $\mathcal{I}_T^{M}(t)_{\rho[y \mapsto m]} = \mathcal{I}_T^{M}(t)_\rho$; on en déduit que

$$\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models F_1[t/x] \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho[y \mapsto m; x \mapsto \mathcal{I}_T^{M}(t)_\rho] \models F_1$$

   Puisque $x \not\equiv y$, on a que $\rho[y \mapsto m; x \mapsto \mathcal{I}_T^{M}(t)_\rho] = \rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{M}(t)_\rho; y \mapsto m]$; on en déduit que

$$\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models F_1[t/x] \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{M}(t)_\rho; y \mapsto m] \models F_1$$

   pour tout $m \in M$.
   Et par définition, on obtient

$$\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models F_1[t/x] \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{M}(t)_\rho] \models \forall y.F_1$$

4. les cas $F \equiv \exists x.F_1$ et $F \equiv \exists y.F_1$ avec $x \not\equiv y$ se traitent de manière similaire.

CQFD

1.2.4 Équivalence logique

<u>Définition</u> (5)

> Deux formules F et G sont logiquement équivalentes lorsque pour tout modèle $\mathcal{M}$ et environnement ρ, on a que
> $$\mathcal{M}, \rho \models F \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho \models G$$
> On note alors $F \sim G$

En notant $F \leftrightarrow G$ comme abréviation de $(F \to G) \wedge (G \to F)$, on a

<u>Lemme</u> (8)

> $\models (F \leftrightarrow G)$ si et seulement si $F \sim G$.

<u>Attention :</u> la notation $\models (F \leftrightarrow G)$ contient implicitement une quantification sur tous les modèles et environnements. Le lemme ci-dessus ne signifie pas qu'il suffit de montrer que $F \leftrightarrow G$ est valide dans un modèle pour que l'on puisse conclure à l'équivalence logique de F et G. Autrement dit : il existe $\mathcal{M}_0$ et ρ_0 tels que $\mathcal{M}_0, \rho_0 \models (F \leftrightarrow G)$ n'entraîne pas que $F \sim G$.

<u>Fait</u> (9)

> Soit F une formule et x une variable n'ayant pas d'occurrence libre dans F. On a que $F \sim \forall x.F$ et $F \sim \exists x.F$.

Preuve: A FAIRE.

<u>Faits :</u> (10)

> Si $F \sim F'$ et si $G \sim G'$ alors :
> - $\neg F \sim \neg F'$
> - $F \wedge G \sim F' \wedge G'$
> - $F \vee G \sim F' \vee G'$
> - $F \to G \sim F' \to G'$
> - $\forall x.F \sim \forall x.F'$
> - $\exists x.F \sim \exists x.F'$

Preuve: A FAIRE

<u>Corollaire :</u> (11)

> Soit F une formule et F_0 une sous-formule de F, soit G telle que $G \sim F_0$, on a que si F' est la formule obtenue en remplaçant une occurrence quelconque de F_0 par G alors $F \sim F'$.

Preuve: par induction sur F avec le lemme ci-dessus. Au cas de base, lorsque F est atomique, elle n'a qu'une seule sous-formule : elle-même ; et une seule formule logiquement équivalente : elle-même.

1.2.5 Conséquence sémantique

La relation de *conséquence sémantique* relie un ensemble de formules Γ que l'on considère comme des hypothèses, ou les axiomes d'une théorie, à une formule F que l'on considère comme conséquence de ces hypothèses, ou théorème de cette théorie. La notion de satisfaisabilité permet d'en donner une définition précise. On utilise, par abus, le même symbole pour la conséquence sémantique et la satisfaisabilité.

<u>Définitions</u> (6)

Soit Γ un ensemble de formules et F une formule on dit que F est une *conséquence* de Γ et on note $\Gamma \models F$ si et seulement si, pour tout $\mathcal{M}$ et tout ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, \rho \models F$.

Lorsque, pour un modèle $\mathcal{M}$ et un environnement ρ, on a que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$, mais que $\mathcal{M}, \rho \not\models F$, on note $\Gamma \not\models F$ et on dit que F n'est pas une conséquence de Γ.

En français : chaque fois que toutes les formules de Γ sont vraies dans $\mathcal{M}$, F est vraie aussi dans $\mathcal{M}$.

<u>REMARQUE :</u> (1)

Si pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout environnement ρ on a $\mathcal{M}, \rho \not\models \Gamma$, c'est qu'il n'existe aucun modèle $\mathcal{M}$ et aucun environnement ρ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$. Alors pour toute formule F, on a que $\Gamma \models F$. Qu'un ensemble de formules Γ ne soit satisfait par aucun modèle signifie qu'il est *incohérent* et d'un ensemble d'hypothèses incohérent, ou d'une théorie incohérente, on peut conclure n'importe quoi. On retrouve à ce niveau la propriété de l'implication : $F_1 \to F_2$ est vraie si F_1 est fausse.

Lemme de déduction Nous venons de le noter, la notion de conséquence sémantique est évidemment proche de celle d'implication désignée par le connecteur propositionnel $\to$. C'est tellement vrai que c'est un théorème de la logique : le *lemme de déduction* qui dit que

<u>LEMME</u> (12)

$\Gamma, F \models G$ si et seulement si $\Gamma \models F \to G$

PREUVE: on montre les deux sens de l'équivalence :
- si $\Gamma, F \models G$, on veut montrer que $\Gamma \models F \to G$; c'est-à-dire que pour tout $\mathcal{M}$ et tout ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, \rho \models F \to G$. Supposons donc (a) $\Gamma, F \models G$ et (b) $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ et raisonnons par cas selon que $\mathcal{M}, \rho \models F$ ou non :
  - si $\mathcal{M}, \rho \models F$, alors, par (b), $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma, F$ et, par (a) et la définition de la conséquence sémantique, $\mathcal{M}, \rho \models G$. D'où, en utilisant le fait 2.4, $\mathcal{M}, \rho \models F \to G$;
  - si $\mathcal{M}, \rho \not\models F$, alors, on a directement par le fait 2.4 que $\mathcal{M}, \rho \models F \to G$.
- si $\Gamma \models F \to G$, on veut montrer que $\Gamma, F, \rho \models G$, c'est-à-dire : si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma, F$ alors $\mathcal{M}, \rho \models G$. Supposons donc $\Gamma \models F \to G$, c'est-à-dire : (a) pour tout $\mathcal{M}$ et tout ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, \rho \models F \to G$, supposons, pour <u>un $\mathcal{M}$ et un ρ quelconque</u>, que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma, F$, c'est-à-dire que (b) $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ et (c) $\mathcal{M}\rho \models F$ et montrons que $\mathcal{M}, \rho \models G$.

  De (a) et (b), on tire que $\mathcal{M}, \rho \models F \to G$; de ceci, de (c) et du fait 2.4 on tire que nécessairement $\mathcal{M}, \rho \models G$ (sinon, on aurait $\mathcal{M}, \rho \not\models F \to G$).

Exo : formaliser cette preuve

Rapport d'étape

Voilà donc posé un premier jalon sur la question d'éclaircir la notion de vérité : la «vérité» que nous visons ne s'adresse pas à l'ensemble de toutes les expressions possibles, mais uniquement à celles du calcul des prédicats du premier ordre (chose bien définie) ; la «vérité» que nous visons ne s'entend pas de l'ensemble des mondes possibles, réels ou imaginaires, mais uniquement de ceux que nous pouvons décrire comme des $\mathcal{S}$-structures. Dans ce cadre, la vérité d'une formule est relative à l'existence d'un modèle, elle est définie par la relation de statisfaction entre modèles, environnements et formules qui a reçu un sens précis : celui de $\mathcal{M}, \rho \models F$.

Pour *démontrer* qu'une formule est une vérité logique universelle, c'est-à-dire, qu'elle est universellement valide, on montre qu'elle est vraie dans tout modèle. Si l'on s'intéresse à une théorie particulière, on montre qu'elle est satisfaisable dans le modèle de cette théorie. Si la théorie est définie par un ensemble d'axiomes, disons Θ, on montre que cette formule est conséquence sémantique de Θ ($\Theta \models F$).

La sémantique de Tarski nous donne un moyen formel de définir ce qu'est une formule vraie. Par exemple, la formule $F \vee \neg F$ est une tautologie car on peut montrer que

<u>Lemme</u> (13)

$$\models F \vee \neg F$$

Preuve: on raisonne par cas
- si $\models F$ alors, par le fait 2.2, $\models F \vee \neg F$;
- si $\not\models F$ alors par le fait 2.1, $\models \neg F$ et par le fait 2.2, $\models F \vee \neg F$.

CQFD

Dans la rédaction de cette preuve, on trouve deux éléments : des formules (avec l'affirmation de leur vérité/fausseté), des formes et régles de raisonnement. Ici, on a utilisé le raisonnement par cas («si $\models F \ldots$si $\not\models F \ldots$») mais également des équivalences du fait 2 que l'on peut voir comme des régles de raisonnement dans la mesure où elles indiquent comment déduire un nouveau fait de faits acquis ou supposés tels. Les régles de raisonnement servent à justifier le passage d'une formule à l'autre. Les formules et leur vérité sont des objets formels, mais la liaison entre elles, la justification de chacune, emprunte à la *langue naturelle* qui est loin d'être un objet formel. On aurait pu choisir une autre rédaction de cette preuve, en utilisant une autre langue, un style plus concis :

Either $\models F$ *or* $\not\models F$, *in both cases, using fact 2 we get* $\models F \vee \neg F$.

Enfin, on aurait également pu utiliser la méthode des tables de vérité qui n'est qu'une présentation graphique du raisonnement par cas et des équivalences qu'énonce le fait 2 pour le fragment propositionnel. Selon la forme et le style adopté, il n'est pas toujours évident de reconnaître une preuve. C'est un deuxième travail important des logiciens que d'avoir également formalisé la notion de preuve. C'est l'une de ces formalisations que nous allons maintenant étudier : la déduction naturelle.

1.3 Déduction naturelle

La déduction naturelle est, en quelque sorte une alternative à la définition sémantique des connecteurs propositionnels et des quantificateurs. On la définit ici, pour le même ensemble de formules, celles du calcul des prédicats du premiers ordre. Pour chaque connecteur et chaque quantificateur, la déduction naturelle définit un certain nombre de *règles*. Ces règles indiquent comment, dans une preuve, utiliser une formule d'une certaine forme ou comment déduire une formule d'une certaine forme. Par exemple, si l'on a la conjonction $F \wedge G$, on sait que l'on a F et que l'on a G ; pour démonter que $F \wedge G$, on peut démontrer F et également G.

Plus précisément, dans la présentation que nous donnons ici [5], les régles dirons comment déduire un *séquent*, d'autres séquents, voire d'aucun, dans un cas particulier. Un séquent est un couple formé d'un ensemble de formules Γ vues comme des hypothèses et d'une autre formule F vue comme la conséquence de ces hypothèses. On notera : $\Gamma \vdash F$. On note Γ, F l'ensemble obtenu en ajoutant la formule F à l'ensemble Γ et Γ, Γ' l'union des ensemble Γ et Γ'. On écrit les règles en utilisant une barre horizontale pour séparer les *prémisses* de la règle de sa *conclusion* :

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \ldots \Gamma \vdash F_n}{\Gamma \vdash F}$$

L'écriture ci-dessus signifie que la validité de chacune des prémisses $\Gamma \vdash F_1, \ldots$, et $\Gamma \vdash F_n$ entraîne la validité de la conclusion $\Gamma \vdash F$. La validité d'un séquent est analogue à celle de la conséquence logique : si toutes les formules de Γ sont vraie alors F doit être vraie, et si au moins l'une des formules de Γ est fausse, peu importe F, le séquent est considéré comme valide.

Pour chaque connecteur propositionnel et chaque quantificateur, la déduction naturelle donne deux types de régles :

5. Ce n'est pas la présentation originale de la déduction naturelle qui ne parlait que de déduction de formules.

– des régles d'*introduction* qui sont celles qui indiquent comment déduire une formule d'une certaine forme ;
– les régles d'*élimination* qui sont celles qui indiquent comment utiliser une formule d'une certaine forme.

Pour formuler les régles de la négation on utilise un symbole logique nouveau pour représenter la *contradiction*. C'est le symbole $\perp$ que l'on peut voir comme une *constante de formule* : la formule toujours fausse, qui n'est satisfaite par aucun modèle. Sémantiquement, on pose : que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout environnement ρ, $\mathcal{M}, \rho \not\models \perp$.

Enfin, trois règles font exception à la dualité introduction/élimination :
– une règle plus administrative que logique qui dit que une fois obtenu un résultat, on peut toujours ajouter des hypothèses ;
– une règle sans prémisse qui dit simplement que ≪sous hypothèse F, on a F≫ ;
– la règle qui représente le raisonnement par l'absurde : ≪si sous hypothèse $\neg F$ on obtient une contracdiction, alors on a F≫.

La règle du raisonnement par l'absurde est proche celle de l'introduction de la négation. Cependant, celle-là est indispensable si l'on veut que dans notre système de preuve $\neg\neg F$ et F soient équivalents. La logique qui n'admet pas cette équivalence est appelée *intuitionniste*, la nôtre sera *classique*.

Correction et complétude La déduction naturelle définit, comme la conséquence sémantique, une relation entre un ensemble de formules et une formule. Nous montrerons que ces deux relations sont, en fait, équivalentes. Le résultat de *correction* établit que tout séquent $\Gamma \vdash F$ prouvable en déduction naturelle est en fait une conséquence sémantique valide $\Gamma \models F$. Le résultat de *complètude* établit l'inverse : pour toute cons'équence valide $\Gamma \models F$ il existe une preuve du séquent $\Gamma \vdash F$.

1.3.1 Règles de la déduction naturelle

On fait figurer à droite de la barre horizontale séparant prémisses et conclusion, un nom symbolique pour chaque règle. Les règles sur les quantificateurs ont des conditions annexes, indiquées en italique, portant sur les restrictions à observer concernant l'usage des symboles de variables.

Affaiblissement	Axiome	Raisonnement par l'absurde
$\dfrac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, \Gamma' \vdash F}\,{\scriptstyle Aff}$	$\dfrac{}{\Gamma, F \vdash F}\,{\scriptstyle Ax}$	$\dfrac{\Gamma, \neg F \vdash \perp}{\Gamma \vdash F}\,{\scriptstyle Abs}$

Négation

Intro.	Élim.
$\dfrac{\Gamma, F \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg F}\,{\scriptstyle \neg i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg F \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \perp}\,{\scriptstyle \neg e}$

Conjonction

Intro.	Élim.	
$\dfrac{\Gamma \vdash F_1 \qquad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}\,{\scriptstyle \wedge i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_1}\,{\scriptstyle \wedge e1}$	$\dfrac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_2}\,{\scriptstyle \wedge e2}$

Disjonction

Intro.		Élim.
$\dfrac{\Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,{\scriptstyle \vee i1}$	$\dfrac{\Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,{\scriptstyle \vee i2}$	$\dfrac{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2 \qquad \Gamma, F_1 \vdash G \qquad \Gamma, F_2 \vdash G}{\Gamma \vdash G}\,{\scriptstyle \vee e}$

Implication	
Intro.	Élim
$\dfrac{\Gamma, F_1 \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \to F_2}{\scriptstyle \to i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash F_1 \to F_2 \qquad \Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_2}{\scriptstyle \to e}$

Universelle	
Intro.	Élim
$\dfrac{\Gamma \vdash F[y/x]}{\Gamma \vdash \forall x.F}{\scriptstyle \forall i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x.F}{\Gamma \vdash F[t/x]}{\scriptstyle \forall e}$
avec y sans occurrence libre dans Γ ni F	*pour tout terme t*

Existentielle	
Intro.	Élim
$\dfrac{\Gamma \vdash F[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x.F}{\scriptstyle \exists i}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x.F \qquad \Gamma, F[y/x] \vdash G}{\Gamma \vdash G}{\scriptstyle \exists e}$
pour n'importe quel terme t	*avec y sans occurrence libre dans Γ, ni F ni G*

Preuves en déduction naturelle Une preuve en déduction naturelle est, comme toute preuve, un enchaînement de régles de déductions menant au résultat recherché : un séquent. Comme les régles de la déduction naturelles peuvent avoir plusieurs prémisses, une preuve en déduction naturelle a une *structure d'arbre*. La preuve est achevée lorsque l'on a construit un arbre dont toutes les feuilles sont la règle axiome *Ax*. Lorsqu'un séquent $\Gamma \vdash F$ est la racine d'un arbre construit avec les régles de la déduction naturelle, dont toutes les feuilles sont des règles axiome, on dit que le séquent est *dérivable* ou *prouvable* – sous-entendu, *en déduction naturelle*. On notera simplement $\Gamma \vdash F$ pour dire que le séquent $\Gamma \vdash F$ est dérivable. Lorsque ce n'est pas le cas, nous noterons $\Gamma \not\vdash F$.

Voici l'exemple de la preuve de l'équivalence entre F et $\neg\neg F$. Cette équivalence est représentée par un séquent sans hyptohèse, puisque c'est une vérité purement logique : $\vdash (F \to \neg\neg F) \land (\neg\neg F \to F)$.

<u>Lemme</u> (14)

pour toute formule F, on a $\vdash (F \to \neg\neg F) \land (\neg\neg F \to F)$

Preuve: on a la dérivation suivante

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, \neg F \vdash F}{\scriptstyle Ax} \qquad \dfrac{}{F, \neg F \vdash \neg F}{\scriptstyle Ax}}{F, \neg F \vdash \bot}{\scriptstyle \neg e}}{F \vdash \neg\neg F}{\scriptstyle \neg i}}{\vdash F \to \neg\neg F}{\scriptstyle \to i} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg F, \neg F \vdash \neg\neg F}{\scriptstyle Ax} \qquad \dfrac{}{\neg\neg F, \neg F \vdash \neg F}{\scriptstyle Ax}}{\neg\neg F, \neg F \vdash \bot}{\scriptstyle \neg e}}{\neg\neg F \vdash F}{\scriptstyle Abs}}{\vdash \neg\neg F \to F}{\scriptstyle \to i}}{\vdash (F \to \neg\neg F) \land (\neg\neg F \to F)}{\scriptstyle \land i}$$

CQFD

<u>Corollaires</u> (15)

De cette dérivation, on tire que pour tout ensemble de formules Γ

1. $\Gamma \vdash F \to \neg\neg F$
2. $\Gamma \vdash \neg\neg F \to F$

Preuve: on utilise les règles $\wedge e1$ et $\wedge e2$ ainsi que la règle Aff.

CQFD

Voici deux autres exemples de dérivations :

Lemme : (16)

Pour tout formule F, $\vdash \forall x.\neg F \rightarrow \neg\exists x.F$

Preuve:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{\forall x.\neg F, \exists x.F \vdash \exists x.F}\,{\scriptstyle Ax}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{}{\forall x.\neg F, F[y/x] \vdash \forall x.\neg F}\,{\scriptstyle Ax}}{\forall x.\neg F, F[y/x] \vdash \neg F[y/x]}\,{\scriptstyle \forall e}
      \qquad
      \dfrac{}{\forall x.\neg F, F[y/x] \vdash F[y/x]}\,{\scriptstyle Ax}
    }{\forall x.\neg F, F[y/x] \vdash \bot}\,{\scriptstyle \neg e}
  }{
    \dfrac{\forall x.\neg F, \exists x.F \vdash \bot}{\forall x.\neg F \vdash \neg\exists x.F}\,{\scriptstyle Abs}
  }\,{\scriptstyle \exists e}
}{\vdash \forall x.\neg F \rightarrow \neg\exists x.F}\,{\scriptstyle \rightarrow i}
$$

CQFD

Lemme (17)

$\vdash (\neg\forall x.F) \rightarrow (\exists x.\neg F)$

Preuve:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{
            \dfrac{\dfrac{}{\neg F[y/x] \vdash \neg F[y/x]}\,{\scriptstyle Ax}}{\neg F[y/x] \vdash \exists x.\neg F}\,{\scriptstyle \exists i}
            \qquad
            \dfrac{}{\neg\exists x.\neg F \vdash \neg\exists x.\neg F}\,{\scriptstyle Ax}
          }{\neg\exists x.\neg F, \neg F[y/x] \vdash \bot}\,{\scriptstyle \neg e}
        }{\neg\exists x.\neg F \vdash F[y/x]}\,{\scriptstyle Abs}
      }{\neg\exists x.\neg F \vdash \forall x.F}\,{\scriptstyle \forall i}
      \qquad
      \dfrac{}{\neg\forall x.F \vdash \neg\forall x.F}\,{\scriptstyle Ax}
    }{\neg\forall x.F, \neg\exists x.\neg F \vdash \bot}\,{\scriptstyle \neg e}
  }{\neg\forall x.F \vdash \exists x.\neg F}\,{\scriptstyle Abs}
}{\vdash \neg\forall x.F \rightarrow \exists x.\neg F}\,{\scriptstyle \rightarrow i}
$$

CQFD

Arbres de preuves Les preuves en déduction naturelle, avons-nous noté, ont une structure arborescente. Les nœuds des arbres de preuves correspondent chacun à l'utilisation d'une règle. On peut voir chaque règle comme *une clause de la définition inductive* des arbres de preuves. La clause de base est la règle axiome : elle n'a pas de prémisse, c'est-à-dire, pas de sous-arbre. Pour toutes les autres règles, les prémisses sont les racines des sous-arbres permettant la construction d'un nouvel arbre à partir d'arbres déjà construits. Chaque règle a un nombre fini de prémisses (un, deux ou trois). Du point de vue de leur structure arborescente : les preuves en déduction naturelle sont des objets finis. Ce fait nous donne le *lemme de finitude* :

Lemme (18)

Si $\Gamma \vdash F$ alors il existe une partie finie $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ telle que $\Gamma_0 \vdash F$.

Preuve: les arbres de preuves étant finis, ils ont un nombre fini de feuille, c'est-à-dire un nombre fini d'application de la règle Ax. Il suffit de ne garder de l'ensemble Γ que les formules ayant servi aux règle Ax pour obtenir le sous ensemble fini Γ_0.

CQFD

Comme pour tous les objets construits par définition inductive, on a sur les arbres de preuves *un principe de raisonnement par induction.* On dit souvent par induction sur ≪la dernière règle utilisée≫. Dans le cas des règles inductives (c'est-à-dire toutes, sauf la règle Ax), pour chaque prémisse $\Gamma_i \vdash F_i$ de la règle, on a une hypothèse d'induction sur le sous arbre dont chaque prémisse est conclusion. La preuve du lemme suivant utilise ce principe.

Lemme (19)

si $\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]$ alors pour tout y, sauf un nombre fini, $\Gamma[y/x] \vdash F[y/x]$.

Preuve: par induction sur la dernière règle appliquée.

Remarque préliminaire : les formules $F[t/x]$ et $F[z/x][t/z]$ sont égales si l'on choisit correctement z ; c'est-à-dire, sans occurrence libre dans $F[t/x]$. Ce choix est toujours possible. Ainsi, dans $F[t/x]$, le x qui est remplacé peut être vu comme les variables liées : on peut choisir librement leur nom en dehors d'un ensemble fini. Nous utiliserons ce fait pour formuler sur x les hypothèses qui nous conviennent.

Revenons en à la preuve de notre lemme :

1. Règle Aff : $\Gamma[c/x]$ a la forme $\Gamma_1[c/x], \Gamma_2[c/x]$ et on a
$$\frac{\Gamma_1[c/x] \vdash F[c/x]}{\Gamma_1[c/x], \Gamma_2[c/x] \vdash F[c/x]}$$
Par hypothèse d'induction, on a que $\Gamma_1[y/x] \vdash F[y/x]$ et par la règle d'affaiblissement : $\Gamma_1[y/x], \Gamma_2[y/x], \vdash F[y/x]$.
2. Règle Ax : on a que $F[c/x] \in \Gamma[c/x]$. Il est clair qu'alors $F[y/x] \in \Gamma[y/x]$.
3. Règle *Abs* : notons que $\bot[c/x] \equiv \bot[y/x] \equiv \bot$. On a
$$\frac{\Gamma[c/x], \neg F[c/x] \vdash \bot}{\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]}$$
Par hypothèse d'induction, $\Gamma[y/x], \neg F[y/x] \vdash \bot$ et, par la règle *Abs* : $\Gamma[y/x] \vdash F[y/x]$.
4. Règle $\neg i$: $F[c/x]$ a la formme $\neg F_1[c/x]$. Notons encore que $\bot[c/x] \equiv \bot[y/x] \equiv \bot$. On a
$$\frac{\Gamma[c/x], F_1[c/x] \vdash \bot}{\Gamma[c/x] \vdash \neg F_1[c/x]}$$
Par hypothèse d'induction, $\Gamma[y/x], F_1[y/x] \vdash \bot$ et, par la règle $\neg i$: $\Gamma[y/x] \vdash \neg F_1[y/x]$.
5. Règle $\neg e$: $F[c/x] \equiv \bot$, c'est-à-dire, $F \equiv \bot$ et donc $F[y/x] \equiv \bot$. On a
$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash \neg F_1[c/x] \quad \Gamma[c/x] \vdash F_1[c/x]}{\Gamma[c/x] \vdash \bot}$$
On a deux hypothèses d'induction qui nous donnent que $\Gamma[y/x] \vdash \neg F_1[y/x]$ et $\Gamma[y/x] \vdash F_1[y/x]$. On en déduit, par la règle $\neg e$, que $\Gamma[y/x] \vdash \bot$.
6. Règle $\wedge i$: $F[c/x]$ a la forme $F_1[c/x] \wedge F_2[c/x]$, on a
$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash F_1[c/x] \quad \Gamma[c/x] \vdash F_2[c/x]}{\Gamma[c/x] \vdash F_1[c/x] \wedge F_2[c/x]}$$
Par hypothèses d'induction : $\Gamma[y/x] \vdash F_1[y/x]$ et $\Gamma[y/x] \vdash F_2[y/x]$. On en déduit, par la règle $\wedge i$ que $\Gamma[y/x] \vdash F_1[y/x] \wedge F_2[y/x]$. Et $F_1[y/x] \wedge F_2[y/x]$ est égale à $F[y/x]$.

7. Règle $\wedge e1$: on a

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash F[c/x] \wedge G}{\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]}$$

pour une formule G quelconque. D'après notre remarque préliminaire, on choisit x sans occurrence libre dans G. Ce qui nous donne que $F[c/x] \wedge G \equiv (F \wedge G)[c/x]$. On a donc, en fait que

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash (F \wedge G)[c/x]}{\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]}$$

On applique l'hypothèse d'induction à $\Gamma[c/x] \vdash (F \wedge G)[c/x]$ pour obtenir $\Gamma[y/x] \vdash (F \wedge G)[y/x]$, c'est-à-dire, $\Gamma[y/x] \vdash F[y/x] \wedge G$. On en déduit, par la règle $\wedge e1$ que $\Gamma[y/x] \vdash F[y/x]$.

8. La règle $\wedge e2$ se traite de manière analogue.

9. Règle $\vee i1$: $F[c/x]$ a la forme $F_1[c/x] \vee F_2[c/x]$. On a

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash F_1[c/x]}{\Gamma[c/x] \vdash F_1[c/x] \vee F_2[c/x]}$$

Par hypothèse d'induction, $\Gamma[y/x] \vdash F_1[y/x]$. Par la règle $\vee i1$: $\Gamma[y/x] \vdash F_1[y/x] \vee F_2[y/x]$. Et $F_1[y/x] \vee F_2[y/x]$ est égale à $F[y/x]$.

10. La règle $\vee i2$ se traite de manière analogue.

11. Règle $\vee e$: on a

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash F_1 \vee F_2 \quad \Gamma[c/x], F_1 \vdash F[c/x] \quad \Gamma[c/x], F_2 \vdash F[c/x]}{\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]}$$

Pour appliquer les hypothèses d'induction, on suppose x tel que $F_1[c/x] \equiv F_1$ et $F_2[c/x] \equiv F_2$. On a donc, dans ce cas que

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash (F_1 \vee F_2)[c/x] \quad (\Gamma, F_1)[c/x] \vdash F[c/x] \quad (\Gamma, F_2)[c/x] \vdash F[c/x]}{\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]}$$

Par hypothèse d'induction,
– $\Gamma[[y/x] \vdash (F_1 \vee F_2)[y/x]$;
– $(\Gamma, F_1)[y/x] \vdash F[y/x]$ et
– $(\Gamma, F_2)[y/x] \vdash F[y/x]$.
C'est-à-dire, compte tenu du choix de x :
– $\Gamma[y/x] \vdash F_1 \vee F_2$;
– $\Gamma[y/x], F_1 \vdash F[y/x]$ et
– $\Gamma[y/x], F_2 \vdash F[y/x]$
On en déduit, par la règle $\vee e$ que $\Gamma[y/x] \vdash F[y/x]$.

12. Règle $\rightarrow i$: $F[c/x]$ a la forme $F_1[c/x] \rightarrow F_2[c/x]$. Le résultat vient directement par hypothèse d'induction.

13. Règle $\rightarrow e$: on a

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash G \rightarrow F[c/x] \quad \Gamma[c/x] \vdash G}{\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]}$$

On utilise l'astuce du x bien choisi ($G[c/x] \equiv G$) pour obtenir le résultat.

14. Règle $\forall i$: on peut poser que F a la forme $\forall x.F_1$ ou $\forall z.F_1$ avec $z \not\equiv x$.

– si $F \equiv \forall x.F_1$ alors $F[c/x] \equiv F \equiv \forall x.F_1$. On a donc

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash F_1[z/x]}{\Gamma[c/x] \vdash \forall x.F_1}$$

Notons que $F_1[z/x] \equiv F_1[z/x][c/x]$ en choisissant $x \not\equiv z$. On a donc, par hypothèse d'induction $\Gamma[y/x] \vdash F_1[z/x][y/x]$, c'est-à-dire : $\Gamma[y/x] \vdash F_1[z/x]$. On en déduit, par la règle $\forall i$, que $\Gamma[y/x] \vdash \forall x.F_1$ avec $\forall x.F_1 \equiv (\forall x.F_1)[y/x] \equiv F[y/x]$.
– si $F \equiv \forall z.F_1$ avec $z \not\equiv x$ alors $F[c/x] \equiv \forall z.F_1[c/x]$. On a

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash F_1[c/x][w/z]}{\Gamma[c/x] \vdash \forall z.F_1[c/x]}$$

On note que $F_1[c/x][w/z] \equiv F_1[w/z][c/x]$ en prenant $x \not\equiv w$. Par hypothèse d'induction on a que $\Gamma[y/x] \vdash F_1[w/z][y/x]$. En choisissant $y \not\equiv z$, on a $\Gamma[y/x] \vdash F_1[y/x][w/z]$. Par la règle $\forall i$, on en déduit que $\Gamma[y/x] \vdash \forall z.F_1[y/x]$, avec $\forall z.F_1[y/x] \equiv (\forall z.F_1)[y/x] \equiv F[y/x]$.

15. Règle $\forall e$: on considère deux cas : ou bien c'est cette règle qui introduit la constante c ; ou bien, non.
– dans le premier cas, on a

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash \forall x.F}{\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]}$$

On remarque que $\forall x.F \equiv (\forall x.F)[c/x] \equiv (\forall x.F)[y/x]$. On a donc, par hypothèse d'induction $\Gamma[y/x] \vdash \forall x.F$. D'où, par la règle $\forall e$: $\Gamma[y/x] \vdash F[y/x]$.
– sinon, $F[c/x]$ a la forme $F_1[c/x][t/z]$ et on suppose $x \notin \{z\} \cup \mathcal{V}(t)$. Notons qu'alors $(\forall z.F_1)[c/x] \equiv \forall z.F_1[c/x]$. On a :

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash \forall z.F_1[c/x]}{\Gamma[c/x] \vdash F_1[c/x][t/z]}$$

Par hypothèse d'induction $\Gamma[y/x] \vdash \forall z.F_1[y/x]$ en choisissant $y \not\equiv z$. On en déduit que $\Gamma[y/x] \vdash F_1[y/x][t/z]$. Et $F_1[y/x][t/z]$ est la forme de $F[y/x]$ avec $F \equiv F_1[t/z]$ en choisissant $y \notin \mathcal{V}(t)$.

16. Règle $\exists i$: $F[c/x]$ a la forme $\exists x.F_1$ ou $\exists z.F_1[c/x]$ avec $x \not\equiv z$.
– Dans le premier cas, on a

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash F_1[t/x]}{\Gamma[c/x] \vdash \exists x.F_1}$$

On suppose que $x \notin \mathcal{V}(t)$. On a alors que $F_1[t/x] \equiv F_1[t/x][c/x]$. Par hypothèse d'induction, on obtient $\Gamma[y/x] \vdash F_1[t/x][y/x]$; c'est-à-dire : $\Gamma[y/x] \vdash F_1[t/x]$. D'où, par la règle $\exists i$: $\Gamma[y/x] \vdash \exists x.F_1$ et $\exists x.F_1 \equiv F[y/x]$.
– Dans le second cas, on a

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash F_1[c/x][t/z]}{\Gamma[c/x] \vdash \exists z.F_1[c/x]}$$

On suppose $x \notin \mathcal{V}(t)$. On a alors que $F_1[c/x][t/z] \equiv F_1[t/z][c/x]$ et, par hypothèse d'induction que $\Gamma[y/x] \vdash F_1[t/z][y/x]$. En choisissant $y \notin \mathcal{V}(t)$, $F_1[t/z][y/x] \equiv F_1[y/x][t/z]$. On en déduit, par la règle $\exists i$ que $\Gamma[y/x] \vdash \exists z.F_1[y/x]$ avec $\exists z.F_1[y/x] \equiv F[y/x]$.

17. Règle $\exists e$: on a

$$\frac{\Gamma[c/x] \vdash \exists z.G \quad \Gamma[c/x], G[w/z] \vdash F[c/x]}{\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]}$$

On suppose $x \notin \{w, z\} \cup \mathcal{V}(G)$. On a alors que $\Gamma[c/x], G[w/z]$ est égal à $(\Gamma, G[w/z])[c/x]$ et que $\exists z.G \equiv (\exists z.G)[c/x]$. Par hypothèse d'induction, on obtient que
– $\Gamma[y/x] \vdash (\exists z.G)[y/x]$ et
– $(\Gamma, G[w/z])[y/x] \vdash F[y/x]$.

On note que, en choisissant $y \notin \{w, z\}$, on a que $(\exists z.G)[y/x] \equiv \exists z.G[y/x]$ et $(\Gamma, G[w/z])[y/x]$ est égal à $\Gamma[y/x], G[w/z]$. On en déduit, par la règle $\exists e$ que $\Gamma[y/x] \vdash F[y/x]$.

CQFD

<u>Corollaire :</u> (20)

Pour tout Γ et tout F, pour toute constante c qui n'a pas d'occurrence dans Γ, ni dans F, pour toute variable x qui n'a pas d'occurrence libre dans Γ, si $\Gamma \vdash F[c/x]$ alors $\Gamma \vdash \forall x.F$.

Preuve: remarquons d'abord que comme x est supposé non libre dans Γ, on a que Γ est égal à $\Gamma[c/x]$. Supposer que $\Gamma \vdash F[c/x]$ est donc équivalent à supposer que $\Gamma[c/x] \vdash F[c/x]$. Du lemme ci-dessus on en déduit que $\Gamma[y/x] \vdash F[y/x]$ en choisissant y non libre dans Γ. On note que $\Gamma[y/x]$ est égal à Γ. On applique la régle $\forall i$ pour obtenir $\Gamma \vdash \forall x.F$.

CQFD

1.3.2 Correction

Il faut montrer que le système de la déduction naturelle a bien atteint son but : donner un moyen formel de faire la preuve de conséquences logiques. C'est-à-dire, montrer que les séquents $\Gamma \vdash F$ dérivables au moyen des régles de la déduction naturelle sont des conséquences valides : $\Gamma \models F$.

<u>Théorème</u> (21)

Pour tout ensemble de formules Γ et toute formule F, si $\Gamma \vdash F$ alors $\Gamma \models F$.

Preuve: Par induction sur la dernière régle appliquée.

Comme il y a beaucoup de règles de dérivation, il y a beaucoup de cas à examiner. Cependant, la preuve de la plupart d'entre eux reprend des arguments similaires. Dans notre rédaction, nous détaillerons donc certains cas et adopterons pour d'autres un style plus elliptique, laissant au lecteur le soin de reconstruire les étapes éludées.

Rappels : $\Gamma \models F$ signifie que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout environnement ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, \rho \models F$. On rappelle également que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ signifie que pour toute formule $F_i \in \Gamma$, on a $\mathcal{M}, \rho \models F_i$.

<u>Règle *Ax*</u> Il faut montrer que $\Gamma, F \models F$. Ce qui est immédiat par définition de la conséquence, puisque si pour tout modèle $\mathcal{M}$ et environnement ρ, on a que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma, F$, alors, en particulier on a également que $\mathcal{M}, \rho \models F$.

<u>Règle *Abs*</u> On a par hypothèse d'induction que $\Gamma, \neg F \models \bot$ et on veut montrer que $\Gamma \models F$.
Montrons dans un premier temps que (1) pour tout $\mathcal{M}$ et ρ, on a $\mathcal{M}, \rho \not\models \Gamma, \neg F$. On procède par l'absurde : si l'on suppose un modèle $\mathcal{M}$ et un environnement ρ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma, \neg F$, alors par hypothèse d'induction, on aurait que $\mathcal{M}, \rho \models \bot$, ce qui contredit le choix de $\bot$ qui est que pour tout $\mathcal{M}$ et tout ρ, $\mathcal{M}, \rho \not\models \bot$.
On montre ensuite que (2), pour tout $\mathcal{M}$ et tout ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, \rho \not\models \neg F$. On procède ici encore par l'absurde : si l'on suppose que pour un certain $\mathcal{M}$ et un certain ρ, $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ et $\mathcal{M}, \rho \models \neg F$, on contredit (1).
Montrer $\Gamma \models F$, c'est montrer que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et environnement ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$, alors $\mathcal{M}, \rho \models F$. Supposons donc un $\mathcal{M}$ et un ρ quelconques tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ et montrons qu'alors $\Gamma \models F$: par (2), on a que $\mathcal{M}, \rho \not\models \neg F$, d'où, par le fait 3, $\mathcal{M}, \rho \models F$.

<u>Règle $\neg i$</u> On a par hypothèse d'induction que $\Gamma, F \models \bot$ et on veut montrer que $\Gamma \models \neg F$.
On peut conduire le même raisonnement que pour la règle *Abs* et obtenir que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout environnement ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, \rho \not\models F$ et donc, par le fait dual 3, $\mathcal{M}, \rho \models \neg F$. Ce qui nous donne $\Gamma \models \neg F$.

<u>Règle $\neg e$</u> On a par hypothèse d'induction qu'à la fois $\Gamma \models \neg F$ et $\Gamma \models F$ et on veut montrer que $\Gamma \models \bot$. Puisque qu'aucun modèle ne satifisfait $\bot$, la seule manière d'avoir $\Gamma \models \bot$ est de montrer qu'aucun modèle

ne satisfait Γ (remarque 1).
Si l'on suppose un modèle $\mathcal{M}$ et un environnement ρ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors on aurait, par hypothèse d'induction, qu'à la fois $\mathcal{M}, \rho \models F$ et $\mathcal{M}, \rho \models \neg F$, ce qui contredit le fait 3. Il n'existe donc aucun modèle tel que $\mathcal{M} \models \Gamma$.

Règle $\wedge i$ On a par hypothèse d'induction que $\Gamma \models F_1$ et que $\Gamma \models F_2$ et on veut montrer que $\Gamma \models F_1 \wedge F_2$. De nos deux hypothèses d'induction, on tire que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout environnement ρ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$, on a $\mathcal{M}, \rho \models F_1$ et $\mathcal{M}, \rho \models F_2$. D'où, $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \wedge F_2$ (fait 2.3) et donc $\Gamma \models F_1 \wedge F_2$.

Règle $\wedge e1$ On a par hypothèse d'induction que $\Gamma \models F_1 \wedge F_2$ et on veut montrer que $\Gamma \models F_1$.
Par hypothèse d'induction et fait 2.3, pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout environnement ρ, si $\mathcal{M} \models \Gamma$ alors $\mathcal{M} \models F_1$ et $\mathcal{M} \models F_2$; en particulier, on a donc que si $\mathcal{M} \models \Gamma$ alors $\mathcal{M} \models F_1$, c'est-à-dire, $\Gamma \models F_1$.

Règle $\wedge e2$ Se traite de façon analogue à la règle $\wedge e1$.

Règle $\vee i1$ On a par hypothèse d'induction que $\Gamma \models F_1$ et on veut montrer que $\Gamma \models F_1 \vee F_2$.
Par hypothèse d'induction, pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout environnement ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$, alors $\mathcal{M}, \rho \models F_1$. Et, $\mathcal{M}, \rho \models F_1$, donne, par le fait 2.2, que $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \vee F_2$. D'où $\Gamma \models F_1 \vee F_2$.

Règle $\vee i2$ Se traite de manière analogue à la règle $\vee i1$.

Règle $\vee e$ On a par hypothèse d'induction que (a) $\Gamma \models G_1 \vee G_2$ que (b), $\Gamma, G_1 \models F$ et que (c), $\Gamma, G_2 \models F$. On veut montrer que $\Gamma \models F$. Pour cela, on suppose $\mathcal{M}$ et ρ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ et on montre qu'alors $\mathcal{M}, \rho \models F$.
Si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$, alors, par (a), $\mathcal{M}, \rho \models G_1 \vee G_2$, c'est-à-dire : $\mathcal{M}, \rho \models G_1$ ou $\mathcal{M}, \rho \models G_2$. On peut donc diviser l'ensemble des modèles $\mathcal{M}, \rho$ de Γ en deux classes : ceux qui satisfont également G_1 et ceux qui satisfont également G_2. Il est en effet exclus que $\mathcal{M}, \rho$ ne satisfasse ni G_1, ni G_2 puisque l'on a comme hypothèse que $\mathcal{M}, \rho \models G_1$ ou $\mathcal{M}, \rho \models G_2$.
On procède alors par cas pour obtenir $\mathcal{M}, \rho \models F$:
- si $\mathcal{M}\rho \models G_1$, alors $\mathcal{M}\rho \models \Gamma, G_1$ et, par (b), $\mathcal{M}, \rho \models F$;
- si $\mathcal{M}\rho \models G_2$, alors $\mathcal{M}\rho \models \Gamma, G_2$ et, par (c), $\mathcal{M}, \rho \models F$;

Règle $\rightarrow i$ On a par hypothèse d'induction que $\Gamma, F_1 \models F_2$ et on veut montrer que $\Gamma \models F_1 \rightarrow F_2$.
Soit un modèle $\mathcal{M}$ et un environnement ρ quelconques tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$. On considère deux cas :

1. Soit $\mathcal{M}, \rho \not\models F_1$, par le fait 2.4 $\Gamma, \rho \models F_1 \rightarrow F_2$.
2. Soit $\mathcal{M}, \rho \models F_1$, alors $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma, F_1$ et, par hypothèse d'induction, $\mathcal{M}, \rho \models F_2$. Le fait 2.4 nous donne alors que $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \rightarrow F_2$.

Dans les deux cas, sous hypothèse que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ on a que $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \rightarrow F_2$, donc $\Gamma \models F_1 \rightarrow F_2$.

Règle $\rightarrow e$ On a par hypothèse d'induction que (a), $\Gamma \models F_1 \rightarrow F_2$ et que (b), $\Gamma \models F_1$. On veut montrer que $\Gamma \models F_2$.
Soit $\mathcal{M}$ et ρ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$. Par nos deux hypothèses d'induction, on a que (1) $\mathcal{M}, \rho \models F_1 \rightarrow F_2$ et que (2), $\mathcal{M}, \rho \models F_1$. De (1) et du fait 2.4 on tire que $\mathcal{M}, \rho \not\models F_1$ ou $\mathcal{M}, \rho \models F_2$. De ceci et de (2), on a nécessairement que $\mathcal{M}, \rho \models F_2$. D'où $\Gamma \models F_2$.

Règle $\forall i$ On a, par hypothèse d'induction que *pour tout y qui n'a d'occurrence libre ni dans Γ, ni dans F*, $\Gamma \models F[y/x]$ et on veut que $\Gamma \models \forall x.F$.
Procédons par l'absurde. Si on suppose $\Gamma \not\models \forall x.F$ alors il existe un modèle $\mathcal{M}_0$ et un environnement ρ_0 tels que $\mathcal{M}_0, \rho_0 \models \Gamma$ et $\mathcal{M}_0, \rho_0 \not\models \forall x.F$. Si $\mathcal{M}_0, \rho_0 \not\models \forall x.F$ alors il existe $m \in M$ (ensemble de base de $\mathcal{M}_0$) tels que $\mathcal{M}_0, \rho_0[x \mapsto m] \not\models F$ (fait 2.5). Or, par le lemme 6, comme y n'a pas d'occurrence libre dans F, si $\mathcal{M}_0, \rho_0[x \mapsto m] \not\models F$ alors $\mathcal{M}_0, \rho_0[y \mapsto m] \not\models F[y/x]$. D'autre part, comme y n'a pas non plus d'occurrence libre dans Γ et que l'on a supposé que $\mathcal{M}_0, \rho_0 \models \Gamma$, on a, par le lemme 5 que $\mathcal{M}_0, \rho_0[y \mapsto m] \models \Gamma$. En résumé, on aurait $\mathcal{M}_0, \rho_0[y \mapsto m] \models \Gamma$ et $\mathcal{M}_0, \rho_0[y \mapsto m] \not\models F[y/x]$, ce qui contredit l'hypothèse d'induction : $\Gamma \models F[y/x]$.

Règle $\forall e$ On a par hypothèse d'induction que $\Gamma \models \forall x.F$ et on veut montrer que $\Gamma \models F[t/x]$.
Soit, $\mathcal{M}$ et ρ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$. Par hypothèse d'induction, $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.F$, c'est-à-dire, par fait 2.5, pour

tout $m \in M$ (ensemble de base de $\mathcal{M}$), $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F$; et en particulier, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^{\mathcal{M}}(t)_\rho] \models F$. On en tire, par le lemme 7 que $\mathcal{M}, \rho \models F[t/x]$. En résumé, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, \rho \models F[t/x]$, c'est-à-dire : $\Gamma \models F[t/x]$.

Règle $\exists i$ On a par hypothèse d'induction que $\Gamma \models F[t/x]$ et on veut $\Gamma \models \exists x.F$.
Par le fait 2.6, on veut que pour tout $\mathcal{M}$ et pour tout ρ, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors, pour au moins un $m \in M$ (ensemble de base de $\mathcal{M}$), on a $\Gamma, \rho[x \mapsto m] \models F$. Supposons donc $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ et cherchons m. Si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors, par hypothèse d'induction, $\mathcal{M}, \rho \models F[t/x]$. Ce qui nous donne, par le lemme 7 que $\Gamma, \rho[x \mapsto \mathcal{I}_T^M(t)_\rho] \models F$. On prend $m = \mathcal{I}_T^M(t)_\rho$.

Règle $\exists e$ On a par hypothèses d'induction que (1), $\Gamma \models \exists x.F$ et que (2), $\Gamma, F[y/x] \models G$ avec y sans occurrence libre ni dans Γ, ni dans F, ni dans G. On veut $\Gamma \models G$. Supposons donc que pour $\mathcal{M}$ et ρ quelconques, $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ et montrons que $\mathcal{M}, \rho \models G$.
Si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors, par l'hypothèse d'induction (1), on a que $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.F$, c'est-à-dire, par le fait 2.6, il existe au moins un $m \in M$ (ensemble de base de $\mathcal{M}$) tel que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F$. Comme y n'est pas libre dans F, on en déduit, par le lemme 6 que (a), $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models F[y/x]$. Comme y n'est pas non plus libre dans Γ et que l'on a supposé que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$, on a, par le lemme 5, que (b), $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models \Gamma$. De (a), (b) et de l'hypothèse d'induction (2), on tire que $\mathcal{M}, \rho[y \mapsto m] \models G$. Mais, comme y est aussi non libre dans G, on a, par le lemme 5 que $\mathcal{M}, \rho \models G$.

1.3.3 Complétude

Nous avons donc défini le langage des formules du calcul des prédicats du premier ordre. Nous avons donné à cette syntaxe une sémantique qui définit le moyen d'interpréter une formule pour obtenir sa valeur de vérité relativement à un modèle, voire pour tous les modèles. Reposant sur cette sémantique, nous avons défini la relation de conséquence logique entre un ensemble de formules (hypothèses) et une formule (conséquent). Nous avons ensuite défini une syntaxe pour construire des preuves de séquents qui sont des couples constitués d'un ensemble de formules (hypothèses) et d'une formule (conséquent). Nous avons démontré que tous les séquents dérivables dans le système de preuves sont des conséquences sémantiquement valides. Nous allons démontrer dans cette section l'implication inverse : pour toute conséquence valide $\Gamma \models F$, il existe une preuve du séquent $\Gamma \vdash F$. Ce résultat est le *théorème de complétude de Gödel.*

La preuve du théorème de complétude est beaucoup plus sophistiquée que celle du théorème de correction. Dans le cas de la correction, nous avions comme hypothèse l'existence d'une dérivation qui est un objet définit inductivement. La preuve du théorème de correction n'a eu qu'à suivre la définition inductive des preuves. Dans le cas du théorème de complétude, notre hypothèse est l'existence d'un modèle dont la définition ne repose pas sur une induction. L'idée de la preuve est d'établir un lien entre l'existence d'un modèle pour un ensemble de formules et sa *cohérence*, c'est-à-dire le fait qu'il ne puisse donner lieu à la preuve d'une formule et de sa négation. Pour établir ce lien, nous montrerons comment construire un modèle *syntaxique* pour chaque ensemble de formules supposé cohérent.

Ensemble cohérent de formules un ensemble de formules est cohérent s'il n'a pas pour conséquence une contradiction. Formellement :

Définition (7)

Un ensemble de formules Γ est cohérent si et seulement si $\Gamma \not\vdash \bot$.

Une définition équivalente est de dire que l'on ne peut avoir à la fois $\Gamma \vdash F$ et $\Gamma \vdash \neg F$ pour une formule quelconque F. En effet :

Lemme (22)

$\Gamma \vdash \bot$ si et seulement si $\Gamma \vdash F$ et $\Gamma \vdash \neg F$, pour n'importe quelle formule F.

PREUVE: on montre les deux sens de l'équivalence

- si $\Gamma \vdash F$ et $\Gamma \vdash \neg F$ alors le résultat est immédiat avec la règle $\neg e$
- si $\Gamma \vdash \bot$ alors on construit les deux dérivations suivantes

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma, F \vdash \bot}\,Aff}{\Gamma \vdash \neg F}\,\neg i \qquad \dfrac{\begin{matrix}[15.2] \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \neg\neg F \to F\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma, \neg F \vdash \bot}\,Aff}{\Gamma \vdash \neg\neg F}\,\neg i}{\Gamma \vdash F}\,\to e$$

La dérivation de $\Gamma \vdash \neg\neg F \to F$ nous est donnée par la corollaire 15.2.

<u>COROLLAIRE</u> (23)

Un ensemble de formules Γ n'est pas cohérent si et seulement si $\Gamma \vdash F$ et $\Gamma \vdash \neg F$ pour une formule F quelconque.

PREUVE: Par contraposée de la définition de la cohérence : Γ n'est pas cohérent si et seulement si $\Gamma \vdash \bot$ et, par le lemme ci-dessus, $\Gamma \vdash \bot$ si et seulement si $\Gamma \vdash F$ et $\Gamma \vdash \neg F$.

<u>LEMME</u> (24)

Si Γ est cohérent et $\Gamma \vdash F$ alors Γ, F est cohérent.

PREUVE: Procédons par l'absurde en supposant que Γ est cohérent et $\Gamma \vdash F$ mais Γ, F non cohérent. On cherche à contredire que Γ est cohérent.
Si Γ, F n'est pas cohérent, par définition, $\Gamma, F \vdash \bot$. D'où, par la règle $\neg i$, $\Gamma \vdash \neg F$. On aurait donc que $\Gamma \vdash \neg F$ et $\Gamma \vdash F$, c'est-à-dire, par le corollaire ci-dessus, que Γ n'est pas cohérent : c'est la contradiction recherchée.

CQFD

<u>LEMME :</u> (25)

si Γ est cohérent et $\Gamma \nvdash F$ alors $\Gamma, \neg F$ est cohérent.

PREUVE: on procède également ici par l'absurde, mais c'est l'hypothèse que $\Gamma \nvdash F$ que l'on va contredire.
Si $\Gamma, \neg F$ n'est pas cohérent, on obtient $\Gamma \vdash \neg\neg F$. Or $\Gamma \vdash \neg\neg F \to F$ (corollaire 15.2) et donc on aurait $\Gamma \vdash F$. Ce qui est la contradiction recherchée.

CQFD

Ensemble complet de formules Un ensemble complet de formules est un ensemble qui en quelques sorte a fait le tri entre *toutes les formules* du calcul des prédicats, qui a choisi celles qu'il considère comme vraie et celles qu'il considère comme fausses.

<u>DÉFINITION</u> (8)

Un ensemble de formules Γ est *complet* si et seulement si pour toute formule F, ou bien $F \in \Gamma$ ou bien $\neg F \in \Gamma$.

Nous ne nous intéresserons pas à tous les ensembles complets, mais uniquement à ceux qui sont cohérents. Lorsqu'un ensemble de formules est à la fois cohérent et complet alors les notions de prouvabilité et d'appartenance conïncident. Formellement :

<u>LEMME</u> (26)

Si un ensemble de formules Γ est cohérent et complet alors pour toute formule F, on a que $F \in \Gamma$ si et seulement si $\Gamma \vdash F$.

Preuve: on montre les deux sens de l'équivalence :
- si $F \in \Gamma$ alors $\Gamma \vdash F$ par la règle Ax.
- si $\Gamma \vdash F$, si on suppose que $F \notin \Gamma$, alors par hypothèse de complétude de Γ, il faut que $\neg F \in \Gamma$. Mais, dans ce cas, avec la règle Ax on aurait que $\Gamma \vdash \neg F$. Ce qui contredit l'hypothèse de cohérence de Γ.

Témoins de Henkin Les témoins de Henkin nous permettrons dans la construction des modèles syntaxiques de disposer *effectivement* d'un symbole de constante, c'est-à-dire d'un élément du modèle, pour les cas des formules quantifiées : l'existentielle mais également l'universelle lorsque nous supposerons sa négation.

Définition (9)

> Un ensemble de formules Γ admet des *témoins de Henkin* si et seulement si pour toute formule F à une seule variable libre x, il existe un symbole de constante c tel que la formule $F[c/x] \in \Gamma$.

Formule Γ-close À un ensemble de formules Γ donné, on associe l'ensemble des termes dits Γ-clos qui sont tous les termes dont les seules variables sont celles qui sont libres dans Γ. Par extension, une formule F est Γ-*close* lorsque toutes ses variables libres sont des variables libres dans Γ ($\mathcal{V}f(F) \subseteq \mathcal{V}f(\Gamma)$). De façon duale, si une variable x est libre dans une formule F mais n'est pas dans les variables libres de Γ, on dira que x est Γ-*libre* dans F.

Si Γ contient une infinité de variables libres, on peut toujours s'arranger pour disposer tout de même d'une «autre» infinité de symboles de variables pour nommer ou renommer les variables non libres dans Γ (soit les variables liées, soit les variables intervenant dans la règles sur les quantificateurs). Par exemple, à un ensemble Γ donné, on choisit de nommer une fois pour toutes ses variables libres x_1, x_2, etc. et toutes les autres variable seront nommées y_1, y_2, etc.

Un premier résultat Sous les hypothèses fortes de cohérence, de complétude et d'existence des témoins de Henkin, on montre comment construire un modèle syntaxique.

Proposition (27)

> Si un ensemble de formules Γ est cohérent, complet et admet des témoins de Henkin alors il existe un modèle $\mathcal{M}$ et un environnement ρ tels que $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$.

Preuve: la preuve procède en deux temps (i) on construit une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}_\Gamma$ et un environnement ρ_Γ pour la signature $\mathcal{S}$ du langage de Γ, puis (ii) on déduit que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models \Gamma$ de l'équivalence

$$F \in \Gamma \text{ si et seulement si } \mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F$$

(i) On contruit pour Γ un modèle *syntaxique* $\mathcal{M}_\Gamma = < M_\Gamma, \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_F, \mathcal{I}_P >$. L'ensemble de base M_Γ du modèle est l'ensemble des termes obtenus à partir de l'ensemble des symboles de contantes et de fonctions ayant une occurrence dans Γ ainsi que l'ensemble des variables libres dans Γ. On appelle cet ensemble de termes, les termes Γ-*clos*. Les fonctions d'interprétation $\mathcal{I}_C$ et $\mathcal{I}_F$ sont l'identité. On prend comme environnement ρ_Γ une fonction de l'ensemble des symboles de variables dans l'ensemble de termes M_Γ qui est l'identité sur les variables libres de Γ : si x a une occurrence libre dans Γ alors $\rho_\Gamma(x) = x$. Notons que si t est Γ-clos alors $\rho_\Gamma(t) = t$.

La fonction d'interprétation des termes est donc simplment définie par $\mathcal{I}_T^{\mathcal{M}_\Gamma}(t)_{\rho_\Gamma} = \rho_\Gamma(t)$.

La fonction d'interprétation des symboles de prédicats est définie par

$$\mathcal{I}_p(P) = \{(t_1, \ldots, t_n) \in M_\Gamma^n \mid \Gamma \vdash P(t_1, \ldots, t_n)\}$$

(ii) On montre que $F \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F$ par induction sur le nombre de symboles logiques de F (on a besoin de ce type d'induction pour le cas des quantificateurs).

si $F \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$. Remarquons que si $P(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma$, les termes $t_1, \ldots, t_n$ sont Γ-clos et qu'alors $(\rho_\Gamma(t_1), \ldots, \rho_\Gamma(t_n)) = (t_1, \ldots, t_n)$.

On a, par le lemme 26, que $P(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma$ si et seulement si $\Gamma \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$; et, par définition de $\mathcal{I}_P$, $\Gamma \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$ si et seulement si $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{I}_P(P)$; et, par définition de l'interprétation des formules et la remarque ci-dessus : $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{I}_P(P)$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models P(t_1, \ldots, t_n)$.

si $F \equiv \neg G$, par hypothèse d'induction, $G \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models G$. C'est-à-dire, par contraposée, $G \notin \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \not\models G$. C'est-à-dire, par hypothèse de complétude de Γ : $\Gamma \in \neg G$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \not\models G$. C'est-à-dire, par le fait 2.1 : Γ : $\Gamma \in \neg G$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models \neg G$.

si $F \equiv F_1 \wedge F_2$, par hypothèse d'induction on a que $\Gamma \in F_1$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1$ et que $\Gamma \in F_2$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$. On veut montrer que $F_1 \wedge F_2 \in \Gamma$ $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \wedge F_2$. On montre les deux sens de l'équivalence :

si $F_1 \wedge F_2 \in \Gamma$, alors, par les règles Ax, $\wedge e1$ et $\wedge e2$, on a $\Gamma \vdash F_1$ et $\Gamma \vdash F_2$, c'est-à-dire, par le lemme 26, $F_1 \in \Gamma$ et $F_2 \in \Gamma$. Par hypothèses d'induction, on a donc $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1$ et $\mathcal{M}_\Gamma, \rho - \Gamma \models F_2$. D'où, par le fait 2.3, $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \wedge F_2$.

si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \wedge F_2$, par le fait 2.3, on a $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1$ et $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$. Par hypothèses d'induction, on a donc $\Gamma \vdash F_1$ et $\Gamma \vdash F_2$. D'où, avec la règle $\wedge i$, $\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2$ et, par le lemme 26, $F_1 \wedge F_2 \in \Gamma$.

si $F \equiv F_1 \vee F_2$, par hypothèse d'induction $F_1 \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1$ ainsi que $F_2 \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$. On veut montrer $F_1 \vee F_2 \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \vee F_2$. On montre les deux sens de l'équivalence.

si $F_1 \vee F_2 \in \Gamma$, on raisonne par cas :

- ou bien $F_1 \in \Gamma$ et alors, par hypothèse d'induction $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1$ d'où l'on tire que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \vee F_2$ (fait 2.2) ;
- ou bien $F_1 \notin \Gamma$ et alors, par hypothèse de cohérence et complétude de Γ, on a que $\neg F_1 \in \Gamma$. On obtient alors que $F_1 \vee F_2, \neg F_1 \vdash F_2$ en construisant la dérivation suivante

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F_1 \vee F_2 \vdash F_1 \vee F_2}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{F_1 \vdash F_1}\,Ax \quad \dfrac{}{\neg F_1 \vdash \neg F_1}\,Ax}{\neg F_1, F_1 \vdash \bot}\,\neg e \qquad \dfrac{\dfrac{}{F_2 \vdash F_2}\,Ax \quad \dfrac{}{\neg F_2 \vdash \neg F_2}\,Ax}{\neg F_2, F_2 \vdash \bot}\,\neg e}{F_1 \vee F_2, \neg F_1, \neg F_2 \vdash \bot}\,\vee e}{F_1 \vee F_2, \neg F_1 \vdash F_2}\,Abs$$

  On a donc $\Gamma \vdash F_2$ et, par le lemme 26 on a que $F_2 \in \Gamma$. Par hypothèse d'induction, on obtient que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$ qui nous donne, par le fait 2.2 que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \vee F_2$.

si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \vee F_2$ alors, par le fait 2.2, $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1$ ou $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$; disons que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1$, alors, par hypothèse d'induction $\Gamma \vdash F_1$ et, par la règle $\vee i_1$, $\Gamma \vdash F_1 \vee F_2$. On obtient le même résultat en supposant $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$. Dans les deux cas, par le lemme 26, on a $F_1 \vee F_2 \in \Gamma$.

si $F \equiv F_1 \rightarrow F_2$, par hypothèse d'induction $F_1 \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1$ ainsi que $F_2 \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$. On veut montrer $F_1 \rightarrow F_2 \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \rightarrow F_2$. On montre les deux sens de l'équivalence.

si $F_1 \rightarrow F_2 \in \Gamma$, on raisonne par cas :

- ou bien $F_1 \in \Gamma$, alors par les règles Ax et $\rightarrow e$ on obtient que $\Gamma \vdash F_2$, c'est-à-dire, par lemme 26, $F_2 \in \Gamma$. Par hypothèse d'induction on a alors que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$, d'où, par le fait 2.4, $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \rightarrow F_2$.
- ou bien $F_1 \notin \Gamma$ et alors par hypothèse d'induction on a que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \not\models F_1$ (contraposée) et, toujours par le fait 2.4, on a $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \rightarrow F_2$.

si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_1 \rightarrow F_2$ alors, par le fait 2.4, $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \not\models F_1$ ou $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$. On raisonne par cas :

- si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \not\models F_1$, par hypothèse d'induction (contraposée), $F_1 \notin \Gamma$ et, par hypothèse de complétude de Γ, on a $\neg F_1 \in \Gamma$. On construit alors la dérivation suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg F_1, F_1 \vdash \neg F_1}\,Ax \qquad \dfrac{}{\neg F_1, F_1 \vdash F_1}\,Ax}{\neg F_1, F_1 \vdash \bot}\,\neg e}{\neg F_1, F_1 \vdash F_2}\,Abs}{\neg F_1 \vdash F_1 \to F_2}\,\to i \times 2$$

Qui nous donne $\Gamma \vdash F_1 \to F_2$.

– si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models F_2$, par hypothèse d'induction, on a que $F_2 \in \Gamma$ et on construit la dérivation

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash F_2}\,Ax}{\Gamma, F_1 \vdash F_2}\,Aff}{\Gamma \vdash F_1 \to F_2}\,\to i$$

Qui nous donne également $\Gamma \vdash F_1 \to F_2$.

Dans les deux cas, par le lemme 26, on a que $F_1 \to F_2 \in \Gamma$.

<u>si $F \equiv \forall x.G$</u>, par hypothèse d'induction on a, en particulier que pour tout terme Γ-clos t, $G[t/x] \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma, \models G[t/x]$ (en effet, $G[t/x]$ possède un symbole logique de moins que $\forall x.G$ et il est clair que si $\forall x.G$ et t sont Γ-clos alors $G[t/x]$ l'est également). On veut $\forall x.G \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models \forall x.G$.

On raisonne par cas :

– si $\forall x.G \in \Gamma$, alors, en utilisant les règles Ax et $\forall e$, pour tout terme Γ-clos t, on déduit $\Gamma \vdash G[t/x]$, d'où, par lemme 26 et hypothèse d'induction : $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models G[t/x]$. Or, les termes Γ-clos sont les élements du modèle $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma$, et dire que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models G[t/x]$, c'est dire que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma, [x \mapsto t] \models G$ (cf lemme 7). Et, par le fait 2.5, si, pour tout t on a $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma, [x \mapsto t] \models G$ alors on a $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models \forall x.G$.
– si $\forall x.G \notin \Gamma$ alors, par hypothèse de complétude de Γ, on a $\neg\forall x.G \in \Gamma$. D'où, avec le lemme 17 et la règle $\to e$, on déduit $\Gamma \vdash \exists x.\neg G$. Comme on a fait l'hypothèse que Γ admet des témoins de Henkin, on a $\Gamma \vdash \neg G[c/x]$, pour une certaine constante c (qui est donc un terme Γ-clos). Par le lemme 26, on a que $\neg G[c/x] \in \Gamma$ et, par hypothèse de complétude de Γ, on a que $G[c/x] \notin \Gamma$. Par hypothèse d'induction (contraposée), on obtient que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \not\models G[c/x]$. Enfin, par le fait 2.5 (toujours par contraposée) on obtient que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \not\models \forall x.G$.

Le premier cas nous donne un sens de l'équivalence, le second nous donne l'autre sens par contraposée. On a donc bien montré ce que l'on cherchait.

<u>si $F \equiv \exists x.G$</u>, ici encore, on a, par hypothèse d'induction que pour tout terme Γ-clos t, $G[t/x] \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma, \models G[t/x]$. On veut $\exists x.G \in \Gamma$ si et seulement si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models \exists x.G$. On montre les deux sens de l'équivalence :

si $\exists x.G \in \Gamma$, comme par hypothèse, Γ admet des témoins de Henkin, on a $G[c/x] \in \Gamma$, pour une certaine constante c. Par hypothèse d'induction, on a alors que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models G[c/x]$, c'est-à-dire, $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma[x \mapsto c] \models G$ (cf lemme 7) ; d'où, par le fait 2.6 : $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models \exists x.G$.

si $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models \exists x.G$ alors, par le fait 2.6, on a que $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma[x \mapsto c] \models G$, c'est-à-dire (cf lemme 7), $\mathcal{M}_\Gamma, \rho_\Gamma \models G[t/x]$ pour au moins un terme Γ-clos t (puisque l'ensemble de base de $\mathcal{M}_\Gamma$ est l'ensemble des termes Γ-clos). D'où, par hypothèse d'induction : $G[t/x] \in \Gamma$. Ce qui nous donne, avec la règle $\exists i$ que $\Gamma \vdash \exists x.G$ et, par le lemme 26 : $\exists x.G \in \Gamma$.

Ainsi s'achève la démonstration de la proposition 27.

CQFD

Ensemble saturé Partant d'un ensemble quelconque de formules cohérent Γ, nous allons construire un ensemble Γ^* cohérent et complet et qui admet des témoins de Henkin.

L'idée de construction de Γ^* est la suivante : on se donne un ensemble infini dénombrable H de symboles de constantes qui n'appartiennent pas à la signature de Γ puis, *pour chaque formule* Γ*-close* F, si $\Gamma \vdash F$ alors on ajoute F à Γ^*, sinon on ajoute $\neg F$ à Γ^* ; de plus si $\Gamma \vdash F$ et $F \equiv \exists x.F'$ alors on rajoute également

$F'[c/x]$ à Γ^* où $c \in H$ est un témoin de Henkin non encore présent dans Γ^*. Il est clair, par construction, que Γ^* admet des témoins de Henkin pour chaque formule existentielle et que pour chaque formule Γ-close F , $F \in \Gamma^*$ ou $\neg F \in \Gamma^*$. Il restera à montrer que Γ^* est cohérent.

Voilà l'idée, reste à la réaliser. En particulier, il faut réaliser le ≪pour toute formule F≫ par quoi commence l'énoncé de notre idée. Pour cela, nous allons faire appel à un résultat de théorie des ensembles sur lequel nous reviendrons plus tard et qui dit que : *l'ensemble des suites finies d'éléments d'un ensemble dénombrable est dénombrable*. On a donc en particulier que les formules qui sont des suites finies de symboles sont dénombrables puisque l'on a supposé que l'ensemble des symboles est dénombrable. La propriété majeure des ensembles dénombrables est que l'on peut *énumérer* ses éléments. Puisque l'ensemble des formules est dénombrable, on a en particulier que l'ensemble des formules Γ-closes est aussi dénombrable.

On se donne donc une énumération $\{F_1, F_2, \ldots\}$ des formules Γ-closes. On se donne également un ensemble dénombrables de symboles constantes H qui n'apparaissent pas dans le langage de Γ (c'est toujours possible si la signature de ce langage et l'ensemble des symboles de variables sont dénombrables). On définit alors par induction sur n la suite Γ_n d'ensembles de formules Γ-closes :

- $\Gamma_0 = \Gamma$ (il est clair que Γ est un ensemble de formules Γ-clos) ;
- pour construire Γ_{n+1}, on considère la n-ième formule F_n de l'énumération des formules Γ-closes et on distingue les cas suivants
  1. si $\Gamma_n \vdash F_n$ et $F_n \not\equiv \exists x.F$ alors $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n, F_n$.
  2. si $\Gamma_n \vdash F_n$ et $F_n \equiv \exists x.F$ alors $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n, F_n, F_n[c/x]$ en prenant $c \in H$ n'ayant pas d'occurrence dans Γ_n (c'est possible car le nombre de symboles de H utilisé dans Γ_n est inférieur ou égal à n).
  3. si $\Gamma_n \not\vdash F_n$ alors $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n, \neg F_n$.

On pose : $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$.

Montrons donc maintenant que

<u>LEMME :</u> (28)

si Γ est cohérent alors Γ^* est cohérent.

PREUVE: en vertu du lemme de finitude 18, il suffit de montrer par induction sur n que chaque Γ_n est cohérent.

- par hypothèse, $\Gamma_0 = \Gamma$ est cohérent.
- supposons donc que Γ_n est cohérent et montrons le pour Γ_{n+1}. Par construction de la suite, Γ_{n+1} est de la forme Γ_n, F_n et $\Gamma_n \vdash F_n$ ou $\Gamma_n, F_n, F[c/x]$ et $\Gamma_n \vdash \exists x.F$ ou $\Gamma_n, \neg F_n$ et $\Gamma_n \not\vdash F_n$ avec F_n la n-ième formule Γ-close de l'énumération et, dans le deuxième cas, on a $F_n \equiv \exists x.F$. Nous allons montrer que (a) Γ_n, F_n est cohérent, puis que (b) $\Gamma_n, \neg F_n$ est cohérent et enfin, que (c) $\Gamma_n, \exists x.F, F[c/x]$ est cohérent :
  (a) est une conséquence du lemme 24.
  (b) est une conséquence du lemme 25.
  (c) on procède par l'absurde. Si $\Gamma_n, \exists x.F, F[c/x]$ n'est pas cohérent alors, par le corollaire 23, $\Gamma_n, \exists x.F \vdash \neg F[c/x]$. Mais, par construction de Γ_{n+1}, la constante c n'a pas d'occurrence ni dans Γ, ni dans $\exists x.F$. Le corollaire 20 nous donne alors que $\Gamma_n, \exists x.F \vdash \forall x.\neg F$. Et comme on a $\vdash \forall x.\neg F \to \neg\exists x.F$ par le lemme 16, on en déduit, par la règle $\to e$ que $\Gamma_n, \exists x.F \vdash \neg\exists x.F$ ce qui indique à l'évidence que $\Gamma_n, \exists x.F$ n'est pas cohérent. Or, sous l'hypothèse que Γ_n est cohérent et que $\Gamma_n \vdash \exists x.F$, le lemme 24 nous donne que $\Gamma_n, \exists x.F$ est cohérent. Nous aurions alors la contradiction que $\Gamma_n, \exists x.F$ n'est pas cohérent et $\Gamma_n, \exists x.F$ est cohérent.

CQFD

De la construction de Γ^* et du lemme ci-dessus, on déduit :

<u>PROPOSITION :</u> (29)

Pour tout ensemble cohérent de formules Γ, il existe un ensemble Γ^* tel que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, Γ^* est cohérent, complet et admet des témoins de Henkin.

Des deux propositions 27 et 29 on déduit le théorème :

<u>Théorème :</u> (30)

Tout ensemble de formules cohérent admet un modèle.

Preuve: Soit un ensemble de formules cohérent Γ. Par la proposition 29, on a Γ^* qui est cohérent, complet et qui admet de témoins de Henkin. Par la proposition 27 on a alors qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ de Γ^* et comme $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, $\mathcal{M}$ est également un modèle de Γ.

CQFD

Enfin, de ce résultat, on déduit l'énoncé du théorème de Gödel tel que nous l'avons donné :

<u>Corollaire :</u> (31)

Si $\Gamma \models F$ (avec F Γ-clos) alors $\Gamma \vdash F$.

Preuve: par contraposée, si $\Gamma \nvdash F$, par le lemme 25, $\Gamma, \neg F$ est cohérent. D'où, par le théorème ci-dessus, $\Gamma, \neg F$ admet un modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \Gamma$ et $\mathcal{M} \models \neg F$. De $\mathcal{M} \models \neg F$, on tire par le fait 2.1, que $\mathcal{M} \not\models F$. Si donc $\mathcal{M} \models \Gamma$ et $\mathcal{M} \not\models F$, c'est que $\Gamma \not\models F$.

CQFD

2 Annexe

Quelques formules universellement valides et quelques équivalences logiques.

1. Conjonction
   (a) $(F \to (G \to (F \wedge G)))$
   (b) $(H \to F) \to ((H \to G) \to (H \to F \wedge G))$
   (c) $((F \wedge G) \to C) \to ((H \to F) \to ((H \to G) \to (H \to C)))$
   (d) $(F \wedge G) \to F$
   (e) $(H \to (F \wedge G)) \to (H \to F)$
   (f) $(F \to C) \to ((F \wedge G) \to C)$
   (g) $(H \to F \wedge G) \to ((F \to C) \to (H \to C))$
   (h) $(F \wedge G) \to G$
   (i) $(H \to (F \wedge G)) \to (H \to G)$
   (j) $(G \to C) \to ((F \wedge G) \to C)$
   (k) $(H \to F \wedge G) \to ((G \to C) \to (H \to C))$

   (l) $(F \wedge F) \sim F$
   (m) $(F \wedge G) \sim (G \wedge F)$
   (n) $(F \wedge (G \wedge H)) \sim ((F \wedge G) \wedge H)$

2. Disjonction
   (a) $F \to (F \vee G)$
   (b) $(H \to F) \to (H \to (F \vee G))$
   (c) $((F \vee G) \to C) \to ((H \to F) \to (H \to C))$
   (d) $G \to (F \vee G)$
   (e) $(H \to G) \to (H \to (F \vee G))$
   (f) $((F \vee G) \to C) \to ((H \to G) \to (H \to C))$
   (g) $(F \vee G) \to ((F \to K) \to ((G \to K) \to K))$
   (h) $(H \to (F \vee G)) \to ((F \to K) \to ((G \to K) \to (H \to K))$
   (i) $(F \to K) \to ((G \to K) \to ((F \vee G) \to K))$

   (j) $(F \vee F) \sim F$
   (k) $(F \vee G) \sim (G \vee F)$
   (l) $(F \vee (G \vee H)) \sim ((F \vee G) \vee H)$

3. Conjonction et disjonction
   (a) $(F \vee (G \wedge H)) \sim ((F \vee G) \wedge (G \vee H))$
   (b) $(F \wedge (G \vee H)) \sim ((F \wedge G) \vee (G \wedge H))$
   (c) $(F \wedge (F \vee G)) \sim F$
   (d) $(F \vee (F \wedge G)) \sim F$

4. Implication
    (a) $(H \to G) \to (H \to (F \to G))$
    (b) $F \to F$
    (c) $G \to (F \to G)$
    (d) $(F \to G) \to ((G \to H) \to (F \to H))$
    (e) $(F \to G) \to (((F \to H) \to G) \to G)$
    (f) $((F \to G) \to F) \to F$

    (g) $(F \to (G \to H)) \sim (G \to (F \to H))$

5. Implication, conjonction et disjonction
    (a) $((F \to G) \wedge F) \to G$
    (b) $(F \to G) \to (F \wedge H \to G)$
    (c) $(F \to G) \to (F \to G \vee H)$

    (d) $(F \to (G \to H)) \sim ((F \wedge G) \to H)$

6. Négation
    (a) $(\neg F \to K) \to ((F \to K) \to (H \to K))$
    (b) $(H \to F) \to ((H \to \neg F) \to (H \to K))$
    (c) $(\neg F \to F) \to F$
    (d) $\neg F \to (F \to G)$
    (e) $(F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$

    (f) $\neg\neg F \sim F$

7. Négation, conjonction et disjonction
    (a) $(F \wedge G \to H) \to ((F \wedge \neg G \to H) \to H)$
    (b) $F \vee \neg F$
    (c) $(F \to G) \vee (\neg F \to G)$
    (d) $(F \to G) \vee (F \to \neg G)$
    (e) $\neg(F \wedge \neg F)$
    (f) $\neg F \to (\neg G \to (G \to F))$
    (g) $((F \to G) \wedge \neg G) \to \neg F$

    (h) $(F \to G) \sim (\neg G \to \neg F)$
    (i) $\neg(F \wedge G) \sim (\neg F \vee \neg G)$
    (j) $\neg(F \vee G) \sim (\neg F \wedge \neg G)$
    (k) $(F \to G) \sim (\neg F \vee G)$
    (l) $\neg(F \to G) \sim (\neg F \wedge \neg G)$

8. Universelle
   (a) $\forall x.\forall y.F \sim \forall y.\forall x.F$

9. Universelle, conjonction, disjonction et implication
   (a) $(\forall x.F \vee \forall x.G) \rightarrow \forall x.(F \vee G)$

   (b) $\forall x.\forall y.F \sim \forall y.\forall x.F$
   (c) $\forall x.(F \wedge G) \sim (\forall x.F \wedge \forall x.G)$
   (d) $\forall x.(F \vee G) \sim (\forall x.F \vee G)$ si x n'est pas libre dans G
   (e) $\forall x.(F \rightarrow G) \sim (F \rightarrow \forall x.G)$ si x n'est pas libre dans F

10. Existentielle
   (a) $\exists x.\exists y.F \sim \exists y.\exists x.F$

11. Existentielle, universelle, négation, conjonction, disjonction et implication
   (a) $\exists x.(F \wedge G) \rightarrow (\exists x.F \wedge \exists x.G$
   (b) $\exists x.\forall y.F \rightarrow \forall y.\exists x.F$

   (c) $\exists x.\neg F \sim \neg\forall x.F$
   (d) $\neg\exists x.F \sim \forall x.\neg F$
   (e) $\exists x.(F \vee G) \sim (\exists x.F \vee \exists x.G)$
   (f) $\exists x.(F \rightarrow G) \sim (\forall x.F \rightarrow \exists x.G)$
   (g) $\exists x.(F \wedge G) \sim (\exists x.F \wedge G)$ si x n'est pas libre dans G
   (h) $\forall x.(F \rightarrow G) \sim (\exists x.F \rightarrow G)$ si x n'est pas libre dans G

Table des matières