Master 1 Année 2012/2013

Logique pour l'Informatique Avancée

Feuille de TD n^{o} 3

Exercice 1 —

1. Montrer que si une formule F des variables $p_1, \ldots, p_n$ est une tautologie alors, la formule obtenue en remplaçant chaque p_i par $\neg p_i$ est aussi une tautologie.
2. Dualité : Soient deux formules F et G formées avec uniquement des $\vee, \wedge$ et $\neg$. Montrer que si $F \sim G$ alors, on peut permuter les $\wedge$ et $\vee$ et on obtient encore deux formules équivalentes.

Exercice 2 — Quel est le nombre maximum de formules non équivalentes qu'on peut former avec n variables $p_1, \ldots, p_n$ distinctes ?

Exercice 3 —

1. Soit la formule $F = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$. F ou $\neg F$ sont-elles satisfaisables ? L'une d'elle est-elle une tautologie ?
2. Trouver une formule G telle que $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ soit une tautologie.
3. Soit F_1 la formule obtenue en substituant $\neg p$ à p dans F. F_1 est-elle une conséquence de F ? F est-elle une conséquence de F_1 ?

Exercice 4 — Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux ensembles de formules. On dit que $\mathcal{F} \models \mathcal{G}$ si et seulement si pour toute interprétation I, on a

$$I(F) = vrai \text{ pour toute } F \in \mathcal{F}$$

implique que

$$I(G) = vrai \text{ pour toute } G \in \mathcal{G}.$$

Montrer que $(\mathcal{F} \models \mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}' \models \mathcal{F}'')$ implique que $\mathcal{F} \models \mathcal{F}''$.

Exercice 5 — Soit $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \times\}$ où $+$ et $\times$ sont des symboles de fonction binaire. Soient $\mathcal{M}_1 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_2 =$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{M}_3 = \mathbb{Z}[i] = \{n + im \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, où les symboles de $\mathcal{L}$ sont interprétés de la manière usuelle. Ecrire une formule F telle que :

1. $\mathcal{M}_1 \models F, \mathcal{M}_2 \not\models F$ et $\mathcal{M}_3 \not\models F$
2. $\mathcal{M}_1 \not\models F, \mathcal{M}_2 \models F$ et $\mathcal{M}_3 \not\models F$
3. $\mathcal{M}_1 \not\models F, \mathcal{M}_2 \not\models F$ et $\mathcal{M}_3 \models F$

Exercice 6 — Soient x, y, z, u, v des variables. Les formules suivantes sont-elles des tautologies ?

1. $(x \to \neg x) \leftrightarrow \neg x$
2. $x \to ((x \to y) \to y)$
3. $x \to ((y \to z) \to ((x \to y) \to (x \to z)))$
4. $(x \wedge y \to z) \to ((x \vee z \to x) \to (y \to x))$
5. $((x \vee y) \wedge (x \to u) \wedge (y \to v) \wedge \neg(u \to v)) \to ((u \to x) \wedge (v \to y))$

Exercice 7 — Soient les formules F, G et H suivantes : $p \vee q \vee r, p \wedge q \wedge \neg r$ et $(p \wedge \neg q) \vee r$.

1. Déterminer tous les couples de formules de F, G, H tels que l'une soit conséquence de l'autre.
2. $F \vee H$ est-elle une conséquence de $F \vee \neg H$?

Exercice 8 — Donner une démonstration sémantique puis une démonstration en déduction naturelle des tautologies suivantes :

1. $(F \wedge G) \to G$
2. $\neg F \to (F \to G)$

Exercice 9 —

1. Montrer que si le séquent $F_1 \vdash F_2$ est prouvable, alors on peut utiliser la règle R suivante :

$$\frac{\mathcal{F} \vdash F_1}{\mathcal{F} \vdash F_2}\, R$$

   pour prouver des séquents.
2. Prouver le séquent $A \vee B \vdash \neg A \to B$. En utilisant la question précédente, quelle règle vient d'être démontrée ?
3. Prouver le séquent $\vdash (\forall x, A(x) \vee \forall x, B(x)) \to \forall x, (A(x) \vee B(x))$.