Master 1 Année 2012/2013

Logique pour l'Informatique Avancée

Feuille de TD n° 1

Nous allons dans ce premier TD apprendre à utiliser le langage et le formalisme de la logique du premier ordre (calcul des prédicats) afin d'être à l'aise en manipulant les notions vues en cours.

Exercice 1 — Soient a et b des symboles de constante, f (resp. R) un symbole de fonction (resp. de relation) unaire et g (resp. S) un symbole de fonction (resp. de relation) binaire. Les expressions suivantes sont-elles des termes ? Des formules ? Si oui, quelle en est la taille ?

1. $g(a, f(b))$
2. $f(g(f(x), g(a, f(y))))$
3. $g(R(a), b)$
4. $S(f(a), g(x, R(y)))$
5. $(\forall x, g(x, x) = b) \wedge (\exists x, f(x) = b)$
6. $\forall x \exists y, (S(x, a) \wedge R(b) \Rightarrow S(f(b), y))$
7. $\forall x, (S(a, f(x)) \vee \exists y, f(y))$
8. $R(a, f(x)) \Rightarrow S(a, \exists y, g(y, b) = a)$

Exercice 2 — Déterminer les variables libres et les variables liées dans chacune des formules suivantes :

- $A : p(f(x, y)) \vee \forall z, r(a, z)$
- $B : \forall x, p(x, y, z) \vee \forall z, (p(z) \Rightarrow r(z))$
- $C : \forall x, \exists y, (p(x, y) \Rightarrow \forall z, r(x, y, z))$
- $D : \forall z, \exists y, (P(x, y) \wedge (\forall z, Q(z, x)) \Rightarrow R(z))$
- $E : \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^n \int_0^{\infty} e^{-t} x^{2n} t^{2n} \mathrm{d}\, t = \frac{1}{1 + \alpha x^2}$

Quelles sont les formules closes parmi les précédentes ?

Exercice 3 — Renommer les formules suivantes de telle sorte à lever les ambiguïtés éventuelles :

- $A : \forall x, (P(x) \wedge (\exists x, Q(x, z)) \Rightarrow \exists y, R(x, y)) \vee Q(z, x)$
- $B : \forall y, (P(y) \wedge (\exists x, Q(x, z)) \Rightarrow \exists z, R(y, z)) \vee Q(z, x)$
- $C : \forall x, (P(x) \wedge (\exists x, Q(x, z)) \Rightarrow \exists x, R(x, x)) \vee Q(z, y)$
- $D : \forall z, (P(z) \wedge (\exists x, Q(x, z)) \Rightarrow \exists y, R(z, y)) \vee Q(z, x)$
- $E : \forall x, (P(x) \wedge (\exists x, Q(x, z) \Rightarrow \exists y, R(x, y))) \vee Q(z, y)$

Certaines de ces formules sont-elles équivalentes ?

Exercice 4 — Pour chacune des formules suivantes, renommer les variables libres et liées qui ont le même nom ainsi que les variables liées différentes portant le même nom.

- $A : \forall x, \exists y, (R(x, y) \wedge S(z, y)) \Rightarrow \exists x, (\forall y, R(x, y) \vee S(x, z))$
- $B : \forall x, (R(x, y) \Rightarrow \exists x, \forall y, S(y, x)) \vee \exists z, (S(z, x) \Rightarrow \exists y, \forall x, R(x, y))$
- $C : \forall x, \forall y, (R(f(x), a)$
  $\Rightarrow R(g(a, f(y)), x) \vee ((\exists z, \forall x, \exists y, R(z, f(x)) \wedge R(z, y)) \wedge \exists x, \forall z, R(g(y, z), f(x))))$

Exercice 5 — Soient les deux formules $F = (\exists y, R(x,y)) \Rightarrow \forall x, \forall z, (R(x,z) \vee R(y,z))$ et $G = (\exists x, R(x,y)) \wedge \forall y, \forall z, (R(x,z) \vee R(y,z))$.

1. Peut-on substituer, sans effectuer de renommage, $f(x,y)$ à x dans F ? Si oui, quelle formule obtient-on ?
2. Peut-on substituer, sans effectuer de renommage, $g(x,z)$ à y dans F ? Si oui, quelle formule obtient-on ?
3. Peut-on substituer, sans effectuer de renommage, $f(x,z)$ à x dans F ? Si oui, quelle formule obtient-on ?

Exercice 6 — Donner la proposition contraposée, puis la proposition absurde des propositions suivantes. Notez qu'on ne demande pas ici de prouver les énoncés proposés.

1. S'il pleut, alors il y a des nuages.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si a^2 n'est pas un multiple de 16, alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.
3. L'équation $2x^7 - 4x^5 + 2x - 3 = 0$ n'a pas de solutions entières.

Exercice 7 — Prouver les énoncés suivants. Attention : on vous donne ici la preuve en question, on vous demande seulement de l'écrire proprement mathématiquement. Le but de l'exercice n'est pas de vous faire trouver la preuve, mai seulement de l'écrire correctement !

1. Prouver par récurrence que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer par récurrence forte que $u_n = 2^{n-1}$ pour $n > 0$. On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$.
3. Montrer par l'absurde qu'il y a une infinité de nombre premiers. L'idée de preuve est la suivante : si n est un entier, alors $n!+1$ est un entier strictement plus grand que n et qui n'est divisible par aucun des entiers $2, \cdots, n$. On utilisera également la décomposition en facteurs premiers de tout entier.
4. Soient A et B deux ensembles, et f une fonction. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. On pourra pour cela considérer un élément y bien choisi.
5. Soient A et B deux ensembles. Montrer *par l'absurde* que $A \cup B = A \cap B \Longrightarrow A = B$. On pourra considérer un élément $x \in B \setminus A$.

Exercice 8 — Traduire dans le langage du calcul des prédicats du premier ordre (sans égalité) les énoncés suivants :

1. La définition de l'union de deux ensembles : $A = B \cup C \Longleftrightarrow \forall e \in A, e \in B \vee e \in C$
2. Tous les hommes sont mortels, et Socrate est un homme ; donc Socrate est mortel.
3. Le dernier théorème de Fermat : il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que $x^m + y^m = z^m$ dès que m est un entier strictement supérieur à 2.
   Indication : On pourra partir de la formule suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}, (m > 2 \Rightarrow (\neg\exists (x,y,z) \in \mathbb{N}^{*3}, x^m + y^m = z^m))$$