Master 1 Informatique Année 2010/2011

**Logique pour l'Informatique Avancée**
**MI067 STL**
**Janvier 2011**

# Seconde session

---

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

**Exercice I :** *Fonctions propositionnelles*

**Question (I.1)** Donnez une formule du calcul des propositions $P$ qui dépend de deux formules quelconques $F$ et $G$ (on note $P[F, G]$) et qui vérifie la table de vérité suivante :

| $F$ | $G$ | $P[F, G]$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\bot$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |

Réponses

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

Il s'agissait du «ou exclusif». Toute formule logiquement équivalente est acceptée.

**Question (I.2)** Donnez une formule du calcul des propositions $Q$ qui dépend de trois formules quelconques $F$, $G$ et $H$ (on note $Q[F, G, H]$) et qui vérifie la table de vérité suivante :

| $F$ | $G$ | $H$ | $Q[F, G, H]$ |
|---|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\bot$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |

Réponses

Chaque fois que $F$ est vrai, on prend la valeur de $G$ et chaque fois que $F$ est faux, on prend la valeur de $H$ :

$$(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge H)$$

**Exercice II :** *Lapins et carottes*

Hypothèse : *« les lapins aiment les carottes »*

Conclusion : *« les lapins qui n'aiment pas les carottes ne sont pas des lapins »*

On formalise l'hypothèse par la proposition $L \to C$ ; et on formalise la conclusion par la proposition $(L \wedge \neg C) \to \neg L$.

**Question (II.1)** Peut-on déduire la conclusion de l'hypothèse (c'est-à-dire : *« si les lapins aiment les carottes alors les lapins qui n'aiment pas les carottes ne sont pas des lapins »*) ?

Réponses

Trouver la réponse à cette question, c'est décider si (a) $L \to C \models (L \wedge \neg C) \to \neg L$, ou, de manière équivalente, par le théorème de complétude, si (b) $L \to C \vdash (L \wedge \neg C) \to \neg L$ ; ou encore, vérifier que l'implication $(L \to C) \to ((L \wedge \neg C) \to \neg L)$ est une tautologie.

(a) Si $L \to C$ est vraie alors

- ou bien $L$ est faux ; alors $(L \wedge \neg C)$ est également fausse et l'implication $(L \wedge \neg C) \to \neg L$ est vraie ;
- ou $L$ et $C$ sont vrais ; alors, $\neg C$ est fausse, donc $(L \wedge \neg C)$ est également fausse et donc, l'implication $(L \wedge \neg C) \to \neg L$ est encore vraie.

Dans tous les cas, si $L \to C$ alors $(L \wedge \neg C) \to \neg L$ est vraie, donc $L \to C \models (L \wedge \neg C) \to \neg L$ est une déduction valide.

(b)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$Ax$}
\UnaryInfC{$L \to C \vdash L \to C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$Ax$}
\UnaryInfC{$L \vdash L$}
\RightLabel{$\to e$}
\BinaryInfC{$L \to C, L \vdash C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$Ax$}
\UnaryInfC{$L \wedge \neg C \vdash L \wedge \neg C$}
\RightLabel{$\wedge e2$}
\UnaryInfC{$L \wedge \neg C \vdash \neg C$}
\RightLabel{$\neg e$}
\BinaryInfC{$L \to C, L \wedge \neg C, L \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg i$}
\UnaryInfC{$L \to C, L \wedge \neg C \vdash \neg L$}
\RightLabel{$\to i$}
\UnaryInfC{$L \to C \vdash (L \wedge \neg C) \to \neg L$}
\end{prooftree}
$$

(c) Par la méthode des tables de vérité :

| $L$ | $C$ | $L \to C$ | $\neg C$ | $L \wedge \neg C$ | $\neg L$ | $(L \wedge \neg C) \to \neg L$ | $(L \to C) \to ((L \wedge \neg C) \to \neg L)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

**Question (II.2)** L'inverse est-il vrai (c'est-à-dire *« si les lapins qui n'aiment pas les carottes ne sont pas des lapins alors les lapins aiment les carottes »)* ?

Réponses

Oui, en fait, on peut voir sur la table de vérité ci-dessus que les deux propositions $L \to C$ et $(L \wedge \neg C) \to \neg L$ sont logiquement équivalentes. On peut également le vérifier en utilisant la suite d'équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl}(L \wedge \neg C) \to \neg L & \sim & \neg(L \wedge \neg C) \vee \neg L \\ & \sim & \neg L \vee \neg\neg C \vee \neg L \\ & \sim & \neg L \vee C \vee \neg L \\ & \sim & \neg L \vee C \\ & \sim & L \to C\end{array}$$

---

**Exercice III :** *Renards, lapins et carottes*

Hypothèse 1 : *« les renards aiment les lapins »*

Hypothèse 2 : *« les lapins aiment les carottes »*

Conclusion : *« les renards aiment les carottes »*

On formalise l'hypothèse 1 par la formule $\forall x \forall y.((R(x) \wedge L(y)) \to A(x,y))$, l'hypothèse 2 par la formule $\forall x \forall y.((L(x) \wedge C(y)) \to A(x,y))$, et la conclusion par la formule $\forall x \forall y.((R(x) \wedge C(y)) \to A(x,y))$.

**Question (III.1)** La conclusion est-elle vraiment une conséquence des hypothèses (justifiez) ?

---

Réponses

---

Non : on construit un contre modèle à 3 éléments $\rho$, $\lambda$ et $\gamma$ tels que $R(\rho)$, $L(\lambda)$ et $C(\gamma)$, ainsi que $A(\rho,\lambda)$ et $A(\lambda,\gamma)$.

On satisfait ainsi les hypothèses 1 et 2, mais pas la conclusion (on n'a pas $A(\rho,\gamma)$).

---

**Question (III.2)** Quelle hypothèse pourrait-on rajouter sur la relation $A$ pour que la conséquence devienne valide ?

---

Réponses

---

Il faut ajouter que la relation $A$ est transitive :

$$\forall x.\forall y.\forall z.(A(x,y) \wedge A(y,z) \to A(x,z))$$

---

**Exercice IV :** *Satisfaisabilité et conséquence sémantique*

**Question (IV.1)** Montrez que si $\mathcal{M}, \rho \models F \to G$ et si $\mathcal{M}, \rho \models \neg G$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \neg F$.
*Utilisez la définition de* $\models$.

---

Réponses

---

Par définition de $\models$, il faut montrer que si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F \to G)_\rho = \top$ et $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg G)_\rho = \top$ alors $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg F)_\rho = \top$.

D'une part, si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg G)_\rho = \top$ alors (a) $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_\rho = \bot$

D'autre part, si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F \to G)_\rho = \top$, alors ou bien (b) $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \bot$, ou bien (c) $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_\rho = \top$

Comme par, (a) $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_\rho = \bot$, on ne peut avoir $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_\rho = \top$, c'est-à-dire (c) $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_\rho = \top$. Il faut donc que (b) $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \bot$, c'est-à-dire $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\neg F)_\rho = \top$. Ce qu'il fallait démontrer.

---

**Question (IV.2)** Soit l'ensemble d'hypothèses :

$$\Gamma = \{\forall x.(P(x) \to R(x)); \forall x.(\neg R(x) \to Q(x)); \exists x.(P(x) \vee \neg Q(x))\}.$$

Montrez que $\Gamma \models \exists x.R(x)$ (c'est-à-dire, pour tout $\mathcal{M}, \rho$, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.R(x)$).

Réponses

On utilisera les résultats des faits (5) et (6) du cours.

Soit $M$ l'ensemble de base de $\mathcal{M}$. Pour montrer $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.R(x)$, il faut montrer qu'il existe un $a \in M$ tel que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto a] \models R(x)$.

Si, par hypothèse $\exists x.(P(x) \vee \neg Q(x))$, il existe $\alpha \in M$ tel que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models P(x) \vee \neg Q(x)$, c'est-à-dire, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models P(x)$ ou $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models \neg Q(x)$. On raisonne par cas :

1. Si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models P(x)$. Si par hypothèse, $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.(P(x) \rightarrow R(x))$, pour tout $a \in M$ $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto a] \models P(x) \rightarrow R(x)$, donc, en particulier, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto a] \models P(x) \rightarrow R(x)$ ; et comme, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models P(x)$, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models R(x)$.
2. Si $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models \neg R(x)$. Si, par hypothèse, $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.(\neg R(x) \rightarrow Q(x))$, alors pour tout $a \in M$, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto a] \models \neg R(x) \rightarrow Q(x)$, donc, en particulier, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models \neg R(x) \rightarrow Q(x)$. Comme, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models \neg R(x)$, par le résultat de la question précédente, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models \neg\neg R(x)$ ; c'est-à-dire $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \not\models \neg R(x)$ ; c'est-à-dire $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto \alpha] \models R(x)$.

Dans les deux cas, en prenant $a = \alpha$, on a un $a \in M$ tel que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto a] \models R(x)$. Ce qu'il fallait démontrer.

**<u>Exercice V :</u>** *Déduction naturelle : propositions*

**Question (V.1)** Donnez une preuve en déduction naturelle de $\vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$

Réponses

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$Ax$}
\UnaryInfC{$\neg F \rightarrow F \vdash \neg F \rightarrow F$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$Ax$}
\UnaryInfC{$\neg F \vdash \neg F$}
\RightLabel{$\rightarrow e$}
\BinaryInfC{$\neg F \rightarrow F, \neg F \vdash F$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$Ax$}
\UnaryInfC{$\neg F \vdash \neg F$}
\RightLabel{$\neg e$}
\BinaryInfC{$\neg F \rightarrow F, \neg F \vdash \bot$}
\RightLabel{$Abs$}
\UnaryInfC{$\neg F \rightarrow F \vdash F$}
\RightLabel{$\rightarrow i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$}
\end{prooftree}
$$

**Question (V.2)** On veut trouver une preuve de la formule $(F \rightarrow G) \vee (\neg F \rightarrow G)$.

1. Donnez une preuve en déduction naturelle du séquent $F, \neg F \vdash G$.
2. On a montré en cours une preuve de $\vdash F \vee \neg F$. En utilisant ce fait, et la question précédente, donnez une preuve en déduction naturelle de $\vdash (F \rightarrow G) \vee (\neg F \rightarrow G)$.

Réponses

1.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$Ax$}
\UnaryInfC{$\neg F \vdash \neg F$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$Ax$}
\UnaryInfC{$F \vdash F$}
\RightLabel{$\neg e$}
\BinaryInfC{$F, \neg F, \neg G \vdash \bot$}
\RightLabel{$Abs$}
\UnaryInfC{$F, \neg F \vdash G$}
\end{prooftree}
$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{(cours)}{\vdash F \lor \neg F} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(ci-dessus)}{F, \neg F \vdash G}}{F \vdash \neg F \to G}\,{\scriptstyle \to i}}{F \vdash (F \to G) \lor (\neg F \to G)}\,{\scriptstyle \lor i2} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(ci-dessus)}{\neg F, F \vdash G}}{\neg F \vdash F \to G}\,{\scriptstyle \to i}}{\neg F \vdash (F \to G) \lor (\neg F \to G)}\,{\scriptstyle \lor i1}}{\vdash (F \to G) \lor (\neg F \to G)}\,{\scriptstyle \lor e}$$

---

**Exercice VI :** *Déduction naturelle : quantificateurs*

**Question (VI.1)** Donnez une preuve en déduction naturelle des formules suivantes :

1. $(\forall x.F(x) \land \forall y.G(y)) \to \forall z.(F(z) \land G(z))$
2. $(\exists x.(F(x) \to G(x))) \to (\forall x.F(x) \to \exists x.G(x))$

---

Réponses

---

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.F(x) \land \forall y.G(y) \vdash \forall x.F(x) \land \forall y.G(y)}\,{\scriptstyle Ax}}{\forall x.F(x) \land \forall y.G(y) \vdash \forall x.F(x)}\,{\scriptstyle \land e1}}{\forall x.F(x) \land \forall y.G(y) \vdash F(z)}\,{\scriptstyle \forall e} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.F(x) \land \forall y.G(y) \vdash \forall x.F(x) \land \forall y.G(y)}\,{\scriptstyle Ax}}{\forall x.F(x) \land \forall y.G(y) \vdash \forall y.G(y)}\,{\scriptstyle \land e2}}{\forall x.F(x) \land \forall y.G(y) \vdash G(z)}\,{\scriptstyle \forall e}}{\forall x.F(x) \land \forall y.G(y) \vdash F(z) \land G(z)}\,{\scriptstyle \land i}}{\forall x.F(x) \land \forall y.G(y) \vdash \forall z.(F(z) \land G(z))}\,{\scriptstyle \forall i}}{\vdash (\forall x.F(x) \land \forall y.G(y)) \to \forall z.(F(z) \land G(z))}\,{\scriptstyle \to i}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x.(F(x) \to G(x)) \vdash \exists x.(F(x) \to G(x))}\,{\scriptstyle Ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{F(y) \to G(y) \vdash F(y) \to G(y)}\,{\scriptstyle Ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{\forall x.F(x) \vdash \forall x.F(x)}\,{\scriptstyle Ax}}{\forall x.F(x) \vdash F(y)}\,{\scriptstyle \forall e}}{F(y) \to G(y), \forall x.F(x) \vdash G(y)}\,{\scriptstyle \to e}}{\exists x.(F(x) \to G(x)), \forall x.F(x) \vdash G(y)}\,{\scriptstyle \exists e}}{\exists x.(F(x) \to G(x)), \forall x.F(x) \vdash \exists x.G(x)}\,{\scriptstyle \exists i}}{\vdash (\exists x.(F(x) \to G(x))) \to (\forall x.F(x) \to \exists x.G(x))}\,{\scriptstyle \to i (\times 2)}$$

---

**Exercice VII :** *Système T*

On note $1$ pour $\mathsf{S}0$. Donnez la définition d'un terme $lt$ du système T tel que

$$\begin{array}{lcl} (lt\ \mathsf{0}\ t) & \overset{*}{\hookrightarrow} & 1 \\ (lt\ \mathsf{S}t\ \mathsf{0}) & \overset{*}{\hookrightarrow} & \mathsf{0} \\ (lt\ \mathsf{S}t_1\ \mathsf{S}t_2) & \overset{*}{\hookrightarrow} & (lt\ t_1\ t_2) \end{array}$$

## Réponses

$$\lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))$$

On ne le demandait pas, mais voici les étapes de réduction qui montrent que le terme satisfait les résultats attendus ainsi que sa dérivation de typage.

$(\lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ \mathsf{0}\ y)$
$\hookrightarrow ((\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ y)$
$\hookrightarrow (\lambda y.\mathsf{1}\ y)$
$\hookrightarrow \mathsf{1}$

$(\lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ (\mathsf{S}x)\ \mathsf{0})$
$\hookrightarrow ((\mathsf{rec}\ (\mathsf{S}x)\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ \mathsf{0})$
$\hookrightarrow ((\lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y'))\ x\ (\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y'))))\ \mathsf{0})$
$\hookrightarrow (\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.((\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ y'))$
$\hookrightarrow \mathsf{0}$

$(\lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ (\mathsf{S}x)\ (\mathsf{S}y))$
$\hookrightarrow ((\mathsf{rec}\ (\mathsf{S}x)\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ (\mathsf{S}y))$
$\hookrightarrow (\mathsf{rec}\ (\mathsf{S}y)\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.((\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ y'))$
$\hookrightarrow (\lambda y'.\lambda h_2.((\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ y')\ y\ (\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.((\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{r}$
$\hookrightarrow ((\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ y)$
$\hookleftarrow (\lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')))\ x\ y)$

$$\dfrac{\dfrac{}{x : N \vdash x : N} \quad \dfrac{y : N \vdash \mathsf{1} : N}{\vdash \lambda y.\mathsf{1} : N \to N} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y : N \vdash y : N} \quad \dfrac{}{\vdash \mathsf{0} : N} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{h_1 : N \to N \vdash h_1 : N \to N} \quad \dfrac{}{y' : N \vdash y' : N}}{h_1 : N \to N, y' : N, h_2 : N \vdash (h_1\ y') : N}}{h_1 : N \to N \vdash \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y') : N \to N \to N}}{x' : N, h_1 : N \to N, y : N \vdash (\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')) : N}}{\vdash \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y')) : N \to (N \to N) \to (N \to N)}}{\dfrac{x : N \vdash (\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y'))) : N \to B}{\vdash \lambda x.(\mathsf{rec}\ x\ \lambda y.\mathsf{1}\ \lambda x'.\lambda h_1.\lambda y.(\mathsf{rec}\ y\ \mathsf{0}\ \lambda y'.\lambda h_2.(h_1\ y'))) : N \to N \to N}}$$