Master 1 Informatique Année 2010/2011

UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

Logique pour l'Informatique Avancée
MI067 STL
Novembre 2010

Devoir sur table n° 1

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

Exercice I : *Mise en jambe*

Question (I.1) Démontrez

1. $(F \wedge \neg G) \to H; \neg H; F \models G$
2. $(F \wedge \neg G) \to H; \neg H; F \vdash G$

Réponses

1\. Soit à montrer $(F \wedge \neg G) \to H; \neg H; F \models G$, c'est-à-dire : pour tout modèle $\mathcal{M}$ et environnement ρ, si pour toute formule $A \in \{(F \wedge \neg G) \to H; \neg H; F\}$, $\mathcal{M}, \rho \models A$ alors $\mathcal{M}, \rho \models G$; c'est-à-dire : si $\mathcal{M}, \rho \models (F \wedge \neg G) \to H$, si $\mathcal{M}, \rho \models \neg H$ et si $\mathcal{M}, \rho \models F$ alors $\mathcal{M}, \rho \models G$.

Le raisonnement le plus court est ici le raisonnement par l'absurde : supposons donc $\mathcal{M}, \rho \models (F \wedge \neg G) \to H$ et $\mathcal{M}, \rho \models \neg H$ et $\mathcal{M}, \rho \models F$ et $\mathcal{M}, \rho \not\models G$ et cherchons une contradiction : si $\mathcal{M}, \rho \not\models G$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \neg G$; si $\mathcal{M}, \rho \models F$ et $\mathcal{M}, \rho \models \neg G$ alors $\mathcal{M}, \rho \models (F \wedge \neg G)$; et si $\mathcal{M}, \rho \models (F \wedge \neg G) \to H$ et $\mathcal{M}, \rho \models (F \wedge \neg G)$ alors $\mathcal{M}, \rho \models H$, ce qui contredit $\mathcal{M}, \rho \models \neg H$.

On peut également raisonner de la manière suivante : si $\mathcal{M}, \rho \models \neg H$ alors $\mathcal{M}, \rho \not\models H$; si $\mathcal{M}, \rho \not\models H$, pour que $\mathcal{M}, \rho \models (F \wedge \neg G) \to H$, il faut nécessairement que $\mathcal{M}, \rho \not\models (F \wedge \neg G)$; mais comme $\mathcal{M}, \rho \models F$, pour que $\mathcal{M}, \rho \not\models (F \wedge \neg G)$, il faut nécessairement que $\mathcal{M}, \rho \not\models \neg G$, c'est-à-dire $\mathcal{M}, \rho \models G$.

2\. une preuve en déduction naturelle peut suivre le schèma proposé avec le raisonnement par l'absurde. Posons $\Gamma = \{(F \wedge \neg G) \to H; \neg H; F\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma; \neg G \vdash (F \wedge \neg G) \to H}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma; \neg G \vdash \neg G}\,Ax \quad \dfrac{}{\Gamma; \neg G \vdash F}\,Ax}{\Gamma; \neg G \vdash (F \wedge \neg G)}\,\wedge i}{\Gamma; \neg G \vdash H}\,\to e \qquad \dfrac{}{\Gamma; \neg G \vdash \neg H}\,Ax}{\Gamma; \neg G \vdash \bot}\,\neg e}{\Gamma \vdash G}\,Abs$$

Exercice II : *Équivalences logiques*

On peut définir l'équivalence entre deux formules F et G — que l'on note $F \sim G$ — de trois façons différentes, mais équivalentes :

D1 en utilisant la fonction d'interprétation, $F \sim G$ si et seulement si :

$$\text{pour tout modèle } \mathcal{M} \text{ et tout environnement } \rho,\ \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_\rho$$

D2 en utilisant la relation de satisfaction d'une formule dans une modèle, $F \sim G$ si et seulement si :

$$\text{pour tout modèle } \mathcal{M} \text{ et tout environnement } \rho,\ \mathcal{M}, \rho \models F \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho \models G$$

D3 en utilisant la déduction naturelle, $F \sim G$ si et seulement si :

$$\text{les séquents } \vdash F \to G \text{ et } \vdash G \to F \text{ sont dérivables}$$

Question (II.1) On va montrer les lois de De Morgan en utilisant la définition D1 de l'équivalence.

Comme ici $\mathcal{M}$ et ρ n'interviennent pas, on notera simplement $\mathcal{I}$ la fonction d'interprétation.

1. Montrez que $\mathcal{I}(\neg F \vee \neg G) = \bot$ si et seulement si $\mathcal{I}(\neg(F \wedge G)) = \bot$.
2. En déduire, *en utilisant la remarque ci-dessous*, que $\mathcal{I}(\neg F \vee \neg G) = \mathcal{I}(\neg(F \wedge G))$.
3. Montrez que $\mathcal{I}(\neg F \wedge \neg G) = \top$ si et seulement si $\mathcal{I}(\neg(F \vee G)) = \top$.
4. En déduire, *en utilisant la même remarque*, que $\mathcal{I}(\neg F \wedge \neg G) = \mathcal{I}(\neg(F \vee G))$.

Remarque : On a $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \top$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho \neq \bot$, et par contraposition, $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \bot$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho \neq \top$.

Réponse

---

1. en utilisant la défintion de $\mathcal{I}$, on a

$$\begin{array}{lll} \mathcal{I}(\neg F \vee \neg G) = \bot & \text{si et seulement si} & \mathcal{I}(\neg F) = \mathcal{I}(\neg G) = \bot \\ & \text{si et seulement si} & \mathcal{I}(F) = \mathcal{I}(G) = \top \\ & \text{si et seulement si} & \mathcal{I}(F \wedge G) = \top \\ & \text{si et seulement si} & \mathcal{I}(\neg(F \wedge G)) = \bot \end{array}$$

2. Du résultat ci-dessus, on tire par contraposition que $\mathcal{I}(\neg F \vee \neg G) \neq \bot$ si et seulement si $\mathcal{I}(\neg(F \wedge G)) \neq \bot$; c'est-à-dire, en tenant compte de la remarque proposée ; $\mathcal{I}(\neg F \vee \neg G) = \top$ si et seulement si $\mathcal{I}(\neg(F \wedge G)) = \top$.

Dans les deux cas possibles de valeur de vérité, on a donc bien $\mathcal{I}(\neg F \vee \neg G) = \mathcal{I}(\neg(F \wedge G))$.

3. En utilisant la définition de $\mathcal{I}$, on a

$$\begin{array}{lll} \mathcal{I}(\neg F \wedge \neg G) = \top & \text{si et seulement si} & \mathcal{I}(\neg F) = \mathcal{I}(\neg G) = \top \\ & \text{si et seulement si} & \mathcal{I}(F) = \mathcal{I}(G) = \bot \\ & \text{si et seulement si} & \mathcal{I}(F \vee G) = \bot \\ & \text{si et seulement si} & \mathcal{I}(\neg(F \vee G)) = \top \end{array}$$

4. L'égalité $\mathcal{I}(\neg F \wedge \neg G) = \mathcal{I}(\neg F \wedge \neg G) = \mathcal{I}(\neg(F \vee G))$ s'obtient de mainère analogue à ce qui a été fait en 2.

Question (II.2) On va montrer les équivalences $\neg(\forall x.F) \sim \exists x.(\neg F)$ et $\neg(\exists x.F) \sim \forall x.(\neg F)$ en utilisant la définition D2.

On a déjà vu en cours que $\forall x.(\neg F)$ implique $\neg(\exists x.F)$ et que $\exists x.(\neg F)$ implique $\neg(\forall x.F)$. Reste à dériver les deux autres implications.

Montrez que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et environnement ρ :

1. Si $\mathcal{M}, \rho \models \neg(\exists x.F)$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.(\neg F)$.
2. Si $\mathcal{M}, \rho \models \neg(\forall x.F)$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.(\neg F)$.

Vous pouvez utiliser les résultats du fait (5) vu en cours.

Réponses

---

1. Si $\mathcal{M}, \rho \models \neg(\exists x.F)$ alors

– $\mathcal{M}, \rho \not\models \exists x.F$;

– c'est-à-dire qu'il n'existe aucun $m \in M$ tel que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F$;
– c'est-à-dire que pour tout $m \in M$, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \not\models F$;
– c'est-à-dire que pour tout $m \in M$, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models \neg F$;
– c'est-à-dire que $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.\neg F$.

2. Si $\mathcal{M}, \rho \models \neg(\forall x.F)$ alors
– $\mathcal{M}, \rho \not\models \forall x.F$;
– c'est-à-dire que l'on a pas que pour tout $m \in M$, $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models F$;
– c'est-à-dire qu'il existe au moins un $m \in M$ tel que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \not\models F$;
– c'est-à-dire qu'il existe $m \in M$ tel que $\mathcal{M}, \rho[x \mapsto m] \models \neg F$;
– et donc $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.(\neg F)$.

Question (II.3) En utilisant la définition D3, on va montrer que $F \to G \sim \neg F \vee G$. C'est à dire que $\vdash (F \to G) \to (\neg F \vee G)$ et $\vdash (\neg F \vee G) \to (F \to G)$ sont dérivables en déduction naturelle.

1. Pour montrer que $\vdash (F \to G) \to (\neg F \vee G)$, il suffit de montrer $F \to G \vdash \neg F \vee G$ (règle $\to_i$). On peut alors raisonner informellement de la manière suivante :
   – si F est vraie alors, de $F \to G$ on déduit G et donc $\neg F \vee G$;
   – sinon, on a $\neg F$ vraie et alors on a directement $\neg F \vee G$.
   En utilisant (sans le redémontrer) que $\vdash F \vee \neg F$, formalisez le raisonnement utilisé ci-dessus par une dérivation en déduction naturelle du séquent $F \to G \vdash \neg F \vee G$.
2. Donnez une dérivation en déduction naturelle de $\vdash (\neg F \vee G) \to (F \to G)$.

Réponse

---

1. voici la déduction demandée

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{(admis)}{\vdash F \vee \neg F}}{F \to G \vdash F \vee \neg F}\,{\scriptstyle Aff}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \to G; F \vdash F \to G}\,{\scriptstyle Ax} \quad \dfrac{}{F \to G; F \vdash F}\,{\scriptstyle Ax}}{F \to G; F \vdash G}\,{\scriptstyle \to e}}{F \to G; F \vdash \neg F \vee G}\,{\scriptstyle \vee i2}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{F \to G; \neg F \vdash \neg F}\,{\scriptstyle Ax}}{F \to G; \neg F \vdash \neg F \vee G}\,{\scriptstyle \vee i1}
}{F \to G \vdash \neg F \vee G}\,{\scriptstyle \vee e}
$$

2.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{
\dfrac{}{\neg F \vee G; F \vdash \neg F \vee G}\,{\scriptstyle Ax}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{\neg F \vee G; F; \neg F \vdash \neg F}\,{\scriptstyle Ax} \quad \dfrac{}{\neg F \vee G; F; \neg F \vdash F}\,{\scriptstyle Ax}}{\neg F \vee G; F; \neg F \vdash G}\,{\scriptstyle \neg e}
\qquad
\dfrac{}{\neg F \vee G; F; G \vdash G}\,{\scriptstyle Ax}
}{\neg F \vee G; F \vdash G}\,{\scriptstyle \vee e}}{\neg F \vee G \vdash F \to G}\,{\scriptstyle \to i}}{\vdash (\neg F \vee G) \to (F \to G)}\,{\scriptstyle \to i}
$$

Exercice III : *Ensemble suffisant de connecteurs*

On peut n'utiliser que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$ et le quantificateur $\forall$ pour exprimer, par équivalence, toutes les formules. On dira qu'*une formule est une* $\mathcal{CNT}$ lorsqu'elle n'est écrite qu'avec ces trois symboles logiques.

> THÉORÈME : Pour toute formule F du calcul des prédicats du premier ordre, il existe une formule F' sous forme $\mathcal{CNT}$ telle que $F \sim F'$.

Question (III.1) Démontrez ce théorème, par induction sur la formule F.

Indications :
– Vous utiliserez les équivalences de l'exercice précédent ainsi que l'équivalence $F \sim \neg\neg F$ (sans la démontrer).

– Vous pourrez également utiliser (sans le démontrer) le résultat suivant : soient F, G, F' et G' quatre formules telles que $F \sim F'$ et $G \sim G'$. Alors $\neg F \sim \neg F'$, $F \wedge G \sim F' \wedge G'$, $F \vee G \sim F' \vee G'$, $F \to G \sim F' \to G'$, $\forall x.F \sim \forall x.F'$ et $\exists x.F \sim \exists x.F'$.

Réponse

Par induction sur la forme de F, on construit une $\mathcal{CNT}$ $F' \sim F$.

- si $F \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$, F est déjà $\mathcal{CNT}$.
- si $F \sim \neg G$, par hypothèse d'induction, il existe G' qui est $\mathcal{CNT}$ et $G' \sim G$. Alors $\neg G'$ est $\mathcal{CNT}$ et $F \sim \neg G'$. On prend $F' \equiv \neg G'$.
- si $F \equiv F_1 \wedge F_2$, par hypothèse d'induction, il existe F_1' qui est $\mathcal{CNT}$ et $F_1' \sim F_1$ et il existe F_2' qui est $\mathcal{CNT}$ et $F_2' \sim F_2$. Alors $F_1' \wedge F_2'$ est $\mathcal{CNT}$ et $F \sim F_1' \wedge F_2'$. On prend $F' \equiv F_1' \wedge F_2'$.
- si $F \equiv F_1 \vee F_2$, par hypothèse d'induction, il existe F_1' qui est $\mathcal{CNT}$ et $F_1' \sim F_1$ et il existe F_2' qui est $\mathcal{CNT}$ et $F_2' \sim F_2$. Alors $F \sim F_1' \vee F_2'$. D'où $F \sim \neg\neg F \sim \neg\neg(F_1' \vee F_2') \sim \neg(\neg F_1' \wedge \neg F_2')$. Et $\neg(\neg F_1' \wedge \neg F_2')$ est $\mathcal{CNT}$ (puisque F_1' et F_2' sont $\mathcal{CNT}$). On prend $F' \equiv \neg(\neg F_1' \wedge \neg F_2')$.
- si $F \equiv F_1 \to F_2$, par hypothèse d'induction, il existe F_1' qui est $\mathcal{CNT}$ et $F_1' \sim F_1$ et il existe F_2' qui est $\mathcal{CNT}$ et $F_2' \sim F_2$. Alors $F \sim \neg\neg F \sim \neg\neg(F_1' \to F_2') \sim \neg\neg(\neg F_1' \vee F_2') \sim \neg(\neg\neg F_1' \wedge \neg F_2') \sim \neg(F_1' \wedge \neg F_2')$ et $\neg(F_1' \wedge \neg F_2')$ est $\mathcal{CNT}$. On prend $F' \equiv \neg(F_1' \wedge \neg F_2')$.
- si $F \equiv \forall x.G$, par hypothèse d'induction, il existe G' qui est $\mathcal{CNT}$ et $G' \sim G$. Alors $F \sim \forall x.G'$ et $\forall x.G'$ est $\mathcal{CNT}$. On prend $F \equiv \forall x.G'$.
- si $F \equiv \exists x.G$, par hypothèse d'induction, il existe G' qui est $\mathcal{CNT}$ et $G' \sim G$. Alors $F \sim \neg\neg F \sim \neg\neg\exists x.G' \sim \neg\forall x.\neg G'$ et $\neg\forall x.\neg G'$ est $\mathcal{CNT}$. On prend $F' \equiv \neg\forall x.\neg G'$.
