Master 1 Informatique Année 2010/2011

Logique pour l'Informatique Avancée
MI067 STL
Janvier 2011

Seconde session

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

Exercice I : *Fonctions propositionnelles*

Question (I.1) Donnez une formule du calcul des propositions P qui dépend de deux formules quelconques F et G (on note $P[F, G]$) et qui vérifie la table de vérité suivante :

F	G	$P[F, G]$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Question (I.2) Donnez une formule du calcul des propositions Q qui dépend de trois formules quelconques F, G et H (on note $Q[F, G, H]$) et qui vérifie la table de vérité suivante :

F	G	H	$Q[F, G, H]$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Exercice II : *Lapins et carottes*

Hypothèse : *« les lapins aiment les carottes »*

Conclusion : *« les lapins qui n'aiment pas les carottes ne sont pas des lapins »*

On formalise l'hypothèse par la proposition $L \to C$; et on formalise la conclusion par la proposition $(L \wedge \neg C) \to \neg L$.

Question (II.1) Peut-on déduire la conclusion de l'hypothèse (c'est-à-dire : *« si les lapins aiment les carottes alors les lapins qui n'aiment pas les carottes ne sont pas des lapins »*) ?

Question (II.2) L'inverse est-il vrai (c'est-à-dire *« si les lapins qui n'aiment pas les carottes ne sont pas des lapins alors les lapins aiment les carottes »)* ?

Exercice III : *Renards, lapins et carottes*

Hypothèse 1 : *« les renards aiment les lapins »*

Hypothèse 2 : *« les lapins aiment les carottes »*

Conclusion : *« les renards aiment les carottes »*

On formalise l'hypothèse 1 par la formule $\forall x \forall y.((R(x) \wedge L(y)) \rightarrow A(x,y))$, l'hypothèse 2 par la formule $\forall x \forall y.((L(x) \wedge C(y)) \rightarrow A(x,y))$, et la conclusion par la formule $\forall x \forall y.((R(x) \wedge C(y)) \rightarrow A(x,y))$.

Question (III.1) La conclusion est-elle vraiment une conséquence des hypothèses (justifiez) ?

Question (III.2) Quelle hypothèse pourrait-on rajouter sur la relation A pour que la conséquence devienne valide ?

Exercice IV : *Satisfaisabilité et conséquence sémantique*

Question (IV.1) Montrez que si $\mathcal{M}, \rho \models F \rightarrow G$ et si $\mathcal{M}, \rho \models \neg G$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \neg F$.
Utilisez la définition de $\models$.

Question (IV.2) Soit l'ensemble d'hypothèses :

$$\Gamma = \{\forall x.(P(x) \rightarrow R(x)); \forall x.(\neg R(x) \rightarrow Q(x)); \exists x.(P(x) \vee \neg Q(x))\}.$$

Montrez que $\Gamma \models \exists x.R(x)$ (c'est-à-dire, pour tout $\mathcal{M}, \rho$, si $\mathcal{M}, \rho \models \Gamma$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.R(x)$).

Exercice V : *Déduction naturelle : propositions*

Question (V.1) Donnez une preuve en déduction naturelle de $\vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$

Question (V.2) On veut trouver une preuve de la formule $(F \rightarrow G) \vee (\neg F \rightarrow G)$.

1. Donnez une preuve en déduction naturelle du séquent $F, \neg F \vdash G$.
2. On a montré en cours une preuve de $\vdash F \vee \neg F$. En utilisant ce fait, et la question précédente, donnez une preuve en déduction naturelle de $\vdash (F \rightarrow G) \vee (\neg F \rightarrow G)$.

Exercice VI : *Déduction naturelle : quantificateurs*

Question (VI.1) Donnez une preuve en déduction naturelle des formules suivantes :

1. $(\forall x.F(x) \wedge \forall y.G(y)) \rightarrow \forall z.(F(z) \wedge G(z))$
2. $(\exists x.(F(x) \rightarrow G(x))) \rightarrow (\forall x.F(x) \rightarrow \exists x.G(x))$

Exercice VII : *Système T*

On note $\mathsf{1}$ pour $\mathsf{S0}$. Donnez la définition d'un terme lt du système T tel que

$$\begin{array}{lcl} (lt\ \mathsf{0}\ t) & \overset{*}{\hookrightarrow} & \mathsf{1} \\ (lt\ \mathsf{S}t\ \mathsf{0}) & \overset{*}{\hookrightarrow} & \mathsf{0} \\ (lt\ \mathsf{S}t_1\ \mathsf{S}t_2) & \overset{*}{\hookrightarrow} & (lt\ t_1\ t_2) \end{array}$$