Feuille de TD n^{o} 3

Exercice 1 —

1. Montrer que si une formule F des variables $p_1, \ldots, p_n$ est une tautologie alors, la formule obtenue en remplaçant chaque p_i par $\neg p_i$ est aussi une tautologie.
2. Dualité : Soient deux formules F et G formées avec uniquement des $\vee, \wedge$ et $\neg$. Montrer que si $F \sim G$ alors, on peut permuter les $\wedge$ et $\vee$ et on obtient encore deux formules équivalentes.

Exercice 2 — Quel est le nombre maximum de formules non équivalentes qu'on peut former avec n variables $p_1, \ldots, p_n$ distinctes ?

Exercice 3 —

1. Soit la formule $F = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$. F et $\neg F$ sont-elles satisfaisables ? Sont-elles des tautologies ?
2. Trouver une formule G telle que $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ soit une tautologie.
3. Soit F_1 la formule obtenue en substituant $\neg p$ à p dans F. F_1 est-elle une conséquence de F ? F est-elle une conséquence de F_1 ?

Exercice 4 — Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux ensembles de formules. On dit que $\mathcal{F} \models \mathcal{G}$ si et seulement si pour toute interprétation I, on a

$$I(F) = vrai \text{ pour toute } F \in \mathcal{F}$$

implique que

$$I(G) = vrai \text{ pour toute } G \in \mathcal{G}.$$

Montrer que ($\mathcal{F} \models \mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}' \models \mathcal{F}''$) implique que $\mathcal{F} \models \mathcal{F}''$.

Exercice 5 — Soit $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \times\}$ où $+$ et $\times$ sont des symboles de fonction binaire. Soient $\mathcal{M}_1 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_2 =$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{M}_3 = \mathbb{Z}[i] = \{n + im \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, où les symboles de $\mathcal{L}$ sont interprétés de la manière usuelle. Ecrire une formule F telle que :

1. $\mathcal{M}_1 \models F, \mathcal{M}_2 \not\models F$ et $\mathcal{M}_3 \not\models F$
2. $\mathcal{M}_1 \not\models F, \mathcal{M}_2 \models F$ et $\mathcal{M}_3 \not\models F$
3. $\mathcal{M}_1 \not\models F, \mathcal{M}_2 \not\models F$ et $\mathcal{M}_3 \models F$

Exercice 6 — Soient x, y, z, u, v des variables. Les formules suivantes sont-elles des tautologies ?

1. $(x \Rightarrow \neg x) \leftrightarrow \neg x$
2. $x \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y)$
3. $x \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)))$
4. $(x \wedge y \Rightarrow z) \Rightarrow ((x \vee z \Rightarrow x) \Rightarrow (y \Rightarrow x))$
5. $((x \vee y) \wedge (x \Rightarrow u) \wedge (y \Rightarrow v) \wedge \neg(u \Rightarrow v)) \Rightarrow ((u \Rightarrow x) \wedge (v \Rightarrow y))$

Exercice 7 — Soient les formules F, G et H suivantes : $p \vee q \vee r, p \wedge q \wedge \neg r$ et $(p \wedge \neg q) \vee r$.

1. Déterminer tous les couples de formules de F, G, H tels que l'une soit conséquence de l'autre.
2. $F \vee H$ est-elle une conséquence de $F \vee \neg H$?